

一类扩展结构大系统的分散有限时间鲁棒关联镇定

李小华¹, 刘洋¹, 刘晓平^{1,2}

(1. 辽宁科技大学 电子与信息工程学院, 辽宁 鞍山 114051; 2. 湖首大学 电子工程系, 桑德贝 P7B 5E1)

摘要: 研究一类扩展结构大系统分散有限时间鲁棒关联镇定问题. 扩展结构大系统是在原结构系统上增加新子系统而构成的, 在原系统分散控制律确定不变的情况下, 设计新加入子系统的鲁棒分散控制律, 使扩展后的系统仍能保持有限时间关联稳定. 利用LMI方法推导此类系统基于状态反馈和输出反馈的分散有限时间关联镇定的充分条件, 并给出扩展子系统的相应控制器的设计方法. 最后通过仿真实验表明了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 有限时间镇定; 扩展结构大系统; 鲁棒关联稳定性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Decentralized finite-time robust connective stabilization for a class of large-scale systems with expanding construction

LI Xiao-hua¹, LIU Yang¹, LIU Xiao-ping^{1,2}

(1. School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China; 2. Department of Electrical Engineering, Lakehead University, Thunder Bay P7B 5E1, Canada. Correspondent: LI Xiao-hua, E-mail: lixiaohua6412@163.com)

Abstract: The decentralized finite-time robust connective stabilization problem for a class of large-scale systems with expanding construction is studied. These large-scale systems with the expanding construction are the systems constituted by adding new subsystems on the original ones. The problem is to design the robust decentralized control law of the newly added subsystem on the basis of not changing the decentralized control laws of original construction, so that the expanded system can keep finite-time connective stability. The sufficient conditions of the decentralized finite-time connective stabilization for this kind of systems are deduced by using LMI method, which is based on state feedback and output feedback. And the design method of corresponding controller for expanding subsystem is given. Simulation results show the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: finite-time stabilization; large-scale systems with expanding construction; robust connective stability; LMI

0 引言

在实际工程中, 对于工作时间短暂的系统, 如导弹系统、通信网络系统、机器人操控系统等, 暂态性能尤其重要. 为了研究系统的暂态性能, Dorato^[1]于1961年提出了有限时间稳定性的概念. 目前, 关于有限时间稳定性的控制问题已有较多研究成果^[2-7], 这些文献分别研究了基于状态反馈、输出反馈的线性系统有限时间镇定问题和切换系统、非线性时变系统、随机非线性系统和非线性随机不确定系统的有限时间控制问题. 文献[8-9]进一步研究了互联线性和非线性系统的分散有限时间镇定问题. 然而, 研究扩展结构大系统的有限时间关联镇定问题的相关报道

则较少.

本文将有限时间稳定性和关联稳定性的概念引入到扩展结构大系统分散控制设计中. 对于扩展结构大系统的分散有限时间关联稳定控制设计, 由于扩展前原系统的分散控制律已定, 要求在不改变原系统分散控制律的基础上设计大系统扩展结构的分散有限时间关联稳定控制律, 使得原系统和扩展后的大系统均是有限时间稳定且关联稳定的. 利用LMI方法, 设计了大系统扩展结构的分散状态反馈和输出反馈控制器, 并通过仿真算例表明了所提出方法的有效性.

1 扩展结构大系统数学描述及相关定义

考虑一类扩展结构大系统^[10], 结构如图1所示.

收稿日期: 2014-09-04; 修回日期: 2014-12-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273011); 国家青年科学基金项目(61403177).

作者简介: 李小华(1964—), 女, 教授, 博士, 从事复杂系统结构与控制、工业过程建模与控制等研究; 刘洋(1988—), 男, 硕士生, 从事复杂系统结构与控制的研究.

其中: \bar{S}_{N-1} 为由 $N-1$ 个子系统构成的原系统, S_N 为新加入的第 N 个子系统; $\bar{v}_{N-1} = (v_1, v_2, \dots, v_{N-1})^T$ 和 $\bar{w}_{N-1} = (w_1, w_2, \dots, w_{N-1})^T$ 分别为原系统间各子系统互联的输入和输出; v_N 和 w_N 为新加入子系统的互联输入和输出.

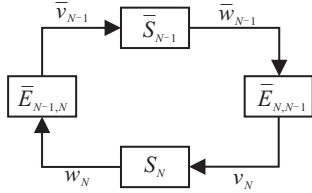


图 1 扩展结构大系统数学模型

考虑原系统 \bar{S}_{N-1} , 其数学描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + G_i v_i(t), \\ y_i(t) &= C_i x_i(t), \\ w_i(t) &= H_i x_i(t), \\ v_i(t) &= \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} E_{ij} w_j(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x_i(t) \in R^{n_i}$ 、 $u_i(t) \in R^{s_i}$ 、 $y_i(t) \in R^{l_i}$ 分别为第 i 个子系统的状态、控制输入和输出, 且 $i = 1, 2, \dots, N-1$; A_i 、 B_i 、 C_i 、 G_i 、 H_i 为一定维数的常数矩阵. 原系统间的关联矩阵 \bar{E}_{N-1} 可以表示为

$$\bar{E}_{N-1} = \begin{bmatrix} 0 & E_{12} & \cdots & E_{1,N-1} \\ E_{21} & 0 & \cdots & E_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{N-1,1} & E_{N-1,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

其中 E_{ij} 为第 j 个子系统和第 i 个子系统间的互联, $E_{ij} = 1$ 为有互联, $E_{ij} = 0$ 为无互联.

