前面课程内容回顾

一、弯曲内力

1、截面上的剪力和弯矩

2、剪力方程和弯矩方程

3、剪力、弯矩和分布荷载间的微分关系

4、剪力图和弯矩图

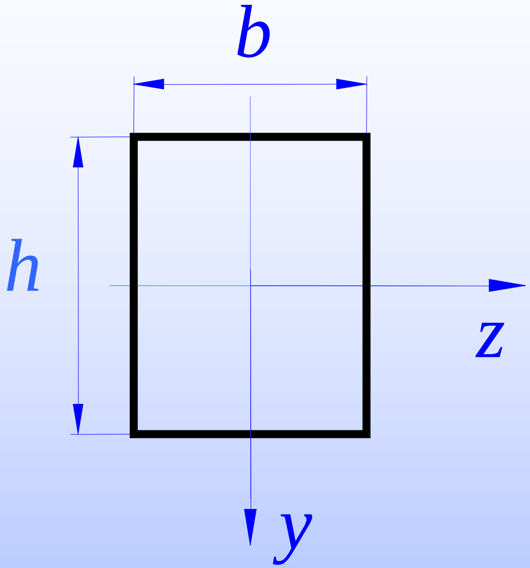
二、弯曲应力

1、弯曲正应力

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}$$

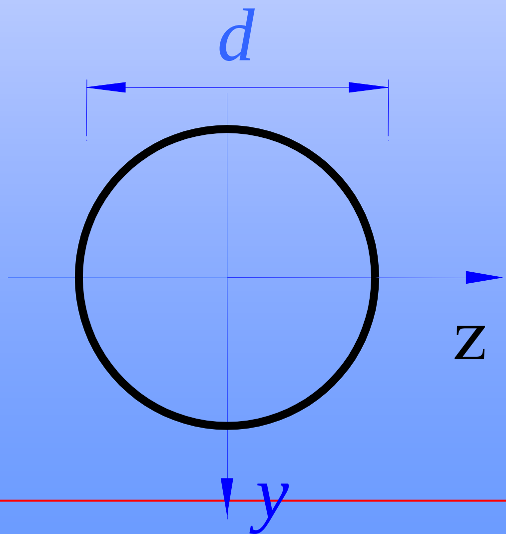
简单截面的弯曲截面系数



(1) 矩形截面

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \qquad W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12} \qquad W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{b^2 h}{6}$$



(2) 圆形截面

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{d/2} = \frac{I_y}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

读点历史

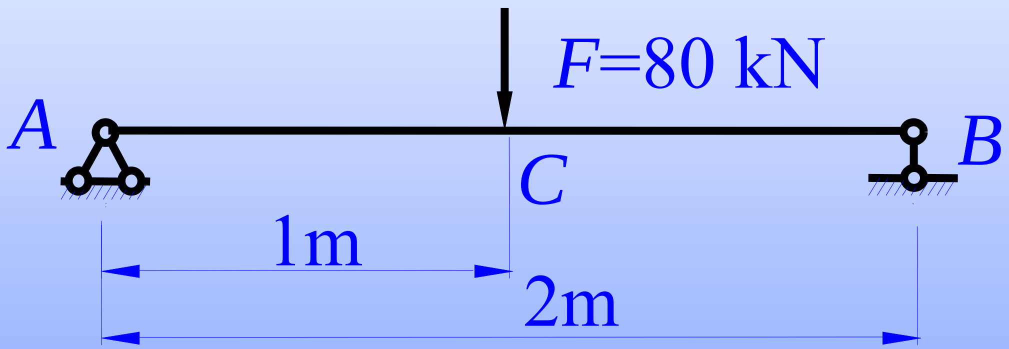
在《关于力学和局部运动的两门新科学的对话和数学证明》一书中，伽利略讨论的第二个问题是梁的弯曲强度问题。按今天的科学结论，当时作者所得的弯曲正应力公式并不完全正确，但该公式已反映了矩形截面梁的承载能力和bh^2（b、h分别为截面的宽度和高度）成正比，圆截面梁承载能力和d^3（d为横截面直径）成正比的正确结论。对于空心梁承载能力的叙述则更为精彩，他说，空心梁“能大大提高强度而无需增加重量，所以在技术上得到广泛的应用。在自然界就更为普遍了。这样的例子在鸟类的骨骼和各种芦苇中可以看到，它们既轻巧，而又对弯曲和断裂具有相当高的抵抗能力”。

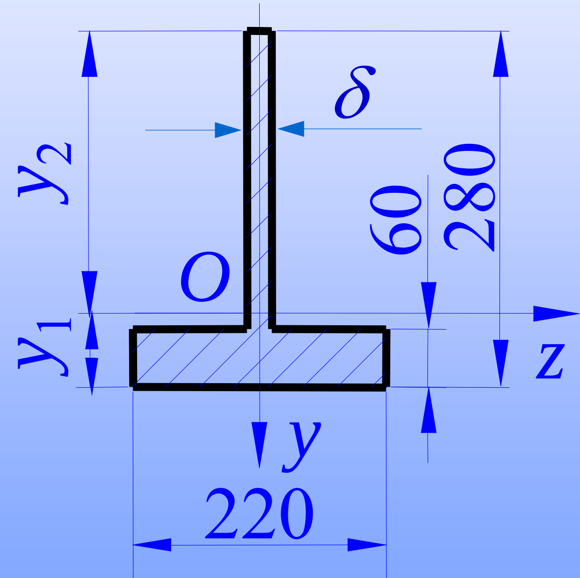
梁在弯曲变形时，沿长度方向的纤维中有一层既不伸长也不缩短者，称为中性层。早在1620年荷兰物理学家和力学家比克门（Beeckman I）发现，梁弯曲时一侧纤维伸长、另一侧纤维缩短，必然存在既不伸长也不缩短的中性层。英国科学家胡克（Hooke R）于1678年也阐述了同样的现象，但他们都没有述及中性层位置问题。首先论及中性层位置的是法国科学家马略特（Mariotte E, 1680年）。其后莱布尼兹（Leibniz G W）、雅科布·伯努利（Jakob Bernoulli，1694）、伐里农（Varignon D, 1702年）等人及其他学者的研究工作尽管都涉及了这一问题，但都没有得出正确的结论。18世纪初，法国学者帕伦（Parent A）对这一问题的研究取得了突破性的进展。直到1826年纳维（Navier，C. －L. －M. －H）才在他的材料力学讲义中给出正确的结论：中性层过横截面的形心。

平截面假设是材料力学计算理论的重要基础之一。雅科布·伯努利于1695年提出了梁弯曲的平截面假设，由此可以证明梁（中性层）的曲率和弯矩成正比。此外他还得到了梁的挠曲线微分方程。但由于没有采用曲率的简化式，且当时尚无弹性模量的定量结果，致使该理论并没有得到广泛的应用。

