上次课程内容回顾

§2-3 应力。拉（压）杆内的应力

- 1.应力的概念
- 2.横截面的应力
- 3.圣文南原理

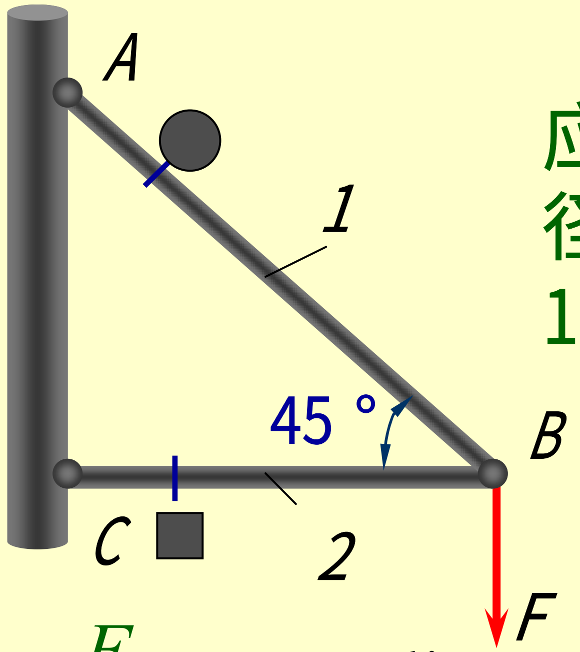
横截面上的应力

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

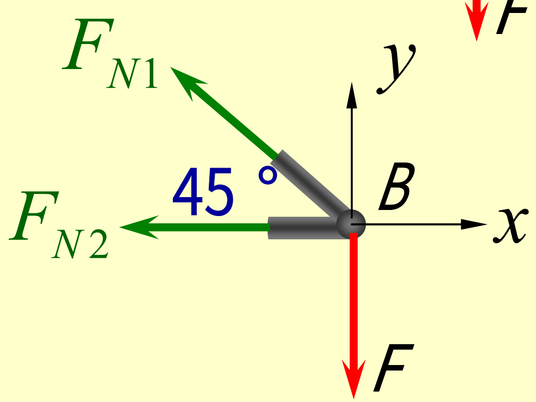
该式为横截面上的正应力σ计算公式。正应力σ和轴力F_N同号。即拉应力为正，压应力为负。

§2-3 应力。拉（压）杆内的应力

例题2-2



图示结构，试求杆件AB、CB的应力。已知 F=20kN；斜杆AB为直径20mm的圆截面杆，水平杆CB为15×15的方截面杆。



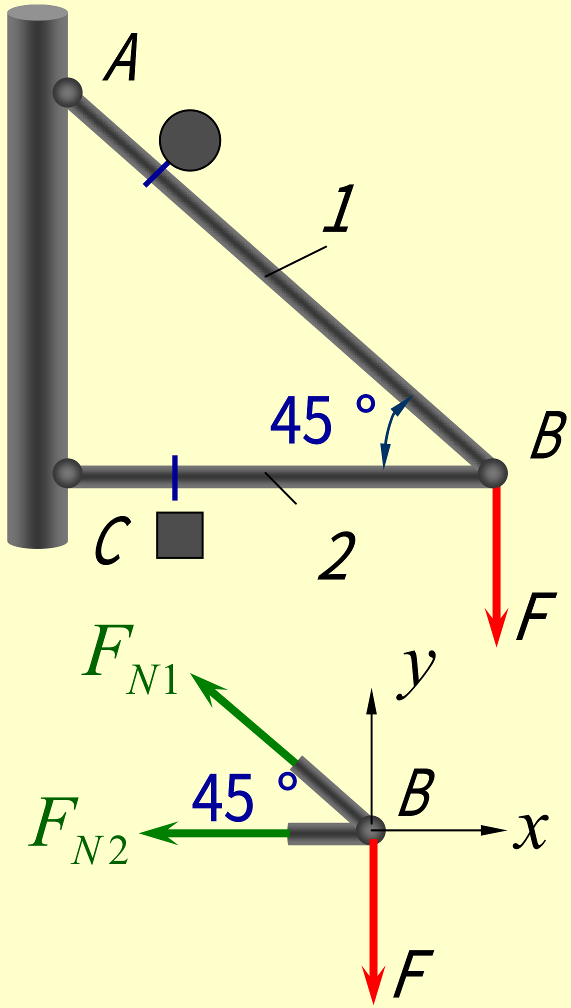
解：1、计算各杆件的轴力。（设斜杆为1杆，水平杆为2杆）用截面法取节点B为研究对象

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{N1}\cos 45^\circ + F_{N2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{N1}\sin 45^\circ - F = 0$$

$$F_{N1} = 28.3\text{kN} \qquad F_{N2} = -20\text{kN}$$

§ 2-3 应力。拉（压）杆内的应力



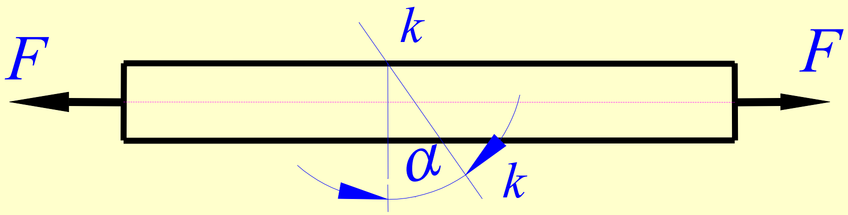
$$F_{N1} = 28.3\text{kN} \qquad F_{N2} = -20\text{kN}$$