由式 (1) 可得到原系统 \bar{S}_{N-1} 的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}}_{N-1}(t) &= \bar{A}_{N-1} \bar{X}_{N-1}(t) + \bar{B}_{N-1} \bar{u}_{N-1}(t) + \\ &\quad \bar{G}_{N-1} \bar{v}_{N-1}(t), \\ \bar{y}_{N-1}(t) &= \bar{C}_{N-1} \bar{X}_{N-1}(t), \\ \bar{w}_{N-1}(t) &= \bar{H}_{N-1} \bar{X}_{N-1}(t). \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_{N-1} &= \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_{N-1}), \\ \bar{B}_{N-1} &= \text{diag}(B_1, B_2, \dots, B_{N-1}), \\ \bar{C}_{N-1} &= \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_{N-1}), \\ \bar{G}_{N-1} &= \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_{N-1}), \\ \bar{H}_{N-1} &= \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_{N-1}). \end{aligned}$$

现在加入第 N 个子系统, 其数学描述为式 (1) 中 $i = N$ 的情况. $v_N(t) = \bar{E}_{N,N-1} \bar{w}_{N-1}(t)$ 为原系统对新加入的第 N 个子系统的影响, $\bar{v}_{N-1}(t) = \bar{E}_{N-1,N} w_N(t)$ 表示新加入的第 N 个子系统对原系统的影响, $\bar{E}_{N-1,N} = [E_{1N}, E_{2N}, \dots, E_{N-1,N}]^T$, $\bar{E}_{N,N-1} =$

$[E_{N1}, E_{N2}, \dots, E_{N,N-1}]$. 将原系统与新加子系统合写为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}}_{N-1}(t) &= \bar{A}_{N-1} \bar{X}_{N-1}(t) + \bar{B}_{N-1} \bar{u}_{N-1}(t) + \\ &\quad \bar{h}(t, \bar{X}_{N-1}(t), x_N(t), E), \\ \dot{x}_N(t) &= A_N x_N(t) + B_N u_N(t) + \\ &\quad h(t, \bar{X}_{N-1}(t), x_N(t), E). \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{h}(t, \bar{X}_{N-1}(t), x_N(t), E) &= \bar{h}(t) = \\ &\quad \bar{G}_{N-1} \bar{E}_{N-1} \bar{H}_{N-1} \bar{X}_{N-1}(t) + \bar{G}_{N-1} \bar{E}_{N-1,N} H_N x_N(t), \\ h(t, \bar{X}_{N-1}(t), x_N(t), E) &= h(t) = \\ &\quad G_N \bar{E}_{N,N-1} \bar{H}_{N-1} \bar{X}_{N-1}(t). \end{aligned}$$

将式 (3) 改写为紧缩形式为

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} \hat{u}(t) + \hat{h}(t, \hat{x}(t), E). \quad (4)$$

其中

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_N \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_N \end{bmatrix},$$

$$\hat{h}(t, \hat{x}(t), E) = [\bar{h}^T(t), h^T(t)]^T,$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{X}_{N-1}(t) \\ x_N(t) \end{bmatrix} =$$

$$[x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_{N-1}^T(t), x_N^T(t)]^T.$$

考虑系统 (4) 加入扰动, 系统数学模型可写为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \\ &\quad \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} \hat{u}(t) + \hat{\Gamma} \hat{\omega}(t) + \hat{h}(t, \hat{x}(t), E), \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\hat{\omega}(t) = [\omega_1^T(t), \omega_2^T(t), \dots, \omega_{N-1}^T(t), \omega_N^T(t)]^T.$$

针对扩展结构大系统 (4) 和 (5), 给出如下定义.

定义 1 对于任意的 $E_{ij} (i = 1, 2, \dots, N)$, 如果扩展结构大系统 (4) 满足

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^T R \hat{x}_0 \leq c_1 \Rightarrow \hat{x}^T(t) R \hat{x}(t) < c_2, \\ \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

则称系统 (4) 关于 $(c_1, c_2, T, R_1, \dots, R_N)$ 是有限时间关联稳定的 (FTCS). 其中: $0 < c_1 < c_2$, $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$, $R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_N)$ 为适当维数的正定矩阵.

