

## 基于最大灵敏度的加热系统分数阶内模控制

李大宇, 刘浪, 靳其兵

(北京化工大学自动化研究所, 北京 100029)

**摘要:** 针对加热系统热传导过程模型不精确和系统参数不确定性问题, 提出一种新的基于最大灵敏度的分数阶内模控制方案. 采用分数阶模型描述加热系统可以提高精度, 而内模控制能够很好地处理系统参数不确定性问题. 利用最大灵敏度整定分数阶控制器参数, 并以此获得强鲁棒性控制系统. 数值结果验证了所提出的分数阶内模控制方案的有效性, 具有比整数阶内模控制方案更好的控制性能.

**关键词:** 分数阶微积分; 内模控制; 最大灵敏度; 加热系统

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Maximum sensitivity based fractional order internal model control for heating system

LI Da-zi, LIU Lang, JIN Qi-bing

(Institute of Automation, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China. Correspondent: LI Da-zi, E-mail: lidz@mail.buct.edu.cn)

**Abstract:** A novel maximum sensitivity based fractional order internal model control(FOIMC) scheme is proposed for solving the problem of model imprecise and system parameters uncertainties in heating process. Fractional calculus can be used to improve the model accuracy of heating system, and internal model control(IMC) can perform well under the problem of system parameters uncertainty. Then, maximum sensitivity is used for parameters' tuning of the fractional controller and thus good robust performance can be obtained. Numerical results show the effectiveness of the proposed fractional order internal model control scheme, and its performance is superior to integer order internal model control for fractional order system.

**Keywords:** fractional order calculus; internal model control; maximum sensitivity; heating system

### 0 引言

在加热过程中, 热传导是一个复杂的过程, 由于模型结构及辨识方法的局限性, 精确的模型往往难以获得<sup>[1]</sup>. 此外, 系统的参数经常会随着工作环境的变化而变化, 基于模型设计的控制器性能往往不能令人满意.

分数阶微积分作为整数阶微积分的扩展, 近年来受到越来越广泛的关注, 特别是在系统建模、控制器设计等领域<sup>[2-3]</sup>. 文献[4]指出, 实际系统通常都是分数阶的, 采用分数阶微分方程来描述本身具有分数阶特性的系统往往更加准确, 特别是对于热系统、粘弹性系统等. 在分数阶建模迅速发展的同时, 分数阶控制器也相继出现. 20世纪末, Podlubny<sup>[5]</sup>提出了 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器, 该控制器与传统PID控制器相比具有更好的

控制性能, 但可调参数的增加增大了控制器设计的难度; 文献[6]提出了 $IMC-PI^\lambda D^\mu$ 控制器, 利用内模控制原理来设计控制器可以减少所需整定的参数个数, 但该方法的设计过程没有考虑系统参数变化的问题, 当系统工作环境发生变化时, 控制器性能会急剧下降.

针对以上问题, 本文提出一种基于最大灵敏度的分数阶内模控制(FOIMC)方案. FOIMC控制方案的主要思想是采用分数阶模型描述对象, 基于该模型再结合内模控制原理简化控制器的设计, 最后利用最大灵敏度 $M_s$ 来设计控制器参数, 使控制器对于系统参数变化具有更好的鲁棒性.

### 1 加热系统的分数阶描述

本文所研究的对象为一加热系统(参见文献[7]), 其主要由钢管管道和热电模块组成, 管道中的物料均

收稿日期: 2014-09-05; 修回日期: 2014-11-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273132); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(ZZ1014).

作者简介: 李大宇(1970—), 女, 教授, 博士生导师, 从事先进控制、复杂系统建模与优化等研究; 刘浪(1990—), 男, 硕士生, 从事内模控制、分数阶系统的研究.

匀放置. 本文仅考虑一种物料的情况.

管道上纵向位置  $z$  处的温度与加热源处热通量的动态关系可用如下分数阶系统表达:

$$G_P(s, z) = \frac{T(s, z)}{H(s, 0)} = \frac{k}{as^\alpha + 1} e^{-\frac{z(as^\alpha + 1)}{k}}. \quad (1)$$

其中:  $T(s, z)$  为系统输出,  $H(s, 0)$  为系统输入. 相应的系统参数值  $k = 0.8209$ ,  $a = 33.0597$ ,  $z = 0.2623$ ,  $\alpha = 0.7779$ .