- 梁的变形计算问题，早在13世纪纳莫尔（Nemore J de）已经提出，此后雅科布·伯努利、丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli）、欧拉（Euler L）等人都曾经研究过这一问题。1826年纳维在他材料力学讲义中得出了正确的挠曲线微分方程式及梁的弯曲强度的正确公式，为梁的变形与强度计算问题奠定了正确的理论基础。
- 俄罗斯铁路工程师儒拉夫斯基（Журавский Д И）于1855年得到横力弯曲时的切应力公式。30年后，他的同胞别斯帕罗夫（Веспалов Д）开始使用弯矩图，被认为是历史上第一个使用弯矩图的人。

例4-17(P_{153} 4-41) 跨长 l= 2m 的铸铁梁受力如图，已知铸铁的许用拉应力$[\sigma_t]$=30 MPa，许用压应力$[\sigma_c]$ =90 MPa。试根据截面最为合理的要求，确定**T**字形梁横截面的尺寸δ，并校核梁的强度 。





解：　　根据截面最为合理的要求

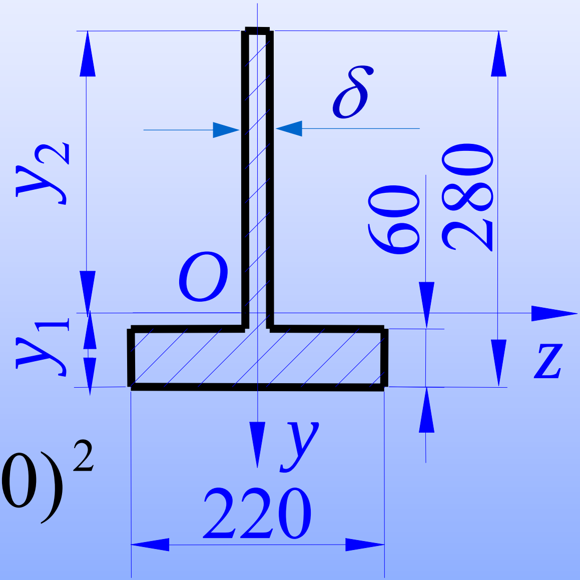
$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3} \Rightarrow \bar{y}=y_1=70\ \text{mm}$$

即

$$\bar{y}=\frac{220\times 60\times 30+(280-60)\times\delta\times(60+110)}{(280-60)\delta+220\times 60}=70$$

得

$$\delta = 24\ \text{mm}$$



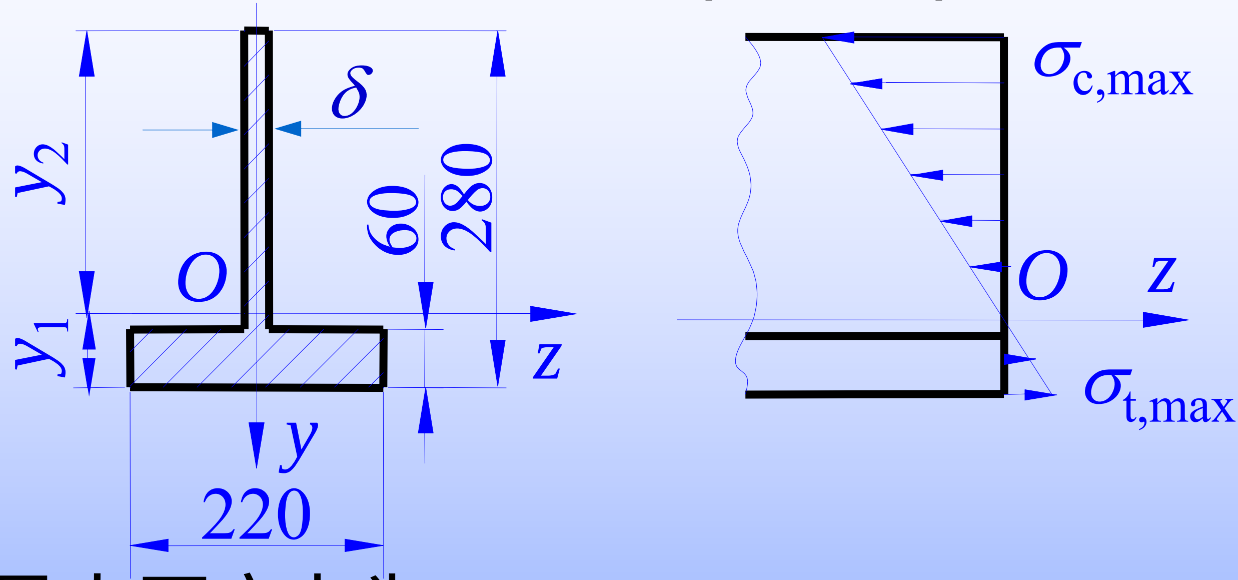
截面对中性轴的惯性矩为

$$I_z=\frac{24\times 220^3}{12}+24\times 220\times(210-110)^2$$

$$+\frac{220\times 60^3}{12}+60\times 220\times(280-210-30)^2$$

$$=99.2\times 10^6\ \text{mm}^4$$

梁上的最大弯矩 $M_{\max} = \dfrac{Fl}{4} = \dfrac{80\times 2}{4} = 40\ \mathrm{kN\cdot m}$