定义 2 对于任意的 $E_{ij} (i = 1, 2, \dots, N)$ 和一切 $\omega_i(t)$, 如果系统 (5) 满足

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^T R \hat{x}_0 \leq c_1 \Rightarrow \hat{x}^T(t) R \hat{x}(t) < c_2, \\ \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

则称该系统关于 $(c_1, c_2, \omega_1, \dots, \omega_N, T, R_1, \dots, R_N)$ 是有限时间关联有界的 (FTCB). 其中: $0 < c_1 < c_2$, $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$, $R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_N)$ 为适当维数的正定矩阵.

2 基于状态反馈的分散有限时间关联镇定

在给出设计结果之前, 作如下假设.

假设 1 互联项 $\hat{h}(t, \hat{x}(t), E)$ 满足二次约束

$$\hat{h}^T(t, \hat{x}(t), E)\hat{h}(t, \hat{x}(t), E) \leq \hat{\beta}^2 \hat{x}^T(t)\hat{H}^T\hat{H}\hat{x}(t). \quad (6)$$

其中: $\hat{\beta} > 0$ 为互联的界, $\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1 & \hat{q}_2 \\ \hat{q}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 为互联约束矩阵.

假设 2 原系统为有限时间关联稳定且控制律已定.

对新加入子系统进行控制设计, 主要结果如下.

定理 1 若存在非负常数 $\alpha, \hat{\gamma}$ 、正定矩阵 Y_N 和矩阵 M_N , 使得如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{N-1} & \mathbf{0} & \bar{P}_{N-1} & \mathbf{0} & \hat{q}_1^T & \hat{q}_3^T \\ \mathbf{0} & \tilde{\Lambda}_N & \mathbf{0} & I & Y_N \hat{q}_2^T & \mathbf{0} \\ \bar{P}_{N-1} & \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{q}_1 & \hat{q}_2 Y_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\gamma} I & \mathbf{0} \\ \hat{q}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\gamma} I \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \frac{c_2}{c_1} e^{-\alpha T}, \quad (8)$$

则分散状态反馈控制 $u_N(t) = K_N x_N(t)$, 使得系统 (4) 是有限时间鲁棒关联稳定的, 控制律为

$$K_N = M_N Y_N^{-1}.$$

其中

$$\bar{\Lambda}_{N-1} = \hat{A}_{N-1}^T \bar{P}_{N-1} + \bar{P}_{N-1} \hat{A}_{N-1} - \alpha \bar{P}_{N-1},$$

$$\tilde{\Lambda}_N = Y_N A_N^T + A_N Y_N + M_N^T B_N^T + B_N M_N - \alpha Y_N,$$

$$\hat{\beta}^2 = \frac{1}{\hat{\gamma}}, \hat{P}_N = Y_N^{-1},$$

$$\bar{P}_{N-1} = \text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_{N-1}),$$

$$\lambda_1 = \min_{1 \leq i \leq N} \{\lambda_{\min}(P_i)\}, \lambda_2 = \max_{1 \leq i \leq N} \{\lambda_{\max}(P_i)\},$$

$\lambda_{\min}(P_i)$ 和 $\lambda_{\max}(P_i)$ 分别为 P_i 的最小和最大特征值, 且 $P_N = R_N^{-1/2} \hat{P}_N R_N^{-1/2}$.

证明 构建系统 (4) 带状态反馈 $\hat{u}(t) = \hat{K} \hat{x}(t)$ 的闭环系统, 有

$$\hat{\dot{x}}(t) = (\hat{A} + \hat{B} \hat{K}) \hat{x}(t) + \hat{h}(t, \hat{x}(t), E) =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A}_N \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \hat{h}(t, \hat{x}(t), E) =$$

$$\hat{\hat{A}} \hat{x}(t) + \hat{h}(t, \hat{x}(t), E). \quad (9)$$

其中

$$\hat{K} = \text{diag}(\bar{K}_{N-1}, K_N),$$

$$\hat{A}_{N-1} = \bar{A}_{N-1} + \bar{B}_{N-1} \bar{K}_{N-1},$$

$$\hat{A}_N = A_N + B_N K_N.$$

针对系统 (9), 选择如下的二次能量函数:

$$V(\hat{x}(t)) = \hat{x}^T(t) \hat{P} \hat{x}(t).$$

其中

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{P}_N \end{bmatrix} = \text{diag}(\hat{P}_1, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_{N-1}, \hat{P}_N).$$

由文献 [11] 可知

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) < \alpha V(\hat{x}(t)), \quad (10)$$

将式 (10) 改写为矩阵不等式的形式, 有

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{h}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{A}^T \hat{P} + \hat{P} \hat{A} - \alpha \hat{P} & \hat{P} \\ \hat{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{h}(t) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (11)$$

将式 (6) 改写为矩阵不等式的形式, 有

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{h}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\hat{\beta}^2 \hat{H}^T \hat{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{h}(t) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (12)$$

运用 S-过程 和 Schur 补引理, 有

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^T \hat{P} + \hat{P} \hat{A} - \alpha \hat{P} & \hat{P} & \hat{H}^T \\ \hat{P} & -\tau I & \mathbf{0} \\ \hat{H} & \mathbf{0} & -\hat{\gamma} I \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (13)$$