基于式(1), 通过阶跃响应辨识方法, 式(1)的加热系统可以进一步降阶为

$$G_{FO}(s) = \frac{K}{Ts^\beta + 1} e^{-Ls}, \quad 0 < \beta < 2. \quad (2)$$

模型参数为  $K = 0.589$ ,  $T = 44.085$ ,  $L = 19.237$ ,  $\beta = 0.797$ , 均由 Matlab 优化工具箱优化获得. 模型(2)将用于下一部分的分数阶内模控制设计.

分数阶微分算子  $s^\beta$  的处理方案采用 Oustaloup 逼近<sup>[8]</sup>, 其逼近表达式如下:

$$s^\gamma \approx K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k}. \quad (3)$$

这种逼近方法仅在频率范围  $[\omega_b, \omega_h]$  是有效的, 且逼近的阶次为  $2N + 1$ .  $N$  越大, 精度越高, 但相应的计算量会大大增加. 增益、零点和极点分别定义如下:

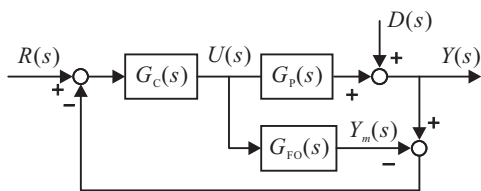
$$\begin{cases} K = \omega_h^\gamma, \\ \omega'_k = \omega_b \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+0.5(1-\gamma)}{2N+1}}, \\ \omega_k = \omega_b \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+0.5(1+\gamma)}{2N+1}}. \end{cases} \quad (4)$$

在后续的数值仿真中, 分数阶部分均采用 Oustaloup 法进行逼近, 参数设定分别为  $N = 5$ ,  $\omega_b = 10^{-4}$ ,  $\omega_h = 10^4$ .

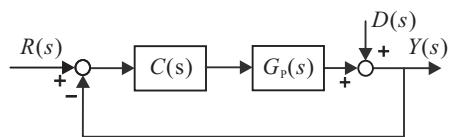
## 2 分数阶内模控制设计

### 2.1 分数阶内模控制

FOIMC 是传统 IMC 的一种扩展, 基于 FOIMC 的控制系统的标准结构如图 1(a) 所示.



(a) FOIMC 的标准结构



(b) FOIMC 的等效反馈结构

图 1 FOIMC 标准结构及其等效反馈结构

$G_C(s)$  为内模控制器, 被控对象与相应的分数阶模型分别是  $G_P(s)$ 、 $G_{FO}(s)$ . 这类控制方案的核心思想是将被控对象模型引入到控制器设计当中, 它允许模型不精确, 但是模型越精确, 控制器性能越会有所提升.

图 1(b) 为标准 FOIMC 的等效反馈控制结构, 可以得到控制器  $C(s)$  与  $G_C(s)$  有如下关系:

$$C(s) = \frac{G_C(s)}{1 - G_C(s)G_{FO}(s)}. \quad (5)$$

对象输出为

$$Y(s) = \frac{G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)(G_P(s) - G_{FO}(s))} R(s) + \frac{1 - G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)(G_P(s) - G_{FO}(s))} D(s). \quad (6)$$

当模型完全匹配, 即  $G_{FO}(s) = G_P(s)$  时, 式(6)可以化简为

$$Y(s) = G_C(s)G_P(s)R(s) + (1 - G_C(s)G_{FO}(s))D(s). \quad (7)$$

FOIMC 控制器设计与 IMC 相似, 可以概括为两步<sup>[5,9]</sup>.

#### Step 1 分解对象模型为

$$G_{FO}(s) = G_{FO}^+(s)G_{FO}^-(s). \quad (8)$$

其中:  $G_{FO}^+(s)$  包含所有的时滞和右半平面的零点, 而且其静态增益为 1;  $G_{FO}^-(s)$  为对象模型最小相位部分.

#### Step 2 令 FOIMC 控制器为

$$G_C(s) = \frac{1}{G_{FO}^-(s)} F(s), \quad (9)$$

其中  $F(s)$  是稳态增益为 1 的滤波器, 定义为

$$F(s) = \frac{1}{(1 + \lambda s)^k}. \quad (10)$$

这里:  $\lambda$  为滤波器时间常数;  $k$  为滤波器阶次, 其大小设定原则为保证控制器  $G_C(s)$  是可实现的. 需要注意的是,  $\lambda$  的大小变化在轨迹跟踪过程中会同时影响系统稳定性和瞬态性能.