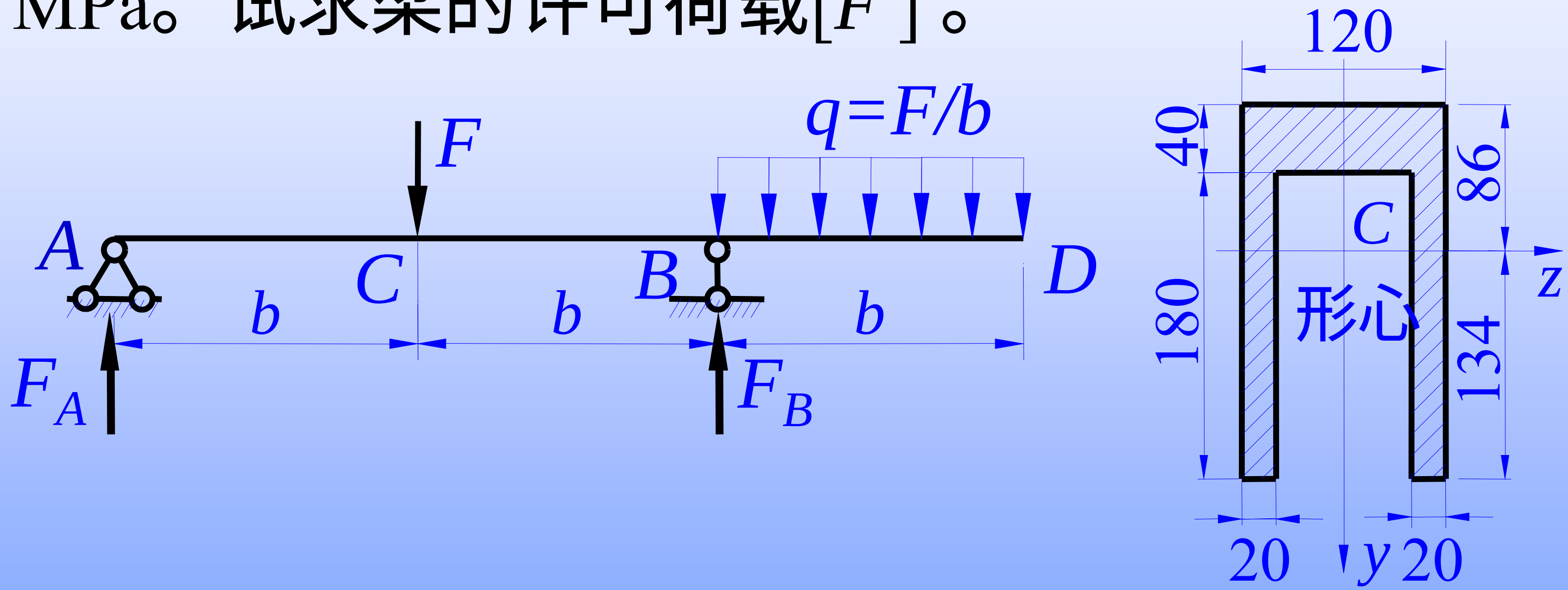


于是最大压应力为

$$\sigma_{c,\max} = \frac{M_{\max} y_2}{I_z} = \frac{40\times 10^6\ \mathrm{N\cdot mm}\times 210\ \mathrm{mm}}{99.2\times 10^6\ \mathrm{mm}^4}$$

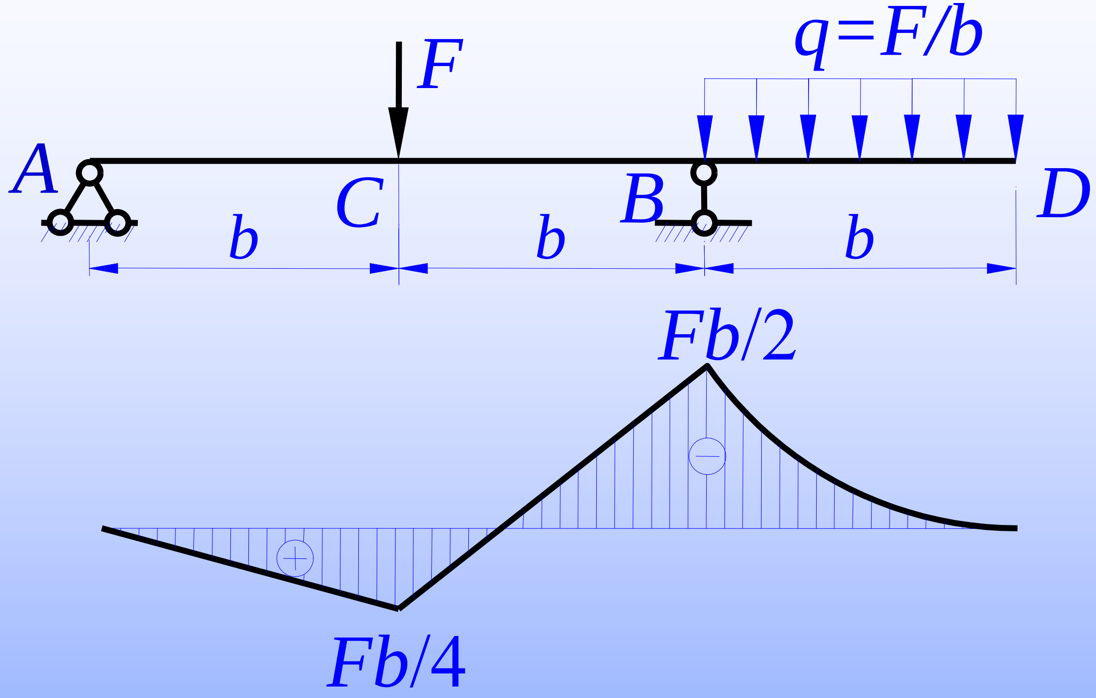
$$= 84.7\ \mathrm{MPa} < [\sigma_c]$$ 即梁满足强度要求。

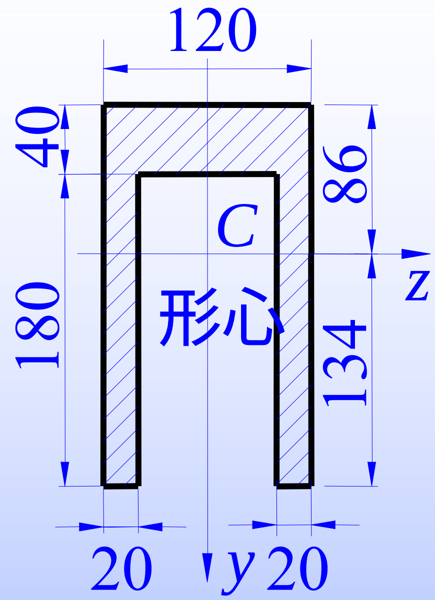
例**4-18** 图示槽形截面铸铁梁，已知：$b = 2\text{m}$，截面对中性轴的惯性矩 $I_z=5493\times10^4\text{mm}^4$， 铸铁的许用拉应力$[\sigma_t]=30$ MPa，许用压应力$[\sigma_c]=90$ MPa。试求梁的许可荷载$[F]$。