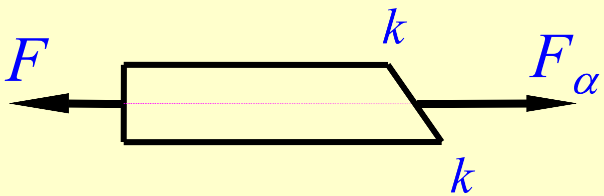
2、计算各杆件的应力。

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = \frac{28.3\times10^3}{\frac{\pi}{4}\times20^2\times10^{-6}} = 90\times10^6\,\text{Pa} = 90\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = \frac{-20\times10^3}{15^2\times10^{-6}} = -89\times10^6\,\text{Pa} = -89\text{MPa}$$

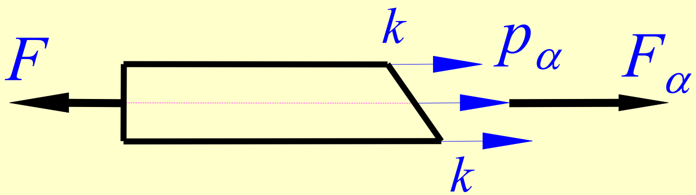
四、拉（压）杆斜截面上的应力



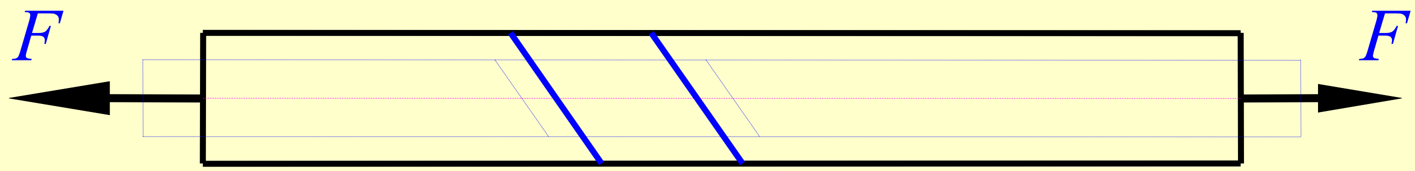


由静力平衡得斜截面上的内力：

$$F_\alpha = F$$



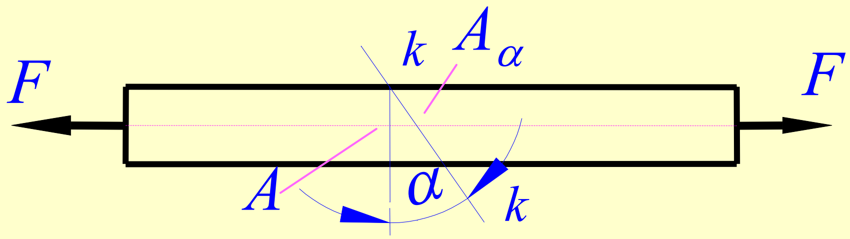
$$p_\alpha = ?$$

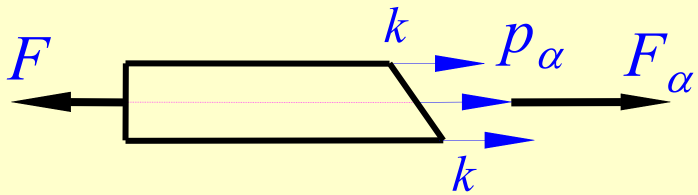


变形假设：两平行的斜截面在杆件发生拉（压）变形后仍相互平行。

推论：两平行的斜截面之间所有纵向线段伸长变形相同。

即斜截面上各点处应力相等。



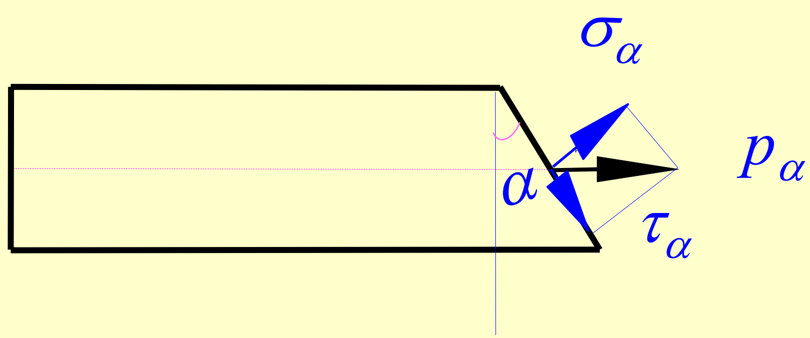


$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{A/\cos\alpha} = \frac{F}{A}\cos\alpha$$

$$= \sigma_0 \cos\alpha$$

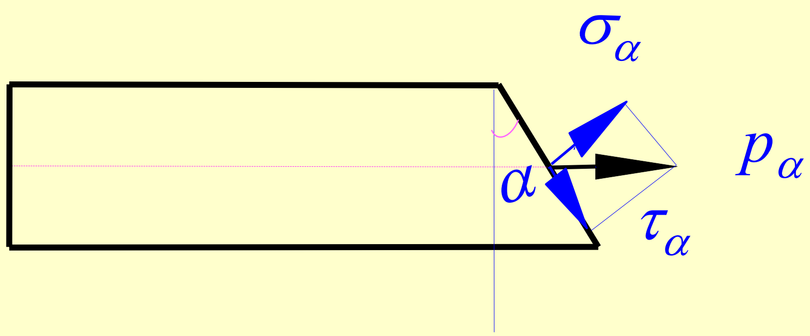
σ_0 为拉(压)杆横截面上($\alpha = 0$)的正应力。

总应力又可分解为斜截面上的正应力和切应力：



$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma_0 \cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \sigma_0 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{\sigma_0}{2}\sin 2\alpha$$