### 2.2 基于最大灵敏度的 FOIMC 控制器参数整定

实际系统的参数会随着操作环境和时间的不同而变化, 用于控制器设计的系统模型一般是不精确的. 因此, 在过程控制中, 控制系统对参数变化的鲁棒性备受关注. 文献 [10] 提出了一种基于增益裕度和相位裕度进行控制器设计的方法, 本文在此基础上提出一种利用最大灵敏度  $M_s$  来设计分数阶系统控制器的方法. 最大灵敏度定义如下:

$$M_s = \left\| \frac{1}{1 + C(j\omega)G_P(j\omega)} \right\|_\infty, \quad (11)$$

其中  $C(j\omega)G_P(j\omega)$  为系统开环传递函数. 最大灵敏度是开环传递函数 Nyquist 曲线与临界点  $(-1, 0)$  最短距离的倒数, 其几何解释如图 2 所示.

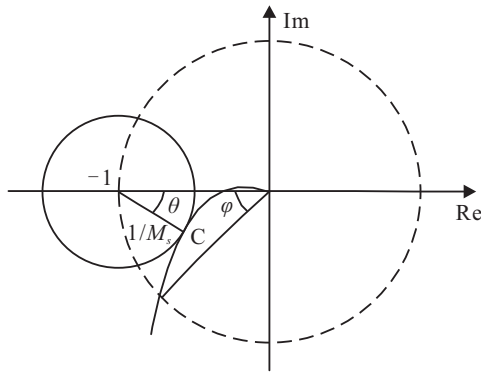


图 2 最大灵敏度几何解释

最大灵敏度与增益裕度、相位裕度有如下关系:

$$h > M_s / (M_s - 1), \quad (12)$$

$$\varphi > 2 \arcsin \frac{1}{M_s}, \quad (13)$$

其中  $h$  和  $\varphi$  分别为增益裕度、相位裕度. 若  $M_s = 1.5$ , 则  $h > 3.0$ ,  $\varphi > 38.9^\circ$ . 从式 (13) 可以看到,  $M_s$  越大, 相位裕度越小, 相应的系统对于参数不确定的鲁棒性越弱. 因此,  $M_s$  的取值范围一般在 1.2 与 2 之间<sup>[11]</sup>.

在图 2 中, 假设相切点为  $C$ , 令

$$G_l(j\omega) = C(j\omega)G_p(j\omega),$$

在  $C$  点, 可得

$$G_l(j\omega) = -1 + \frac{1}{M_s} e^{-j\theta}, \quad (14)$$

$$\arg \frac{dG_l(j\omega)}{d\omega} = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad (15)$$

其中  $\theta$  为过临界点和  $C$  点的直线与负实轴的夹角.

假设  $G_{FO}(s) = G_p(s)$ , 根据等效回路控制器 (5), 可得系统开环传递函数

$$G_l(j\omega) = C(s)G_p(s) = \frac{e^{-jL\theta}}{j\lambda\omega + 1 - e^{-jL\theta}}. \quad (16)$$

令  $A = L\omega$ ,  $B = \lambda/L$ , 则式 (16) 可以改写为

$$G_l(j\omega) = \frac{e^{-jA}}{jAB + 1 - e^{-jA}}. \quad (17)$$

将式 (17) 代入式 (14) 和 (15) 中, 利用 Matlab 求解, 可以得到  $B$  与  $M_s$  的关系表达式

$$B = \lambda/L = 16.47M_s^{-10} - 0.86M_s + 2.099. \quad (18)$$

利用式 (18) 可以得到滤波器时间常数  $\lambda$  与  $M_s$  的关系表达式

$$\lambda = L(16.47M_s^{-10} - 0.86M_s + 2.099). \quad (19)$$

根据式 (19) 以及给定的  $M_s$ , 即可以求得所需的滤波器时间常数  $\lambda$ .