解：**1**、梁的支反力为 $F_A=\dfrac{F}{4}$ $F_B=\dfrac{7}{4}F$

据此作出梁的弯矩图如下

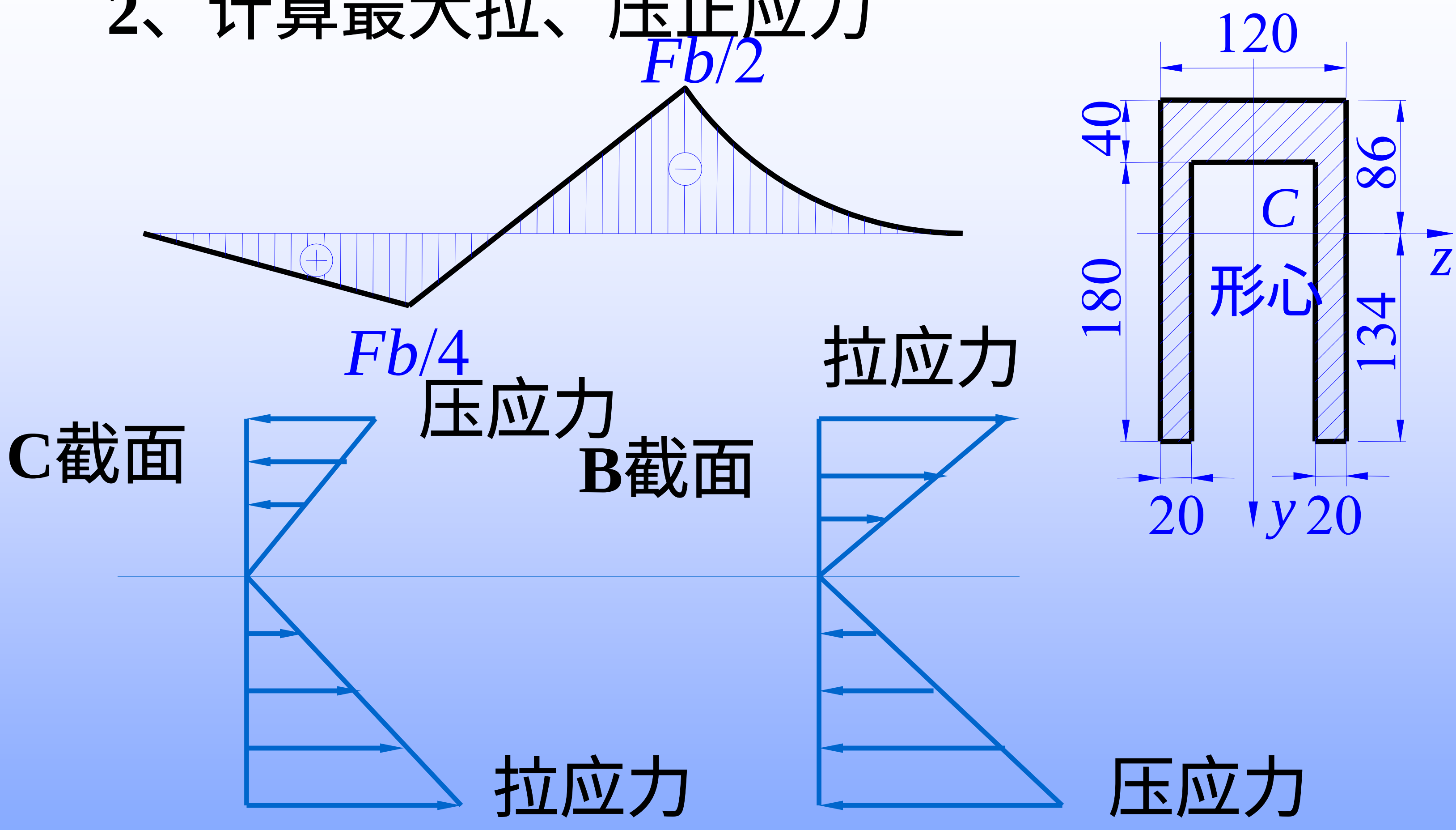




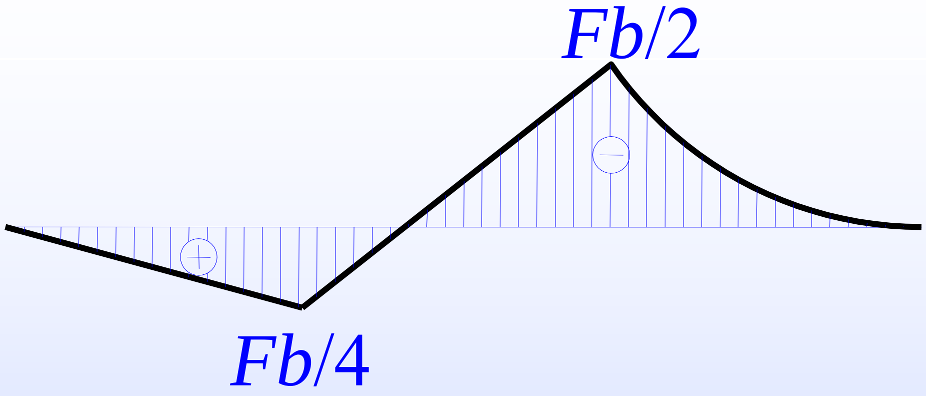
$$M_{\max}^{+}=\frac{Fb}{4}$$ 发生在截面*C*

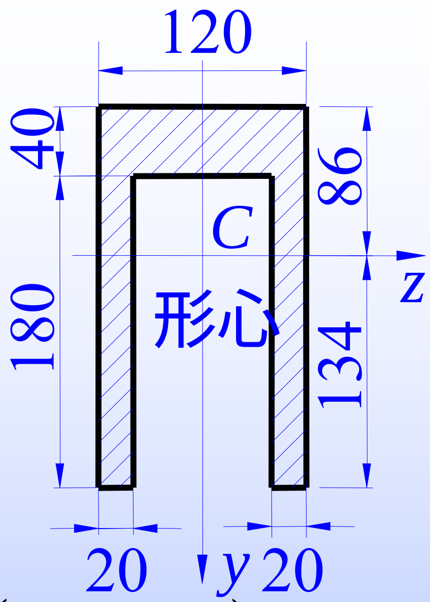
$$M_{\max}^{-}=\frac{Fb}{2}$$ 发生在截面*B*

2、计算最大拉、压正应力



可见：压应力强度条件由*B*截面控制，拉应力强度条件则*B*、*C*截面都要考虑。





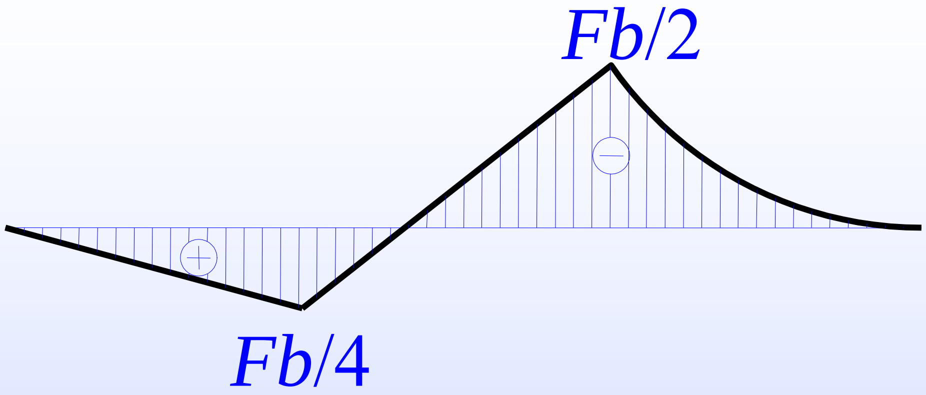
考虑截面B：

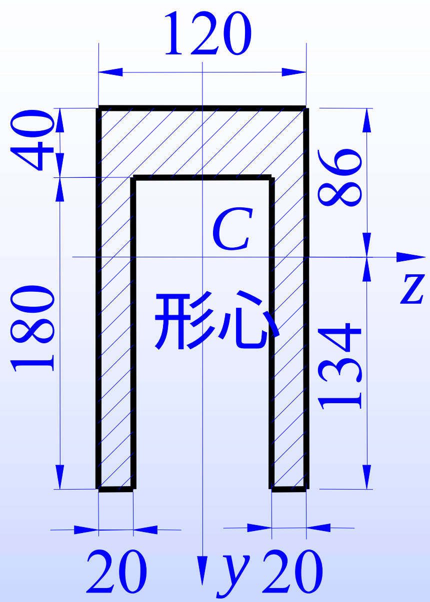
$$\sigma_{\mathrm{t,max}}=\frac{M_B y_2}{I_z}=\frac{\left(F/2\times 2\times 10^3\ \mathrm{mm}\right)\left(86\ \mathrm{mm}\right)}{5493\times\times 10^3\ \mathrm{mm}^4}\leq 30\ \mathrm{MPa}$$