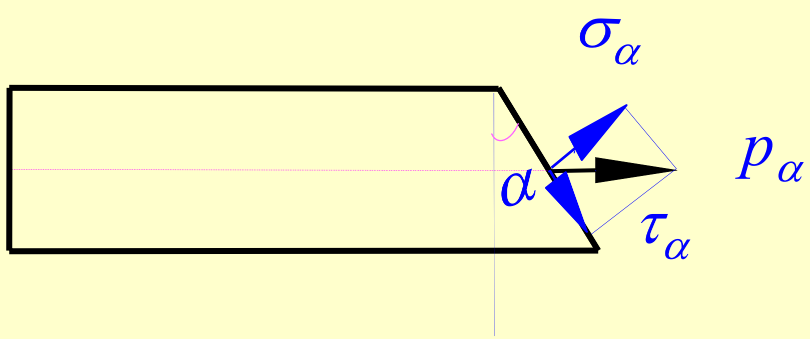


$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha$$

通过一点的所有不同方位截面上应力的全部情况，成为该点处的应力状态。

对于拉（压）杆，一点处的应力状态由其横截面上一点处正应力即可完全确定，这样的应力状态称为单向应力状态。



$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha$$

讨论：（1） $\alpha = 0$ $\sigma_{\max} = \sigma_0$ （横截面）

$\alpha = 90^\circ$ $\sigma_\alpha = 0$ （纵截面）

（2） $\alpha = 45^\circ$ $\tau_\alpha = \tau_{\max} = \sigma_0 / 2$

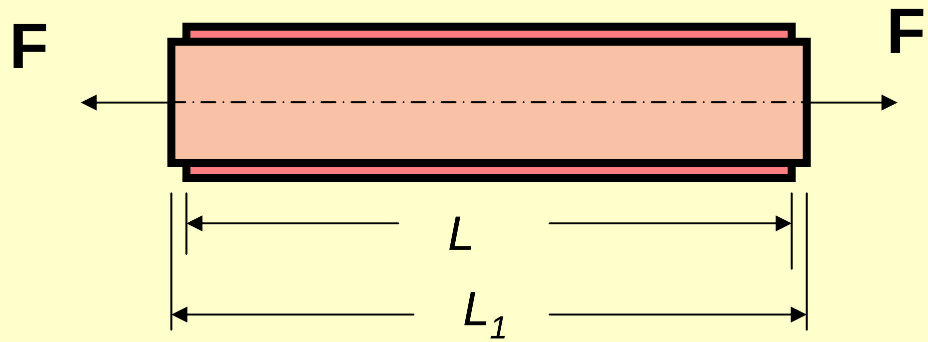
$\alpha = -45^\circ$ $\tau_\alpha = \tau_{\min} = -\sigma_0 / 2$

$\alpha = 0^\circ$ $\tau_\alpha = 0$ （横截面）

$\alpha = 90^\circ$ $\tau_\alpha = 0$ （纵截面）

§2-4 拉压杆的变形 胡克定律

一、 纵向变形



设杆件的原长为L,拉伸变形后的长度为L_1

杆件的纵向变形为 $\Delta l = l_1 - l$

线应变：每单位长度的伸长（缩短）量

纵向线应变

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

§2-4 拉压杆的变形 胡克定律

二、胡克定律：拉（压）杆变形量与受力的关系

$$\Delta l \propto \frac{Fl}{A}$$

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

引入比例常数E

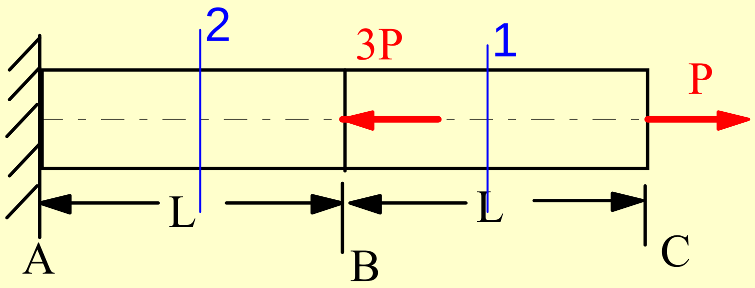
或写为 $\frac{F_N}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$

即 $\sigma = E\varepsilon$

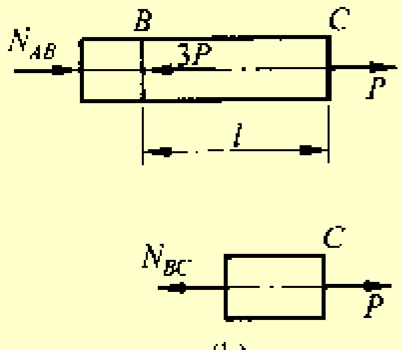
*E*为弹性摸量，*EA*为抗拉刚度

例题：

例1：试求图（a)所示均匀直杆的总变形，已知P=20kN, L=600mm, 横截面面积A=200mm²,材料的弹性模量E=210GPa.



(a)



(b)

解：1)求轴力　分别去1截面和

2截面的右段为研究对象

由 $\Sigma x = 0$

$P - N_{BC} = 0 \qquad N_{BC} = P$

$P - 3P + N_{AB} = 0 \quad N_{AB} = 2P$ (受压）

$N_{BC} = P$

$N_{AB} = 2P$ (受压)