### 3 数值结果与分析

本文中, 被控变量为管道上  $z$  处温度; 控制变量为管道起始点热通量, 其范围设定在 0 到 15 之间. 令  $M_s = 1.5$ , 利用第 3 节的控制器设计方案, 可以得到 FOIMC 控制器

$$G_{C-FO} = \frac{44.085s^{0.797} + 1}{0.589(1 + 21.057s)}. \quad (20)$$

为了验证 FOIMC 的优势, 同时给出用相同方法设计的整数阶 IMC 控制器以及利用 Z-N 法整定的传统 PID 控制器, 分别如下:

$$G_{C-IO} = \frac{118.198s + 1}{0.531(1 + 10.964s)}, \quad (21)$$

$$G_{PID} = 13.980 + \frac{0.566}{s} + 82.873s. \quad (22)$$

### 3.1 基本性能测试

首先, 分别使用 FOIMC 控制器、IMC 控制器和基于 Z-N 法整定的 PID 控制上述加热过程, 控制结果如图 3 和图 4 所示.

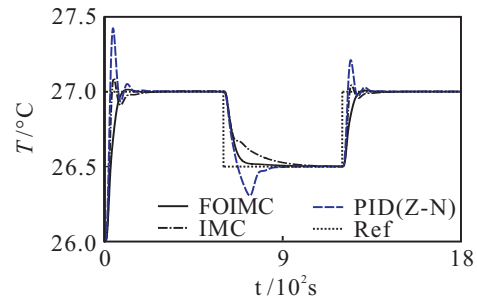


图 3 基于 3 种控制器的系统输出对比

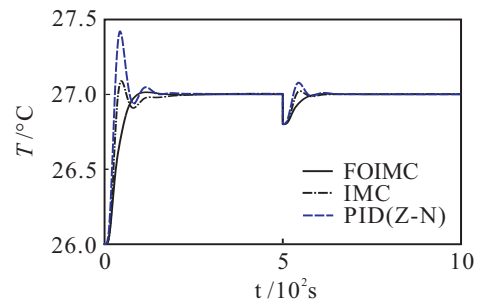


图 4 系统对于干扰的输出响应

图 3 为设定值跟踪各控制系统的输出响应曲线. 系统初始给定温度为  $27^\circ\text{C}$ ; 在  $600\text{ s}$  的时候, 设定值阶跃到  $26.5^\circ\text{C}$ ; 在  $1200\text{ s}$  的时候, 设定值重新回到  $27^\circ\text{C}$ . 可以看出, 3 个控制器都能很好地跟踪设定值, 且稳态误差小. 但是在动态性能方面, FOIMC 控制系统明显优于 IMC 和 PID 控制系统. 因为它具有更小的超调和调节时间, 在第 2 阶段最为突出. 需要注意的是, 波动和较大的超调都会对系统设备造成一定程度的损坏, 为了延长设备的使用寿命, 快速而平滑的动态过程更加令人满意. 为了更加直观, 这里用了两个指标 IAE (绝对误差积分) 和 TV (输入总变化量), 分别定义为

$$\text{IAE} = \int_0^\infty |R(s) - Y(s)| dt, \quad (23)$$

$$\text{TV} = \sum_{i=0}^\infty |u_{i+1} - u_i|, \quad (24)$$

其中  $u$  的采样时间为  $\Delta t = 1\text{ s}$ .

表 1 列举了各控制方案相对应的 IAE 和 TV. 可以看出, 相对于 IMC 和 PID 控制, FOIMC 具有更小的 IAE 和 TV, 更小的 TV 意味着对设备伤害更小, 以及电能消耗更少.

表1 性能指标对比

种类	IAE	TV
IMC	91.5435	33.4716
FOIMC	86.8897	17.3149
PID(Z-N)	93.8588	48.6476

为了测试各控制系统的抗干扰性能,在500s的时候加入输出扰动 $D(s) = -0.2$ .图4给出了各控制系统相应的输出响应.可以看到,各控制器都能迅速地把输出重新调节到给定值,但FOIMC控制系统具有更加平滑的动态过程,且调节时间与其余二者几乎相同.

### 3.2 鲁棒性测试

为了检测FOIMC控制器对于系统参数不确定的鲁棒性,假定因为工作环境的变化,系统增益 $k$ 增大至原来的1.5倍,分别使用FOIMC、IMC和PID控制系统.图5所示为加热系统在各控制器作用下的输出阶跃响应.