$$F\leq 19.2\ \mathrm{kN}$$

$$\sigma_{\mathrm{c,max}}=\frac{M_B y_1}{I_z}=\frac{\left(F/4\times 2\times 10^3\ \mathrm{mm}\right)\left(134\ \mathrm{mm}\right)}{5493\times 10^4\ \mathrm{mm}^4}\leq 90\ \mathrm{MPa}$$

$$F\leq 73.8\ \mathrm{kN}$$





考虑截面C：

$$\sigma_{\mathrm{t,max}} = \frac{M_C y_1}{I_z} = \frac{\left(F/4 \times 2 \times 10^3\ \mathrm{mm}\right)\left(134\ \mathrm{mm}\right)}{5493 \times 10^4\ \mathrm{mm}^4} \le 30\ \mathrm{MPa}$$

$$F \le 24.6\ \mathrm{kN}$$

因此梁的强度由截面B上的最大拉应力控制

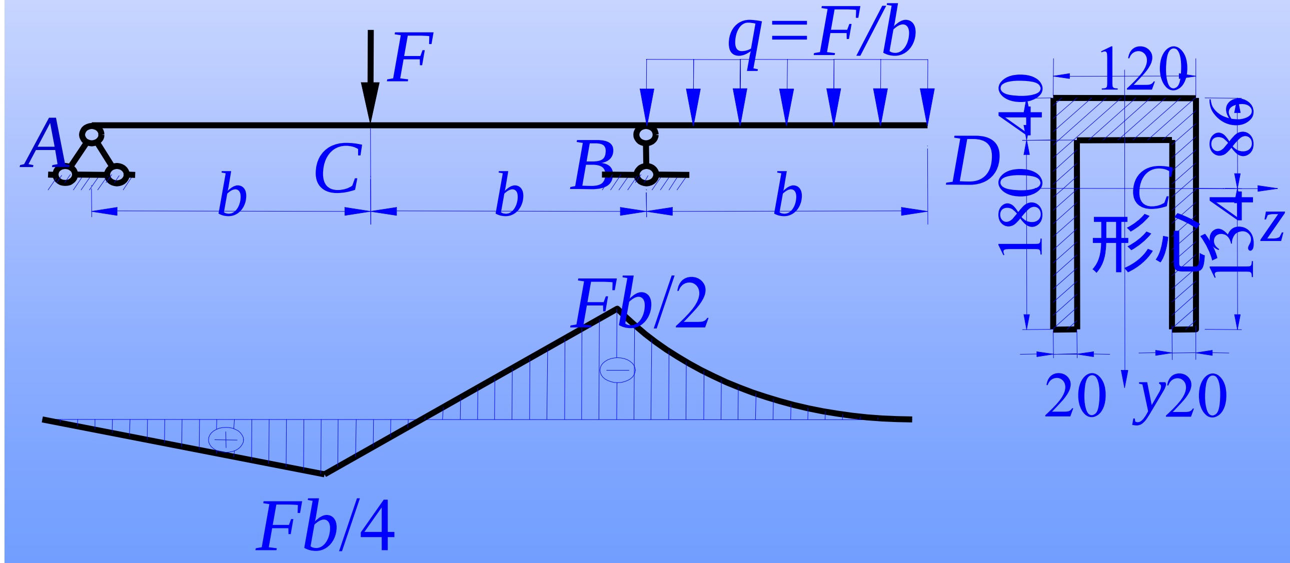
$$[F] = 19.2\ \mathrm{kN}$$

思考题

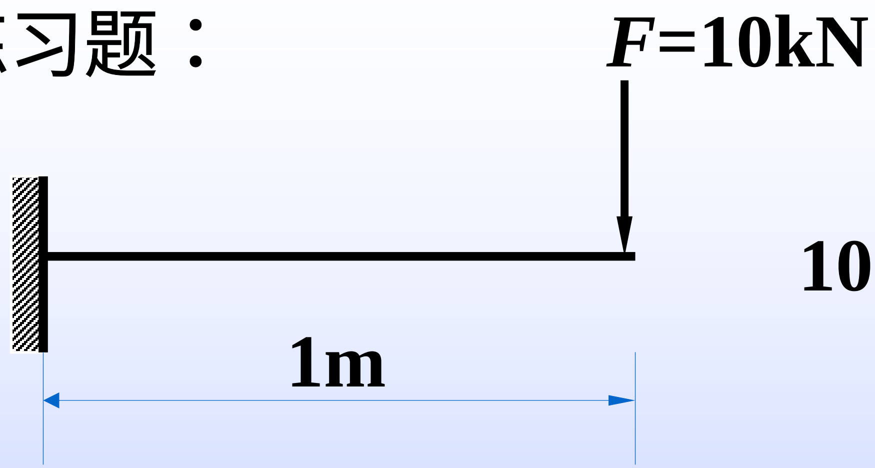
1.上例中，如采用低碳钢材料，危险点在何处？