2)求变形

AB段受压缩 $$\Delta L_{AB} = \frac{N_{AB}L}{EA} = \frac{-2PL}{EA}$$

BC段受拉伸 $$\Delta L_{BC} = \frac{N_{BC}L}{EA} = \frac{PL}{EA}$$

杆件的总变形 $$\Delta L = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC}$$

$$= -\frac{2PL}{EA} + \frac{PL}{EA}$$

$$= -\frac{PL}{EA}$$

§2-4 拉压杆的变形　胡克定律

三、 横向变形

横向变形　$\Delta b = b_1 - b$

其中：b为原有截面尺寸

b_1为拉压变形后的截面尺寸

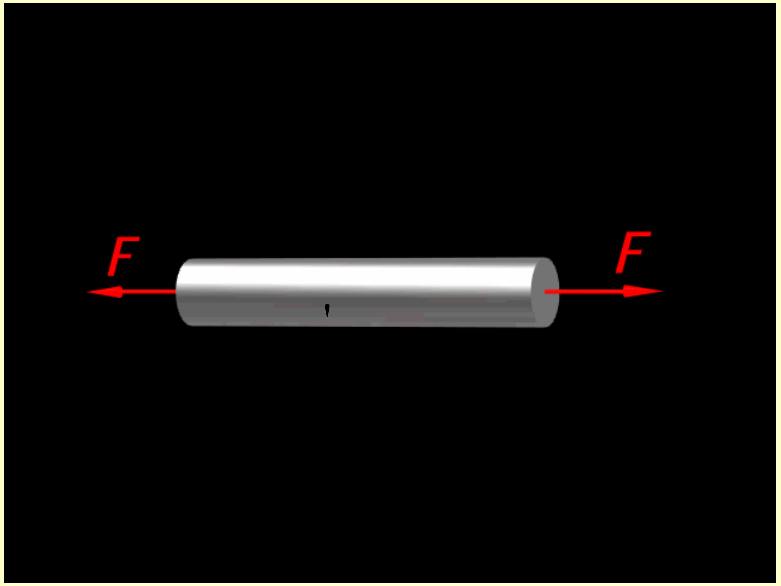
横向线应变　$\varepsilon' = \dfrac{\Delta b}{b}$

轴向线应变 ε 和横向线应变 ε' 的关系为：　$\varepsilon' = -\nu\varepsilon$

泊松比　$\nu = \left|\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$

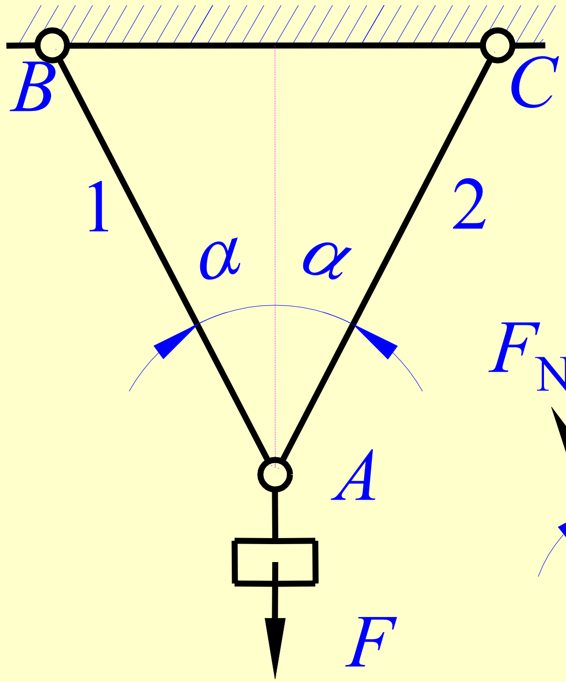
E 和 ν 是材料的弹性常数。

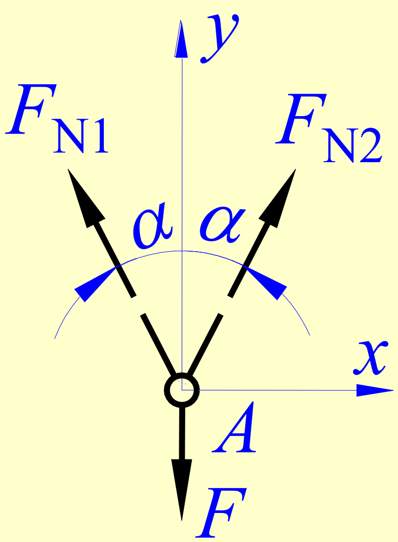
钢材的E约为200GPa，μ约为0.25—0.33



P_{19} 常见材料的弹性模量和泊松比

P20 例2-5 图示杆系，荷载 F=100kN，求结点$\boldsymbol{A}$的位移Δ_A。已知两杆均为长度l =2m，直径d =25mm的圆杆，α=30°，杆材(钢)的弹性模量E = 210GPa。





解：1、求两杆的轴力。

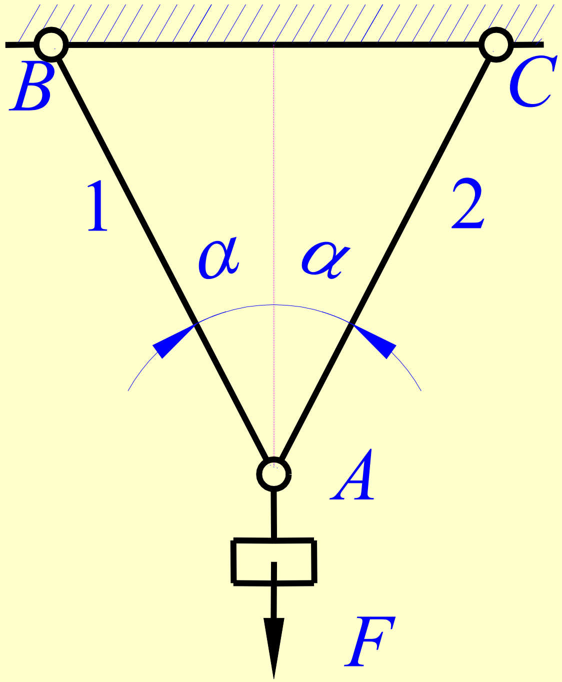
$$\sum F_x = 0 \qquad F_{N1} = F_{N2}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$2F_{N1}\cos\alpha = F$$

得

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F}{2\cos\alpha}$$



2、由胡克定律得两杆的伸长：

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{N1} l}{EA} = \frac{F_{N2} l}{EA}$$