其中: $\hat{\gamma} = 1/\hat{\beta}^2, \tau = 1$. 有

$$\hat{A}^T \hat{P} + \hat{P} \hat{A} - \alpha \hat{P} = \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_N \end{bmatrix}.$$

其中

$$\bar{\Lambda}_{N-1} = \hat{A}_{N-1}^T \bar{P}_{N-1} + \bar{P}_{N-1} \hat{A}_{N-1} - \alpha \bar{P}_{N-1},$$

$$\Lambda_N = A_N^T \hat{P}_N + \hat{P}_N A_N + K_N^T B_N^T \hat{P}_N +$$

$$\hat{P}_N B_N K_N - \alpha \hat{P}_N.$$

将式 (13) 改写为如下形式:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{N-1} & \mathbf{0} & \bar{P}_{N-1} & \mathbf{0} & \hat{q}_1^T & \hat{q}_3^T \\ \mathbf{0} & \Lambda_N & \mathbf{0} & \hat{P}_N & \hat{q}_2^T & \mathbf{0} \\ \bar{P}_{N-1} & \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{P}_N & \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{q}_1 & \hat{q}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\gamma} I & \mathbf{0} \\ \hat{q}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\gamma} I \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (14)$$

式 (14) 两边同时乘以 $\Delta = \text{diag}(I, \hat{P}_N^{-1}, I, I, I, I)$, 令 $Y_N = \hat{P}_N^{-1}, M_N = K_N Y_N$, 则可得式 (7) 结果.

对式 (10) 从 0 到 t 积分, 得到

$$V(\hat{x}(t)) < V(\hat{x}(0)) e^{\alpha t}. \quad (15)$$

由正定二次型的性质, 可知

$$V(\hat{x}(t)) = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^T(t) \hat{P}_i \hat{x}_i(t) = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^T(t) R_i^{1/2} P_i R_i^{1/2} \hat{x}_i(t) \geq \sum_{i=1}^N \lambda_{\min}(P_i) \hat{x}_i^T(t) R_i \hat{x}_i(t) \geq \lambda_1 \hat{x}^T(t) R \hat{x}(t), \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 V(\hat{x}(0))e^{\alpha t} &= e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^T(0) \hat{P}_i \hat{x}_i(0) = \\
 e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^T(0) R_i^{1/2} P_i R_i^{1/2} \hat{x}_i(0) &\leq \\
 e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N \lambda_{\max}(P_i) \hat{x}_i^T(0) R_i \hat{x}_i(0) &\leq \lambda_2 c_1 e^{\alpha T}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

由式(8)、(15)~(17)得到 $\hat{x}^T(t)R\hat{x}(t) < c_2, \forall t \in [0, T]$ 成立.

由于表示结构关联的 E_{ij} 从 1 变为 0 或从 0 变为 1 时, 系统互联的变化仍在所约束限制的范围内, 该结果是分散有限时间鲁棒关联稳定的. \square

3 基于输出反馈的分散有限时间关联镇定

3.1 基于状态观测器的扩展结构大系统建模

针对系统(1), 设其状态观测器为

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{x}}_i(t) &= A_i \tilde{x}_i(t) + B_i u_i(t) + L_i(C_i x_i(t) - \\
 &\quad C_i \tilde{x}_i(t)), \\
 u_i(t) &= K_i \tilde{x}_i(t), \tilde{x}_i(0) = 0, \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N-1$.

令 $e_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i(t)$, 则有

$$\dot{x}_i(t) = (A_i + B_i K_i)x_i(t) - B_i K_i e_i(t) + G_i v_i(t), \quad (19)$$

$$\dot{e}_i(t) = (A_i - L_i C_i)e_i(t) + G_i v_i(t), e_i(0) = 0. \quad (20)$$

将 $N-1$ 个子系统写成闭环形式为

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \dot{\bar{X}}_{N-1}(t) \\ \dot{\bar{e}}_{N-1}(t) \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} \bar{A}_{N-1} + \bar{B}_{N-1}\bar{K}_{N-1} + \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1}\bar{H}_{N-1} & \rightarrow \\ \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1}\bar{H}_{N-1} & \\ \leftarrow & -\bar{B}_{N-1}\bar{K}_{N-1} \\ \bar{A}_{N-1} - \bar{L}_{N-1}\bar{C}_{N-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_{N-1}(t) \\ \bar{e}_{N-1}(t) \end{bmatrix}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