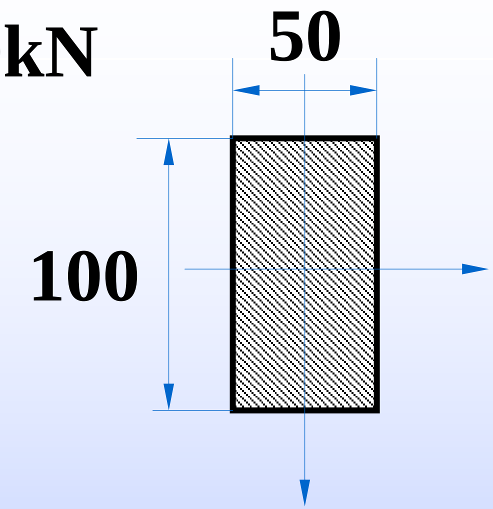
2.如将梁的换为低碳钢对称工字钢梁，危险点在何处？

3.如将梁的换为铸铁对称工字钢梁，危险点在何处？



练习题：





试计算最大正应力。

§4-5 梁横截面上的切应力•梁的切应力强度条件

Ⅰ、梁横截面上的切应力

推导思路：近似方法

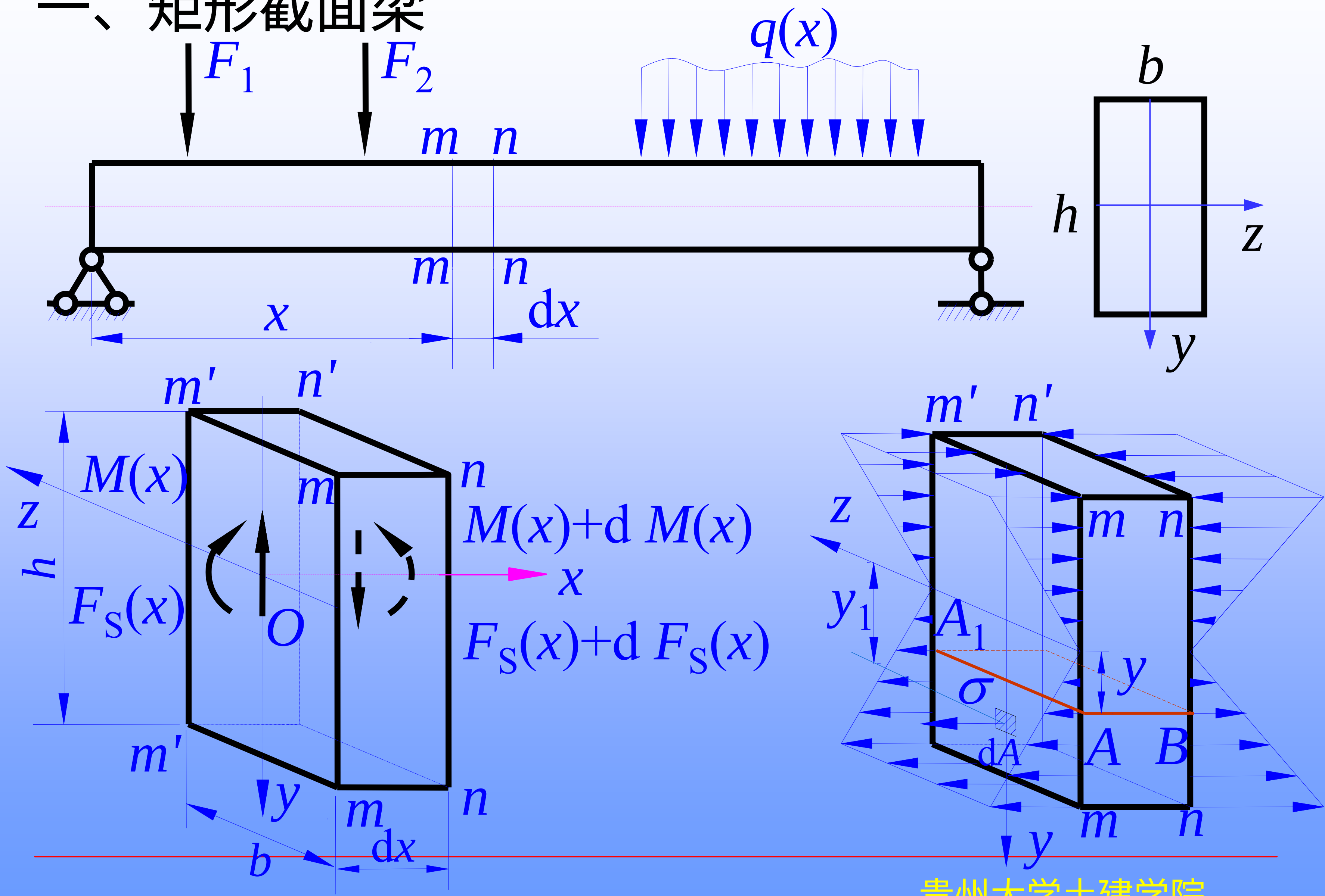
不同于前面章节各种应力计算公式的分析过程

分离体的平衡

横截面上切应力分布规律的假设

$\Rightarrow$ 横截面上弯曲切应力的计算公式

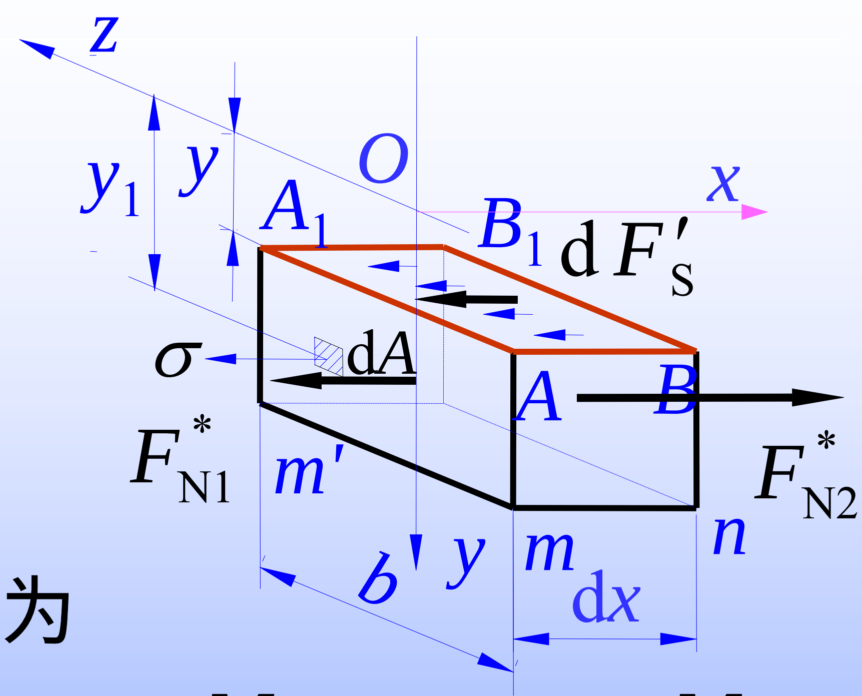
一、矩形截面梁



贵州大学土建学院

横截面上纵向力不平衡意味着纵截面上有水平剪力，即有水平切应力分布。

$$\mathrm{d}F'_{S} = F^{*}_{N2} - F^{*}_{N1}$$



而横截面上纵向力的大小为

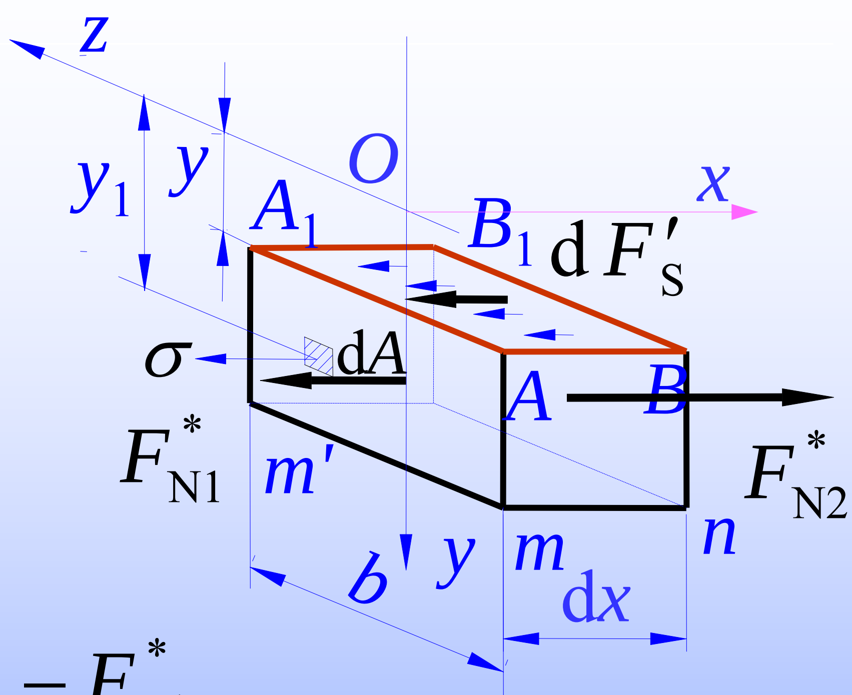
$$F^{*}_{N1} = \int_{A^*} \sigma_1 \,\mathrm{d}A = \int_{A^*} \frac{My_1}{I_z}\mathrm{d}A = \frac{M}{I_z}\int_{A^*} y_1 \,\mathrm{d}A = \frac{M}{I_z}S^{*}_{z}$$