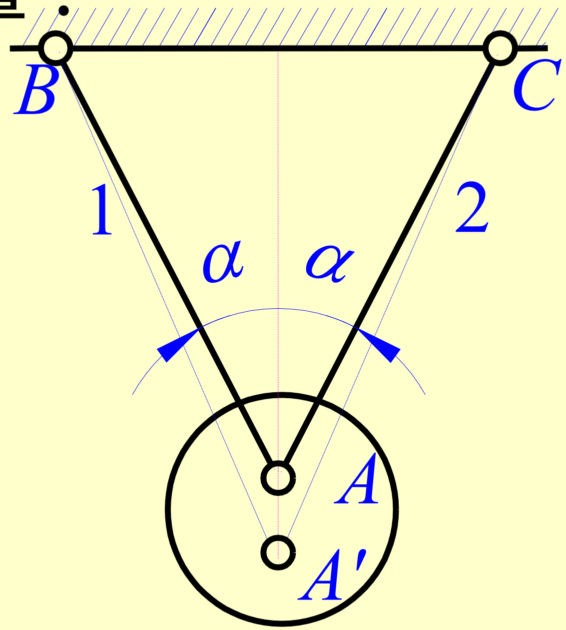
$$= \frac{Fl}{2EA\cos\alpha}$$

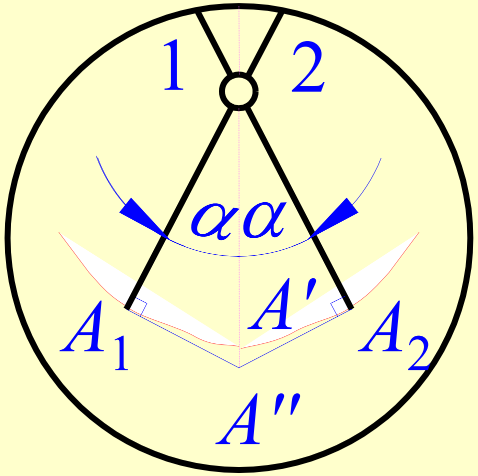
$$= \frac{2Fl}{E\pi d^2 \cos\alpha}$$

3、计算节点位移

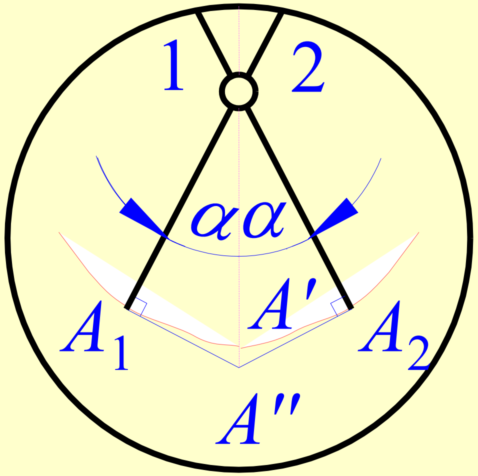
根据杆系结构及受力情况的对称性可知，结点**A**只有竖向位移。

关键步骤——如何确定杆系变形后结点A的位置？





此位置既应该符合两杆间的约束条件，又满足两杆的变形量要求。



由变形图即确定结点***A***的位移。由几何关系得

$$\overline{A}\overline{A}' = \frac{\overline{A}\overline{A}_1}{\cos\alpha} = \frac{\overline{A}\overline{A}_2}{\cos\alpha}$$

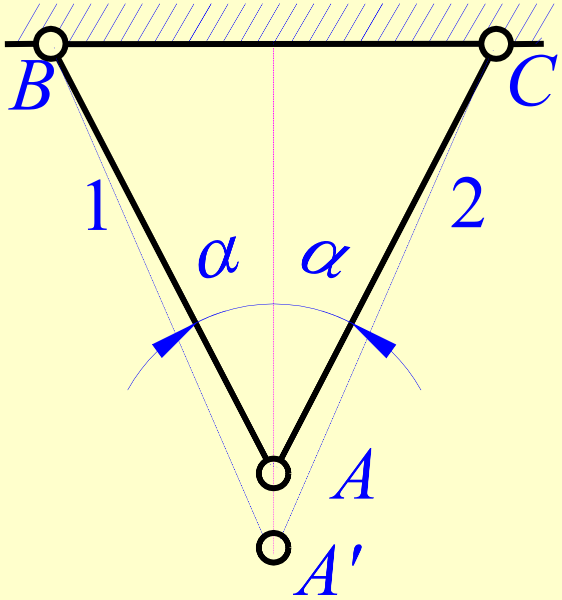
即

$$\varDelta_A = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} = \frac{\Delta l_2}{\cos\alpha} = \frac{2Fl}{E\pi d^2\cos^2\alpha}$$

代入数值得

$$\varDelta_A = \frac{2(100\times10^3\,\mathrm{N})(2\times10^3\,\mathrm{mm})}{(210\times10^3\,\mathrm{MPa})[\pi\times(25\mathrm{mm})^2]\cos^2 30^\circ}$$