加入第 N 个子系统后, 由关联关系得闭环大系统模型

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \dot{\bar{X}}_{N-1}(t) \\ \dot{\bar{e}}_{N-1}(t) \\ \dot{\bar{x}}_N(t) \\ \dot{\bar{e}}_N(t) \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} \bar{A}_{N-1} + \bar{B}_{N-1}\bar{K}_{N-1} & -\bar{B}_{N-1}\bar{K}_{N-1} & & \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{N-1} - \bar{L}_{N-1}\bar{C}_{N-1} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_{N-1}(t) \\ \bar{e}_{N-1}(t) \\ \bar{x}_N(t) \\ \bar{e}_N(t) \end{bmatrix} + \\
 &\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\ A_N + B_N K_N & -B_N K_N & & \\ \mathbf{0} & A_N - L_N C_N & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_{N-1}(t) \\ \bar{e}_{N-1}(t) \\ \bar{x}_N(t) \\ \bar{e}_N(t) \end{bmatrix} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1}\bar{H}_{N-1} & \mathbf{0} & \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1,N}H_N & \mathbf{0} \\ \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1}\bar{H}_{N-1} & \mathbf{0} & \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1,N}H_N & \mathbf{0} \\ G_N\bar{E}_{N,N-1}\bar{H}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ G_N\bar{E}_{N,N-1}\bar{H}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{X}_{N-1}(t) \\ \bar{e}_{N-1}(t) \\ \bar{x}_N(t) \\ \bar{e}_N(t) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

将式(22)写成如下闭环形式:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{z}}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{A}_N \end{bmatrix} \bar{z}(t) + \bar{h}(t, \bar{z}(t), E) = \\
 &\bar{A}\bar{z}(t) + \bar{h}(t, \bar{z}(t), E). \quad (23)
 \end{aligned}$$

其中

$$\bar{z}(t) = [\bar{X}_{N-1}^T(t), \bar{e}_{N-1}^T(t), \bar{x}_N^T(t), \bar{e}_N^T(t)]^T,$$

$$\hat{A}_{N-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{N-1} + \bar{B}_{N-1}\bar{K}_{N-1} & -\bar{B}_{N-1}\bar{K}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{N-1} - \bar{L}_{N-1}\bar{C}_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_N = \begin{bmatrix} A_N + B_N K_N & -B_N K_N \\ \mathbf{0} & A_N - L_N C_N \end{bmatrix},$$

$$\bar{h}(t, \bar{z}(t), E) =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1}\bar{H}_{N-1} & \mathbf{0} & \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1,N}H_N & \mathbf{0} \\ \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1}\bar{H}_{N-1} & \mathbf{0} & \bar{G}_{N-1}\bar{E}_{N-1,N}H_N & \mathbf{0} \\ G_N\bar{E}_{N,N-1}\bar{H}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ G_N\bar{E}_{N,N-1}\bar{H}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{z}(t).$$

3.2 主要结果

定理 2 若存在非负常数 α, γ 、正定矩阵 \bar{Y}_{N1} 、 \bar{Q}_{N2} 、矩阵 Φ_N 和 N_N , 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \bar{A}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{Q}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \bar{\Lambda}_{N1} & \bar{\Lambda}_{N2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Lambda}_{N3} & \bar{\Lambda}_{N4} & \mathbf{0} \\ \bar{Q}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{Q}_{N2} & \mathbf{0} \\ \bar{q}_1 & \bar{q}_2 \bar{Y}_{N1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{q}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{q}_1^T & \bar{q}_3^T \\ I & \mathbf{0} & \bar{Y}_{N1} \bar{q}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{Q}_{N2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \leftarrow & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$c_1(\lambda_4 + \lambda_5) \leq \lambda_3 c_2 e^{-\alpha T}, \quad (25)$$

则系统 (23) 是分散有限时间鲁棒关联稳定的, 控制律和观测器增益矩阵为

$$K_N = \Phi_N \bar{Y}_{N1}^{-1}, L_N = \bar{Q}_{N2}^{-1} N_N.$$

其中

$$\bar{A}_{N-1} = \hat{A}_{N-1}^T \bar{Q}_{N-1} + \bar{Q}_{N-1} \hat{A}_{N-1} - \alpha \bar{Q}_{N-1},$$

$$\bar{A}_{N1} =$$

$$\bar{Y}_{N1} A_N^T + A_N \bar{Y}_{N1} + \bar{Y}_{N1} \Phi_N^T + \Phi_N \bar{Y}_{N1} - \alpha \bar{Y}_{N1},$$

$$\bar{A}_{N2} = -B_N K_N, \bar{A}_{N3} = -K_N^T B_N^T,$$

$$\bar{A}_4 = A_N^T \bar{Q}_{N2} + \bar{Q}_{N2} A_N - C_N^T N_N^T - N_N C_N,$$

$$\bar{Q}_{N-1} = \text{diag}(\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \dots, \bar{Q}_{N-1,1}, \bar{Q}_{N-1,2}),$$

$$\lambda_3 = \min_{1 \leq i \leq N} \{\lambda_{\min}(Q_{i1})\},$$

$$\lambda_4 = \max_{1 \leq i \leq N} \{\lambda_{\max}(Q_{i1})\},$$

$$\lambda_5 = \max_{1 \leq i \leq N} \{\lambda_{\max}(Q_{i2})\}.$$

$\lambda_{\min}(Q_{i1})$ 、 $\lambda_{\max}(Q_{i1})$ 和 $\lambda_{\max}(Q_{i2})$ 分别为 Q_{i1} 的最小、最大特征值和 Q_{i2} 的最大特征值, 且有