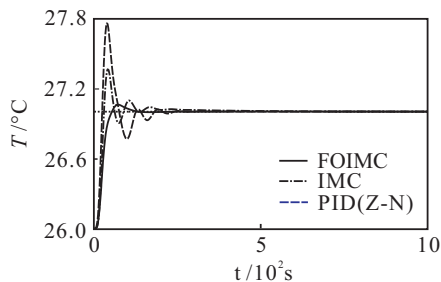


图5 系统增益变化后的阶跃响应(1.5倍增益)

由图5可以看出,基于PID的控制系统输出具有78%的超调,IMC控制系统输出具有38%的超调,而FOIMC控制系统仅有6%的超调,且调节时间远小于前面两种控制方案.

### 3.3 $M_s$ 设定对系统性能影响测试

为了测试不同大小的 $M_s$ 设定对系统响应性能的影响,在仿真实验中,分别给定 $M_s$ 三组不同的值(1.2、1.4和1.6),得到3组不同的FOIMC控制器.为该闭环系统输入一个单位阶跃变化,系统输出动态响应指标(超调 $\sigma$ 、调节时间 $t_s$ )见表2.为了测试最大灵敏与控制系统鲁棒性的关系,对应于不同的 $M_s$ ,系统相应的相位裕度 $\varphi$ 也在表2中给出.可以看出, $M_s$ 设定越小,系统超调越小,相位裕度越大,鲁棒性越强,但响应速度会稍慢一些.

表2 不同 $M_s$ 设定性能指标对比

$M_s$	$\sigma / \%$	$t_s / s$	$\varphi$
1.2	0.04	168.8129	78.4
1.4	0.05	69.9374	76.2
1.6	1.55	54.9264	73.7

## 4 结论

本文结合分数阶微积分与内模控制的特点,针对加热系统提出了一种基于最大灵敏度的分数阶内模控制方案.利用分数阶模型描述加热过程,突破了传

统整数阶模型对于模型精度的限制,提高了对象描述的精确度.采用内模控制原理以及最大灵敏度设计控制器,很好地解决了系统参数对于工作环境变化的不确定性问题,此外还可以根据不同的鲁棒性需求方便地调节控制器参数.仿真实验验证了所提出方案的有效性.结果表明,相比较于IMC和利用Z-N法整定的PID控制方案,本文所提出的FOIMC具有更小的超调和调节时间,控制器参数调节方便,且对于控制系统的鲁棒性有很大提升,在实际过程中具有广泛的应用价值.

### 参考文献(References)

- [1] Gabano J D, Poinot T. Fractional modelling and identification of thermal systems[J]. Signal Process, 2011, 91(3): 531-541.
- [2] Oldham K B, Spanier J. The fractional calculus[J]. Mathematical Gazette, 1974, 56(247): 396-400.
- [3] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 161-169.  
(Zhu C X, Zou Y. Summary of research on fractional order control[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 161-169.)
- [4] Caponetto R. Fractional order systems: Modeling and control applications[M]. Singapore: World Scientific, 2010: 1-4.
- [5] Podlubny I. Fractional-order systems and  $PI^\lambda D^\mu$  controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(1): 208-214.
- [6] Li D Z, Fan W F, Jin Q B, et al. An IMC- $PI^\lambda D^\mu$  controller design for fractional calculus system[C]. Proc of the 29th Chinese Control Conf. Beijing: IEEE, 2010: 3581-3585.
- [7] 齐乃明, 秦昌茂, 王威. 分数阶系统的最优Oustaloup数字实现算法[J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1598-1600.  
(Qi N M, Qin C M, Wang W. Optimal Oustaloup digital realization of fractional order systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(10): 1598-1600.)
- [8] Sierociuk D, Dzieliński A, Sarwas G, et al. Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2013, 371(1990): 20120146.
- [9] Francis B A, Wonham W M. The internal model principle of control theory[J]. Automatica, 1976, 12(5): 457-465.
- [10] Kaya I. Two-degree-of-freedom IMC structure and controller design for integrating processes based on gain and phase-margin specifications[C]. IEE Proc of Control Theory and Applications. IET, 2004, 151(4): 481-487.
- [11] Jin Q B, Liu Q, Wang Q, et al. PID controller design based on the time domain information of robust imc controller using maximum sensitivity[J]. Chinese J of Chemical Engineering, 2013, 21(5): 529-536.

(责任编辑: 齐 霖)