$$=1.293\mathrm{mm}(\downarrow)$$



此例可以进一步加深对变形和位移两个概念的理解。

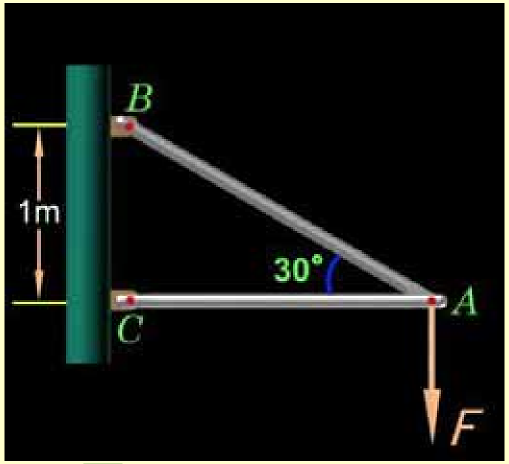
变形 ⟹ 杆件几何尺寸的改变，标量

位移 ⟹ 结点位置的移动，矢量

二者间的函数关系 ⟹ 与各杆件间的约束有关，实际是变形的几何相容条件。

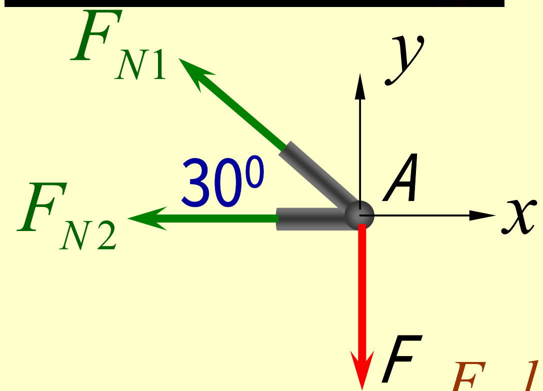
§2-4 拉压杆的变形　胡克定律

例题2-6



*AB*长2m，面积为200mm²。*AC*面积为250mm²。*E*=200GPa。*F*=10kN。试求节点*A*的位移。

解：1、计算轴力。（设斜杆为1杆，水平杆为2杆）取节点A为研究对象



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{N1}\cos\alpha + F_{N2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{N1}\sin\alpha - F = 0$$

$$F_{N1} = F/\sin\alpha = 2F = 20\text{kN}$$

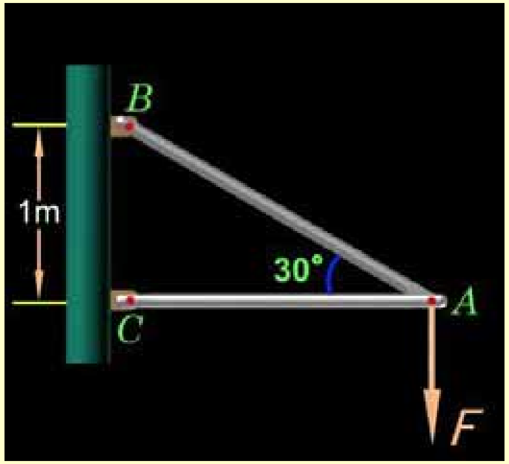
$$F_{N2} = -F_{N1}\cos\alpha = -\sqrt{3}F = -17.32\text{kN}$$

2、根据胡克定律计算杆的变形。

斜杆伸长 $\Delta l_1 = \dfrac{F_{N1}l_1}{E_1A_1} = \dfrac{20\times10^3\times2}{200\times10^9\times200\times10^{-6}} = 1\times10^{-3}\text{m} = 1\text{mm}$

水平杆缩短 $\Delta l_2 = \dfrac{F_{N2}l_2}{E_2A_2} = \dfrac{17.32\times10^3\times1.732}{200\times10^9\times250\times10^{-6}} = 0.6\times10^{-3}\text{m} = 0.6\text{mm}$

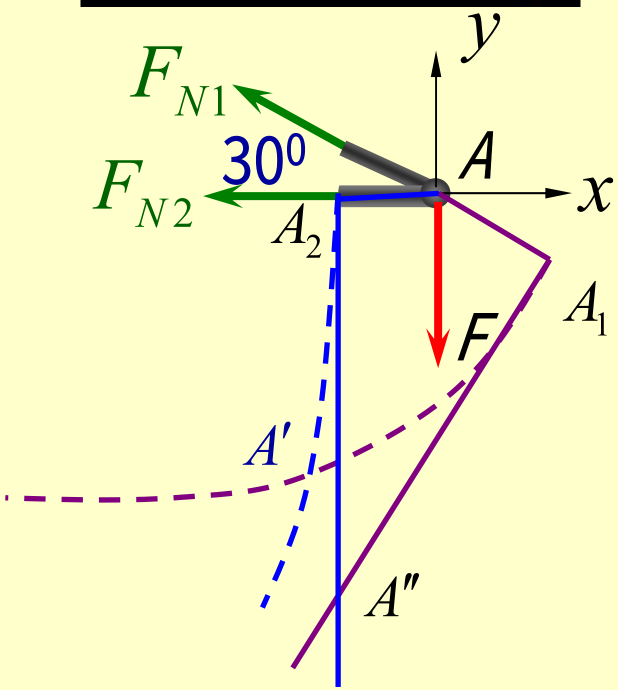
§ 2-4 拉压杆的变形　胡克定律

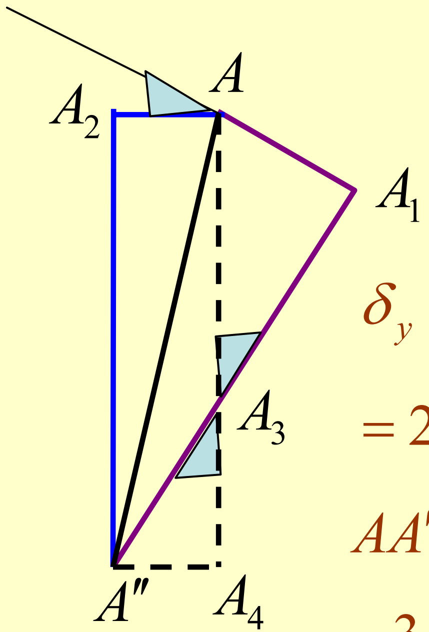


$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1} = 1\text{mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_{N2} l_2}{E_2 A_2} = 0.6\text{mm}$$