$$Q_{N1} = R_N^{-1/2} \bar{Q}_{N1} R_N^{-1/2},$$

$$Q_{N2} = R_N^{-1/2} \bar{Q}_{N2} R_N^{-1/2}.$$

证明 针对系统 (23), 选择二次能量函数

$$V(\bar{z}(t)) = \bar{z}^T(t) \bar{Q} \bar{z}(t).$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_N \end{bmatrix} =$$

$$\text{diag}(Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{N-1,1}, Q_{N-1,2}, Q_{N1}, Q_{N2}).$$

由文献 [11] 可知

$$\dot{V}(\bar{z}(t)) < \alpha V(\bar{z}(t)), \quad (26)$$

同假设 1, 互联项 $\bar{h}^T(t, \bar{z}(t), E)$ 满足如下二次约束:

$$\bar{h}^T(t, \bar{z}(t), E) \bar{h}(t, \bar{z}(t), E) \leq \theta^2 \bar{z}^T(t) \bar{H} \bar{z}(t). \quad (27)$$

其中: $\theta > 0$ 为互联的界, \bar{H} 为如下互联约束矩阵:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} q_1 & \mathbf{0} & q_2 & \mathbf{0} \\ q_1 & \mathbf{0} & q_2 & \mathbf{0} \\ q_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ q_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & \mathbf{0} \\ \bar{q}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\bar{q}_1 = \begin{bmatrix} q_1 & \mathbf{0} \\ q_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \bar{q}_2 = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_2 \end{bmatrix}, \bar{q}_3 = \begin{bmatrix} q_3 & \mathbf{0} \\ q_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

与定理 1 的证明过程相同, 将式 (26) 和 (27) 写成矩阵形式, 并运用 S-过程 和 Schur 补引理, 有

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T \bar{Q} + \bar{Q} \bar{A} - \alpha \bar{Q} & \bar{Q} & \bar{H}^T \\ \bar{Q} & -\tau I & \mathbf{0} \\ \bar{H} & \mathbf{0} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (28)$$

其中: $\gamma = 1/\theta^2, \tau = 1$. 有

$$\bar{A}^T \bar{Q} + \bar{Q} \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{N1} & \bar{A}_{N2} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{N3} & \bar{A}_{N4} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{N-1} = \hat{A}_{N-1}^T \bar{Q}_{N-1} + \bar{Q}_{N-1} \hat{A}_{N-1} - \alpha \bar{Q}_{N-1},$$

$$\bar{A}_{N1} = A_N^T \bar{Q}_{N1} + \bar{Q}_{N1} A_N + K_N^T B_N^T \bar{Q}_{N1} +$$

$$\bar{Q}_{N1} B_N K_N - \alpha \bar{Q}_{N1},$$

$$\bar{A}_{N2} = -\bar{Q}_{N1} B_N K_N, \bar{A}_{N3} = -K_N^T B_N^T \bar{Q}_{N1},$$

$$\bar{A}_{N4} = A_N^T \bar{Q}_{N2} + \bar{Q}_{N2} A_N - C_N^T L_N^T \bar{Q}_{N2} -$$

$$\bar{Q}_{N2} L_N C_N - \alpha \bar{Q}_{N2}.$$

则式 (28) 可改写为

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{Q}_{N-1} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{N1} & \bar{A}_{N2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{N3} & \bar{A}_{N4} & \mathbf{0} \\ \bar{Q}_{N-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I \\ \mathbf{0} & \bar{Q}_{N1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{Q}_{N2} & \mathbf{0} \\ \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{q}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{q}_1^T & \bar{q}_3^T \\ \bar{Q}_{N1} & \mathbf{0} & \bar{q}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{Q}_{N2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma I \end{bmatrix} \rightarrow \leftarrow < 0. \quad (29)$$

令

$$\Delta = \text{diag}(I, \bar{Q}_{N1}^{-1}, I, I, I, I, I, I),$$

$$\bar{Y}_{N1} = \bar{Q}_{N1}^{-1}, K_N \bar{Y}_{N1} = \Phi_N, \bar{Q}_{N2} L_N = N_N,$$