面积AA_1mm'对中性轴 z的静矩

$$F^{*}_{N2} = \int_{A^*} \sigma_2 \,\mathrm{d}A = \int_{A^*} \frac{(M+\mathrm{d}M)}{I_z} y_1 \,\mathrm{d}A = \frac{M+\mathrm{d}M}{I_z}S^{*}_{z}$$

$$F_{N1}^{*} = \frac{M}{I_z} S_z^{*}$$

$$F_{N2}^{*} = \frac{M + \mathrm{d}M}{I_z} S_z^{*}$$



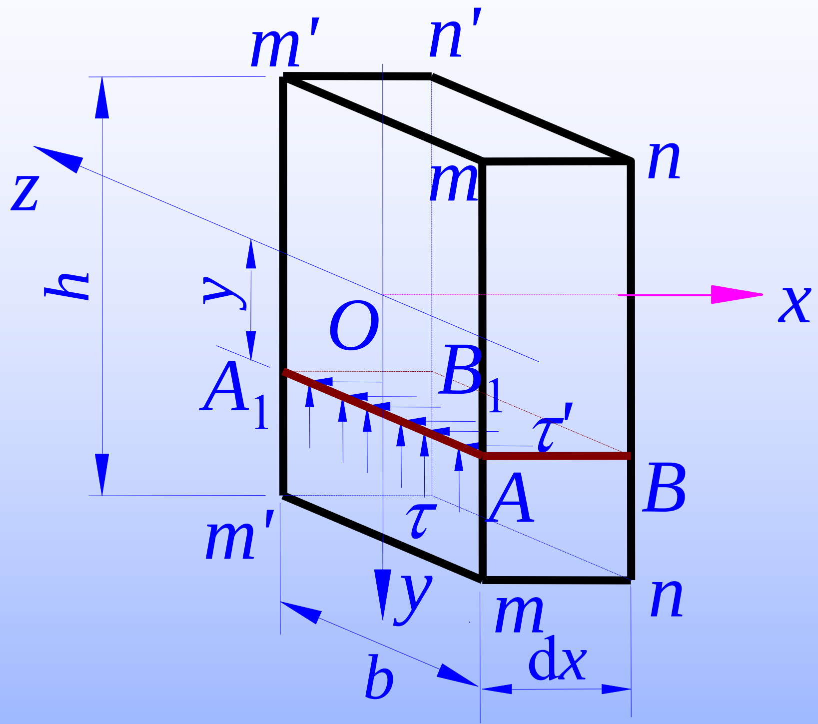
纵截面上水平剪力值为

$$\sum F_x = 0 \qquad \mathrm{d}F_S' = F_{N2}^{*} - F_{N1}^{*}$$

$$\mathrm{d}F_S' = \frac{\mathrm{d}M}{I_z} S_z^{*}$$

要确定与之对应的水平切应力τ'还需要补充条件。

矩形截面梁对称弯曲时横截面上切应力的分布规律



(1) 由于梁的侧面为τ=**0**的自由表面，根据切应力互等定理，横截面两侧边处的切应力必与侧边平行；

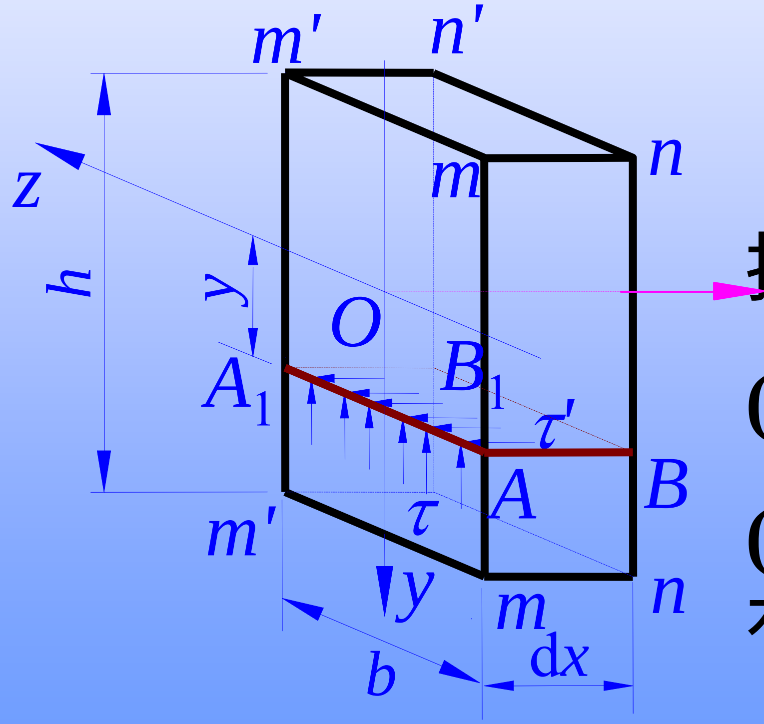
(2) 对称轴y处的切应力必沿y轴方向，即平行于侧边；

(3)横截面两侧边处的切应力值大小相等，对于狭长矩形截面则沿截面宽度其值变化不会大。

窄高矩形截面梁横截面上弯曲切应力分布的假设：

(1) 横截面上各点处的切应力均与侧边平行；

(2) 横截面上距中性轴等远各点处的切应力大小相等。



根据切应力互等定理

$$\tau' = \tau$$

推得：

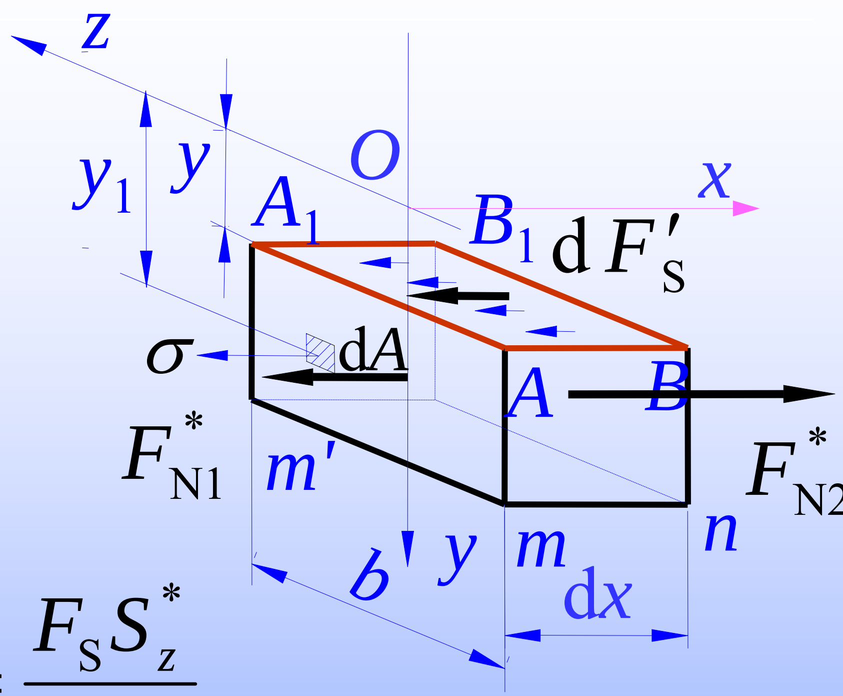
(1) τ' 沿截面宽度方向均匀分布；

(2) 在dx微段长度内可以认为τ' 没有变化。

即

$$\mathrm{d}F'_{\mathrm{S}} = \tau' b\,\mathrm{d}x$$

又 $\mathrm{d}F'_{\mathrm{S}} = \dfrac{\mathrm{d}M}{I_z} S_z^*$



由两式得

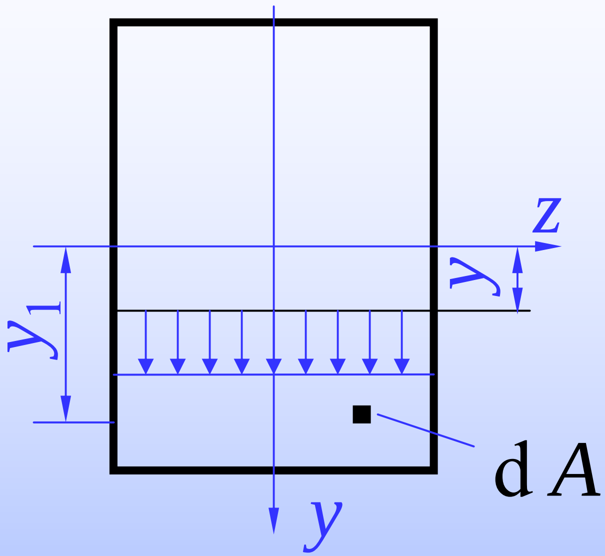