3、节点A的位移（以切代弧）





$$AA_1 = \Delta l_1 = 1\text{mm}$$

$$AA_2 = \Delta l_2 = 0.6\text{mm}$$

$$\delta_x = \Delta l_2 = 0.6\text{mm}$$

$$\delta_y = AA_3 + A_3A_4 = \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} + \frac{\Delta l_2}{\tan 30^\circ}$$

$$= 2 + 1.039 = 3.039\text{mm}$$

$$AA'' = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} = \sqrt{0.6^2 + 3.039^2}$$

$$= 3.1\text{mm}$$

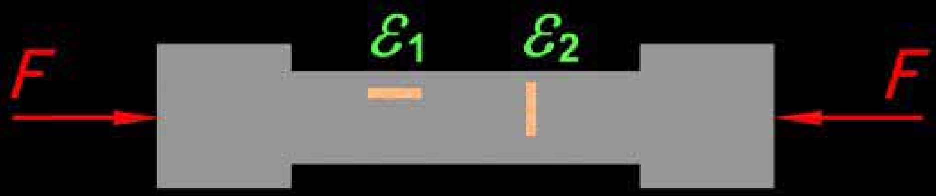
§2-4 拉压杆的变形　胡克定律

讨论题

在板状试件的表面上，沿纵向和横向粘贴两个应变片 ε_1 和 ε_2，在 F 力作用下，若测得 $\varepsilon_1=-120\times10^{-6}$，$\varepsilon_2=40\times10^{-6}$，则该试件材料的泊松比是 C 。

(A) $\nu=3$；　　(B) $\nu=-3$；

(C) $\nu=1/3$；　(D) $\nu=-1/3$。



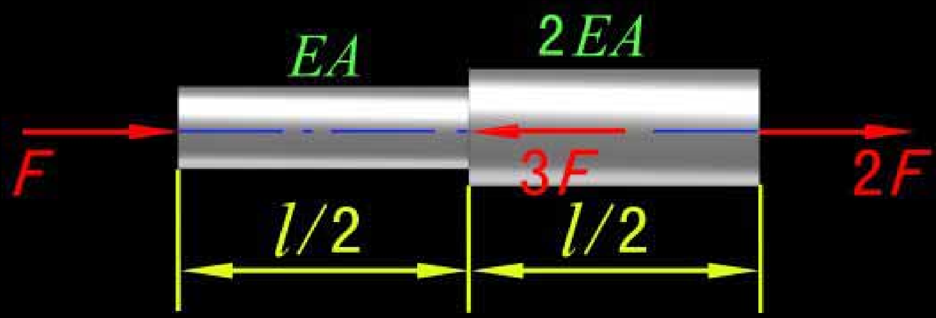
目录

§2-4 拉压杆的变形　胡克定律

讨论题

图示阶梯形杆总变形 $\Delta l =$ <u>A</u> 。

（A）0　（B）$\dfrac{Fl}{2EA}$　（C）$\dfrac{Fl}{EA}$　（D）$\dfrac{3Fl}{2EA}$

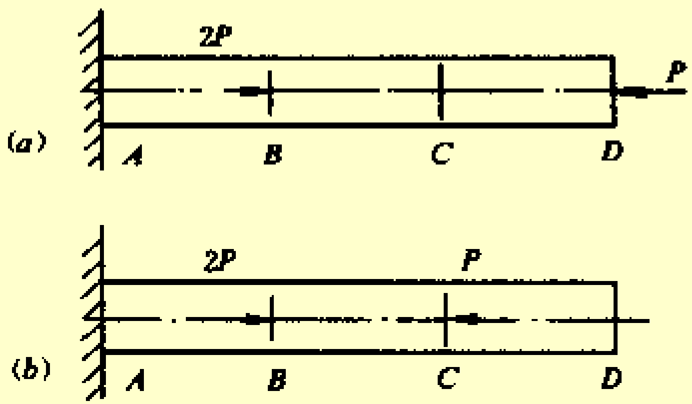


思考题一

若将图(a)中的 P 力由 D 截面移到 C 截面(图 b),则有(　　　)。

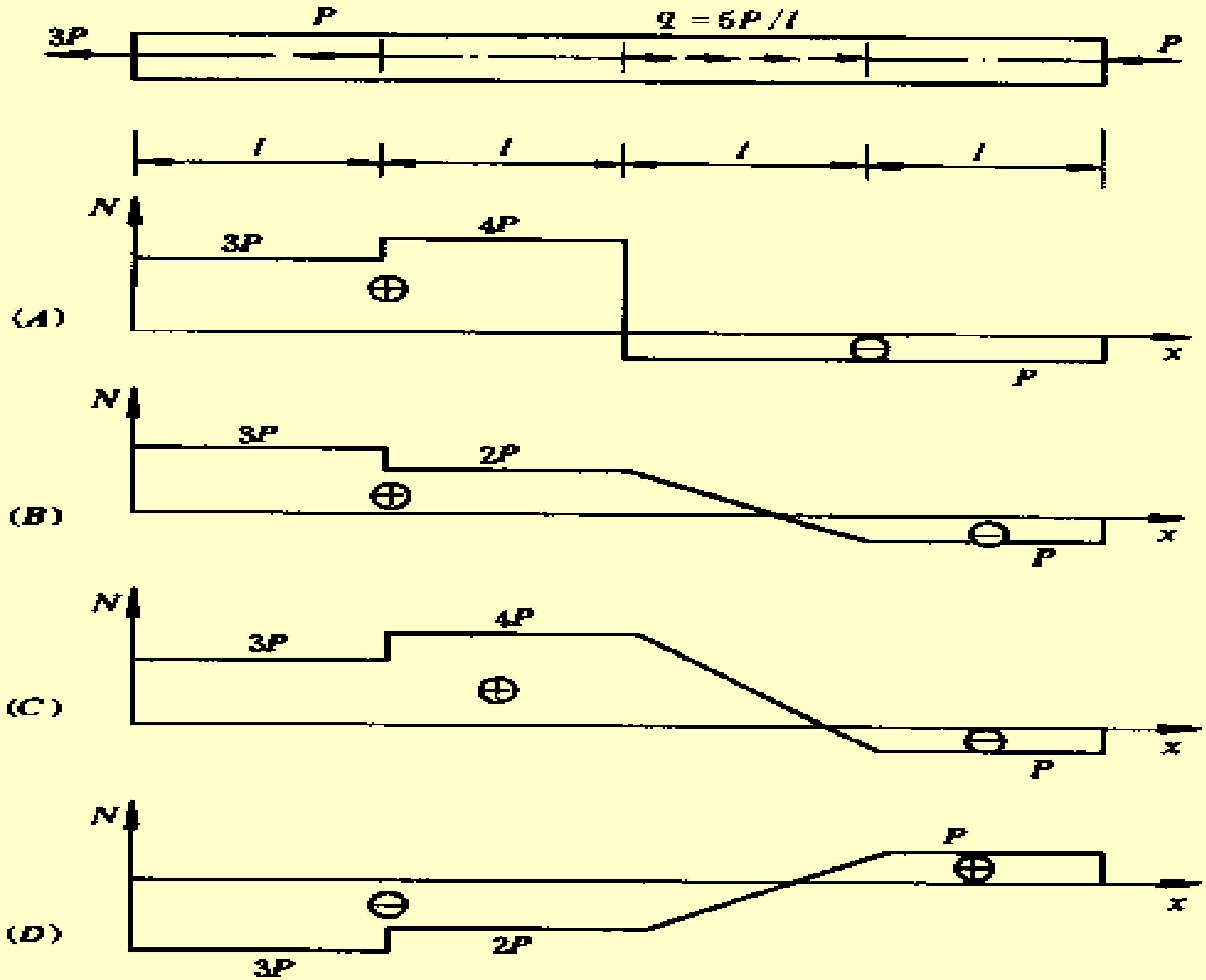
(A) 整个杆的轴力都不变化　(B) AB 段的轴力不变,BC 段、CD 段的轴力变为零