可得到式 (24) 的结果. 对式 (26) 从 0 到 t 积分, 得到

$$V(\bar{z}(t)) < V(\bar{z}(0)) e^{\alpha t}. \quad (30)$$

由正定二次型的性质可知

$$V(\bar{z}(t)) = \bar{z}^T(t) \bar{Q} \bar{z}(t) =$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i^T(t) \bar{Q}_{i1} x_i(t) + e_i^T(t) \bar{Q}_{i2} e_i(t)) \geq$$

$$\sum_{i=1}^N (\lambda_{\min}(Q_{i1}) x_i^T(t) R_i x_i(t) +$$

$$\lambda_{\min}(Q_{i2}) e_i^T(t) R_i e_i(t)) \geq \lambda_3 \hat{x}^T(t) R \hat{x}(t), \quad (31)$$

$$V(\bar{z}(0)) e^{\alpha t} = \bar{z}^T(0) \bar{Q} \bar{z}(0) e^{\alpha t} =$$

$$e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N (x_i^T(0) \bar{Q}_{i1} x_i(0) + e_i^T(0) \bar{Q}_{i2} e_i(0)) \leq$$

$$e^{\alpha t} \sum_{i=1}^N (\lambda_{\max}(\bar{Q}_{i1}) x_i^T(0) R_i x_i(0) +$$

$$\lambda_{\max}(\bar{Q}_{i2}) e_i^T(0) R_i e_i(0)) \leq e^{\alpha T} (\lambda_4 c_1 + \lambda_5 c_1). \quad (32)$$

由式(25)、(30)~(32)得到 $\bar{Z}^T(t)R\bar{Z}(t) < c_2, \forall t \in [0, T]$ 成立. 同理, 由于表示结构关联的 E_{ij} 从1变为0或从0变为1时, 系统互联的变化仍在所约束限制的范围, 该结果是分散有限时间鲁棒关联稳定的. \square

4 仿真算例

本节通过一个仿真算例表明采用上述方法的可行性. 原系统的具体数据和参数选择见文献[8], 新加入第3个子系统的参数与第2个子系统相同.

4.1 基于状态反馈的仿真结果

考虑原系统包含两个子系统的情况, 根据本文的设计方法, 可得到控制增益矩阵 K_1, K_2 和 λ_1, λ_2 分别为

$$K_1 = [0.0410 \ 0.0076],$$

$$K_2 = [0.1720 \ -0.0205],$$

$$\lambda_1 = 2.1436, \lambda_2 = 2.8232.$$

经计算可知, 式(8)成立. 令

$$m_1 = \sum_{i=1}^2 \hat{x}_i^T(t) R_i \hat{x}_i(t), \quad t \in [0, 1],$$

得到 m_1 的仿真曲线如图2所示. 由图2可见, $m_1 < c_2$.

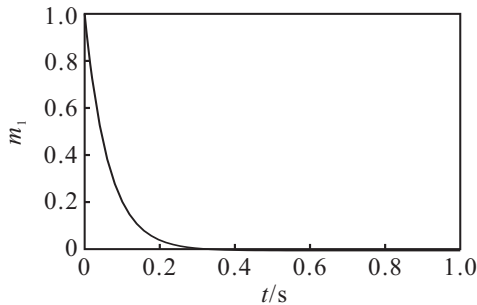


图2 m_1 的变化

现将第3个子系统加入到原系统中, 按照本文方法, 得到控制增益矩阵 K_3 和 λ_1, λ_2 分别为

$$K_3 = [0.1201 \ -0.0170],$$

$$\lambda_1 = 0.5908, \lambda_2 = 2.1632.$$

经计算可知式(8)成立. 令

$$m_2 = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i^T(t) R_i \hat{x}_i(t), \quad t \in [0, 1],$$

得到 m_2 的仿真曲线如图3所示. 由图3可见, $m_2 < c_2$.

由图2和图3可见, 原系统和扩展系统均是有限时间稳定的.

为了验证系统的关联稳定性, 将系统的互联项

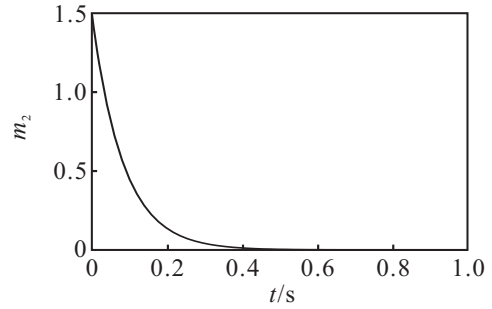


图3 m_2 的变化

E_{13} 由1变为0, 发现与图3的仿真曲线基本一致, 因此略去该图. 以上证明了所提出方法具有关联稳定性, 同时也表明鲁棒性较强.

4.2 基于输出反馈的仿真结果

仿真研究取 $c_2 = 5.92$, 考虑原系统包含两个子系统的情况, 根据本文的设计方法, 可得控制器、观测器增益阵 $K_1, K_2, L_1, L_2, \lambda_3, \lambda_4$ 和 λ_5 分别为

$$K_1 = [0.9000 \ 0.2368],$$

$$K_2 = [1.2201 \ -0.1609],$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -1.7769 \\ -7.3488 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -7.2659 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_3 = 0.6003, \lambda_4 = 1.1145, \lambda_5 = 2.0912.$$

经计算可知式(25)成立. 令

$$m_3 = \sum_{i=1}^2 \bar{Z}_i^T(t) R_i \bar{Z}_i(t), \quad t \in [0, 1],$$

得到 m_3 的仿真曲线如图4所示. 由图4可见, $m_3 < c_2$.