$$\tau' = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \times \frac{S_z^*}{I_z b} = \frac{F_{\mathrm{S}} S_z^*}{I_z b}$$

根据前面的分析

$$\boxed{\tau = \frac{F_{\mathrm{S}} S_z^*}{I_z b}}$$

矩形截面梁弯曲切应力计算公式

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$



其中：

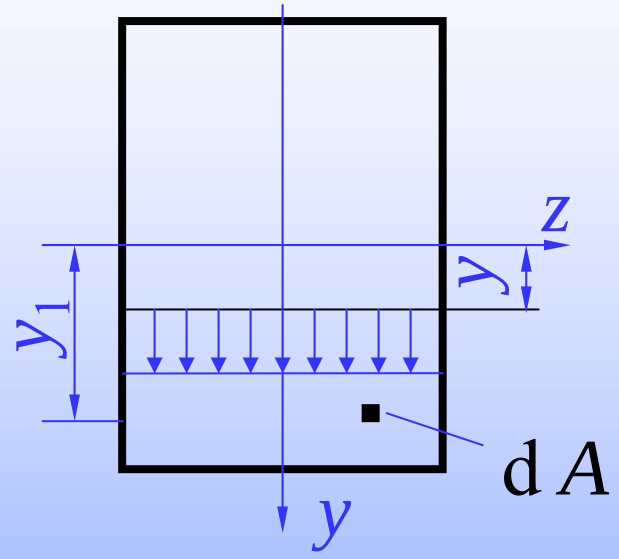
F_S→ 横截面上的剪力；

I_z → 整个横截面对于中性轴的惯性矩；

b → 与剪力垂直的截面尺寸，此时是矩形的宽度；

S_z^*→ 横截面上求切应力的点处横线以外部分面积对中性轴的静矩

矩形横截面上弯曲切应力的变化规律



$$S_z^* = \int_{A^*} y_1 \, \mathrm{d}A$$

$$= b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(y + \frac{h/2 - y}{2}\right)$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$$

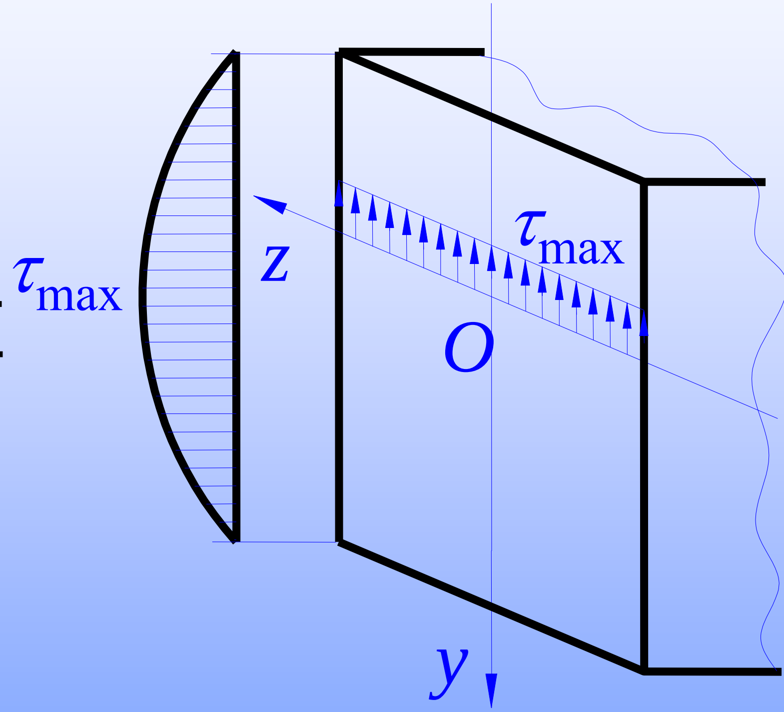
$$\tau = \frac{F_S}{I_z b} \times \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$$\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b} = \frac{F_S}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

(1) τ沿截面高度按二次抛物线规律变化；

(2) 同一横截面上的最大切应力τ_{max}在中性轴处(y=0)；

(3)上下边缘处（y=±h/2)，切应力为零。



$$\tau_{max} = \frac{F_S h^2}{8I_z} = \frac{F_S h^2}{8\times\left(bh^3/12\right)} = \frac{3}{2}\times\frac{F_S}{bh} = \frac{3F_S}{2A}$$

作业：4-40，4-41, 4-42

再见！