(C) AB、BC 段轴力不变,CD 段轴力变为零　　(D) A 端的约束反力发生变化



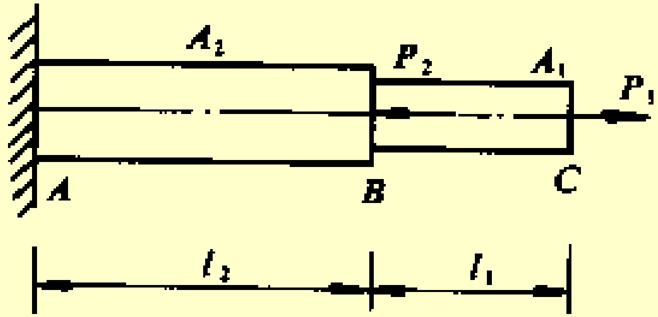
等直杆受力如图所示，其轴力图应是(　　　)。

思考题二



思考题三

变截面杆受力如图，已知P_1＝20kN,P_2=40kN,L_1=300mm, L_2=500mm，横截面面积A_1=100mm^2，A_2=200mm^2,弹性模量E=200GPa。



（1）杆件的总变形量是(　　　　)。

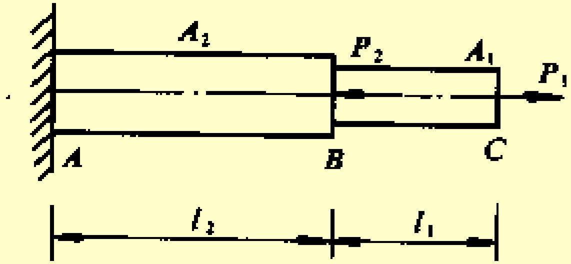
$$(A)\ \Delta l=\frac{P_1 l_1}{EA_1}+\frac{P_2 l_2}{EA_2}=\frac{20\times10^3\times300}{200\times10^3\times100}+\frac{40\times10^3\times500}{200\times10^3\times200}=0.8\text{mm(伸长)}$$

$$(B)\ \Delta l=\frac{P_1 l_1}{EA_1}-\frac{P_2 l_2}{EA_2}=\frac{20\times10^3\times300}{200\times10^3\times100}-\frac{40\times10^3\times500}{200\times10^3\times200}=-0.2\text{mm(缩短)}$$

$$(C)\ \Delta l=\frac{P_1 l_1}{EA_1}-\frac{(P_2-P_1) l_2}{EA_2}=\frac{20\times10^3\times300}{200\times10^3\times100}-\frac{20\times10^3\times500}{200\times10^3\times200}=0.05\text{mm(伸长}$$

$$(D)\ \Delta l=\frac{P_1 l_1}{EA_1}+\frac{(P_2-P_1) l_2}{EA_2}=\frac{20\times10^3\times300}{200\times10^3\times100}+\frac{20\times10^3\times500}{200\times10^3\times200}=0.55\text{mm(伸长}$$

变截面杆受力如图，已知P_1＝20kN,P_2=40kN,L_1=300mm, L_2=500mm, 横截面面积$A_1=100mm^2$, $A_2=200mm^2$,弹性模量E=200GPa。



(2) 由上面解题过程知 AB 段的缩短变形 $\Delta l_2=-0.25$mm，BC 段的伸长变形 Δl_1 0.3mm，则 C 截面相对 B 截面的位移是(　　　)。

(A) $\delta_{BC}=\Delta l_1+|\Delta l_2|=0.55$mm　　(B) $\delta_{BC}=\Delta l_1=0.3$mm($\leftarrow\rightarrow$)

(C) $\delta_{BC}=\Delta l_1+\Delta l_2=0.05$mm　　(D) $\delta_{BC}=0$

(3) C 截面的位移是(　　　)。

(A) $\delta_C=\Delta l_1=0.3$mm　　(B) $\delta_C=\Delta l_1-\Delta l_2=0.55$n

(C) $\delta_C=\Delta l_1+\Delta l_2=0.05$mm($\rightarrow$)　　(D) $\delta_C=0$

作业题

P_{53}　2-5，2-7，2-11

再见！