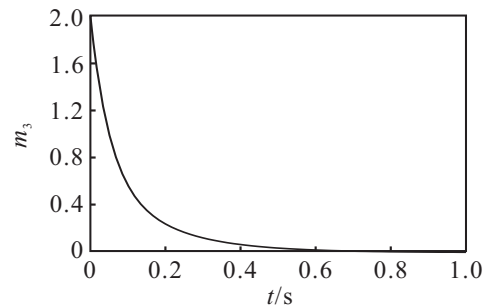


图4 m_3 的变化

将第3个子系统加入到原系统中, 按照本文方法得到控制器、观测器增益阵 $K_3, L_3, \lambda_3, \lambda_4$ 和 λ_5 分别为

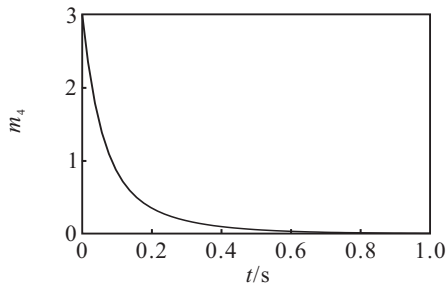
$$K_3 = [0.1035 \ -0.0058], \quad L_3 = \begin{bmatrix} 0.0054 \\ -0.0203 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_3 = 0.3338, \lambda_4 = 0.7054, \lambda_5 = 0.7157.$$

经计算可知, 式(25)成立. 令

$$m_4 = \sum_{i=1}^3 \bar{Z}_i^T(t) R_i \bar{Z}_i(t), \quad t \in [0, 1],$$

得到 m_4 的仿真曲线如图5所示. 由图5可见, $m_4 < c_2$.

图 5 m_4 的变化

由图 4 和图 5 可见, 原系统和扩展系统均是有限时间稳定的。

为了验证系统的关联稳定性, 将系统的互联项 E_{23} 由 1 变为 0, 发现与图 5 的仿真曲线基本一致, 因此略去该图。以上证明了所提出方法具有关联稳定性, 同时也表明鲁棒性较强。

5 结 论

本文针对一类扩展结构大系统, 研究了其分散有限时间鲁棒关联镇定问题。在定理 1 和定理 2 中分别以 LMI 的形式给出了基于状态反馈和输出反馈的扩展结构大系统分散有限时间鲁棒关联稳定的充分条件和控制器的设计方法。该方法通过求解 LMI 可直接得到控制器和观测器增益阵 K_N 和 L_N 。仿真结果表明了所提出方法的有效性。该方法由于不改变原结构系统的分散控制律, 且能保证系统的关联稳定性, 可作为系统在线扩容的理论基础。

参考文献(References)

- [1] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of the IRE Int Convention Record. New York: Institute of Radio Engineers, 1961: 83-87.
- [2] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37(9): 1459-1463.
- [3] Amato F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stabilization via dynamic output feedback[J]. Automatica, 2006, 42(2):

337-342.

- [4] Du H B, Lin X Z, Li S H. Finite-time stability and stabilization of swithed linear systems[C]. The 48th IEEE Conf on Decision and Control and 28th Chinese Control Conf. Shanghai, 2009: 1938-1943.
- [5] Zhang X H, Feng G, Sun Y H. Finite-time stabilization by state feedback control for a class of time-varying nonlinear systems[J]. Automatica, 2012, 48(3): 499-504.
- [6] Zha W T, Zhai J Y, Fei S M, et al. Finite-time stabilization for a class of stochastic nonlinear systems via output feedback[J]. ISA Transactions, 2014, 53(3): 709-716.
- [7] 严志国, 张国山. 一类非线性随机不确定系统有限时间滤波[J]. 控制与决策, 2012, 27(3): 419-424.
(Yan Z G, Zhang G S. Finite-time filtering for a class of nonlinear stochastic uncertain systems[J]. Control and Decision, 2012, 27(3): 419-424.)
- [8] 傅勤. 基于 LMI 的大型互联线性系统的分散有限时间镇定[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 763-768.
(Fu Q. Decentralized finite-time stabilization of large-scale interconnected linear systems based on LMI[J]. Control and Decision, 2012, 25(5): 763-768.)
- [9] Zoghlami N, Beji L, Mlayeh R, et al. Finite-time stabilization of interconnected nonlinear systems[C]. IEEE Int Conf on Control Applications Part of IEEE Multi-Conf on Systems and Control. Hyderabad, 2013: 1188-1193.
- [10] Tan X L, Ikeda M. Decentralized stabilization for expanding construction of large-scale systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1990, 35(6): 644-651.
- [11] 辛道义. 有限时间稳定性分析与控制设计研究[D]. 济南: 山东大学控制科学与工程学院, 2008.
(Xin D Y. Research on finite-time stability analysis and control design[D]. Ji'nan: College of Control Science and Engineering, Shandong University, 2008.)

(责任编辑: 郑晓蕾)