文章编号: 1001-0920 (2015) 10-1890-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1341

时变线性系统同时强镇定控制器设计

徐晓萍[1], 刘 浏[2]

(1. 中国海洋大学 数学科学学院，山东 青岛 266100；2. 大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024)

摘 要: 在套代数框架下, 应用素分解的方法, 设计能同时强镇定两个时变线性系统的稳定控制器, 并给出了所有控制器的参数化. 应用该控制器参数化, 对某类同时鲁棒强镇定问题进行研究, 给出了两个时变线性系统可被同时强鲁棒镇定的充分条件. 针对所得的控制器设计结果给出了数值例子, 数值结果表明了该设计是有效和可行的.

关键词: 套代数；同时镇定；素分解；控制器；时变线性系统

中图分类号: O177.1 **文献标志码:** A

Controllers design of simultaneously strong stabilization for two linear time-varying systems

XU Xiao-ping[1], *LIU Liu*[2]

(1. School of Mathematical Sciences，Ocean University of China，Qingdao 266100，China；2. School of Mathematical Sciences，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China．Correspondent：XU Xiao-ping，E-mail：xxpouc@163.com)

Abstract: By using the coprime factorization theory, a stable controller is designed in the framework of nest algebras. The parametrization of all simultaneously stable controller is provided. By using the parametrization, the problem of simultaneously robust stabilization is studied, and the sufficient condition is given for the robust stabilization. Finally, a numerical example is given to explain the parametrization of the controllers, and numerical results show that the designed method is practical and effective.

Keywords: nest algebra；simultaneous stabilization；coprime factorizations；controllers；time-varying linear systems

0 引 言

同时镇定是设计一个共同的控制器来同时镇定有限多个系统, 它是系统与控制理论中的基本问题, 已广泛地应用于鲁棒控制等领域. 该问题的研究可以追溯到 20 世纪 80 年代. 同时镇定问题最早是由 Saeks 等[1], Vidyasagar 等[2]提出的. 该问题一经提出, 就受到学者们广泛关注并在各种框架下得到了许多研究结果[3-13]. 在不同的理论框架下, 对两个或更多系统的同时镇定控制器的设计方法已得到很好的研究[14-17]. 然而, 在同时镇定理论的发展过程中, 很少学者关注所有的同时镇定控制器的设计问题.

20 世纪 90 年代, 伴随着 H_∞ 控制理论的发展, 人们开始将时变情形放在输入-输出信号的一个恰当的复 Hilbert 空间中考虑, 得到了很多理论结果. 在算子理论情形下, 能够用套代数来表示所有稳定的关联的线性时变系统. 在套代数框架下, 无穷维线性时变系统的控制理论自此开始发展. 到目前为止, 套代数框架下对线性系统理论的研究已经有不少成果[11-13,18-21]. 特别地, Yu 等[13]通过已有的控制器研究了同时镇定控制器的设计.

不同于文献 [13], 本文引入一种新的方法来设计同时镇定两个线性时变系统的所有稳定的控制器. 本文的主要目的是对得到的所有稳定控制器进行参数化. 具体地, 主要考虑如下问题: 1) 给定系统 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, 如何设计镇定它们的所有的稳定控制器; 2) 什么情形下存在控制器 $C \in \mathcal{S}$, 使得 $\{L_1, C\}$, $\{L_2, C\}$ 是稳定的. 对此, 笔者已在文献 [18] 中给出了很好的刻画. 但对于控制器的具体的形式并没有给出很好的描述. 鉴于此, 本文主要应用素分解的方法, 对所有的控制器进行刻画与设计.

收稿日期: 2014-08-29；**修回日期:** 2014-12-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11201438, 11301047, 61203101).

作者简介: 徐晓萍(1979−), 女, 讲师, 博士, 从事套代数框架下控制理论的研究；刘浏(1984−), 女, 博士, 从事套代数框架下的控制理论、算子理论及其应用的研究.

本文在套代数框架下研究无穷维时变线性系统的同时强镇定问题. 首先, 给出同时镇定两个系统的所有的稳定控制器的参数化; 然后, 应用该参数化, 对两个系统的同时鲁棒强镇定问题进行了刻画; 最后, 对所得的理论结果给出具体的数值例子, 数值结果表明了该设计的有效性和可行性.

1　基础知识

假设输入-输出信号空间 $\mathcal{H}$ 为平方可和的复 Hilbert 空间, 有

$$\mathcal{H}=\left\{(x_0,x_1,x_2,\cdots):x_i\in \boldsymbol{C},\sum_{i=0}^{\infty}|x_i|^2<\infty\right\}. \quad (1)$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 上全体有界线性算子所构成的集合, 算子范数定义为

$$\|A\|=\sup_{x\in\mathcal{H},\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|,\ A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (2)$$

对于 $n\geqslant 0$, P_n 表示 $\mathcal{H}$ 上的标准截断算子, 即

$$P_n(x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots)=(x_0,x_1,\cdots,x_n,0,0,\cdots). \quad (3)$$

其中: $P_{-1}=0,\ P_\infty=I$.

本文所研究的线性时变系统 L 是指 $\mathcal{H}$ 上满足 $P_nLP_n=P_nL$ 的线性变换. $\mathcal{H}$ 上的有界下三角算子称为稳定的时变线性系统. 全体时变线性系统构成的集合在标准的加法与乘法下构成一个代数, 记为 $\mathcal{L}$. $\mathcal{S}$ 表示所有稳定的时变线性系统构成的集合, 显然, $\mathcal{S}$ 是一个离散套代数[17].

对于系统 $L\in\mathcal{L}$, 若存在一个控制器 $C\in\mathcal{L}$, 使得 $\begin{bmatrix} I & C\\ L & -I\end{bmatrix}$ 在 $\mathcal{S}$ 中可逆, 即其逆

$$H(L,C)=\begin{bmatrix}(I+CL)^{-1} & C(I+LC)^{-1}\\ L(I+CL)^{-1} & -(I+LC)^{-1}\end{bmatrix} \quad (4)$$

在 $\mathcal{S}$ 中, 则称系统 L 可镇定. 当控制器 $C\in\mathcal{S}$时, 上述镇定称为强镇定. 系统的素分解是刻画镇定控制器的重要工具. 设 $M,N,\hat{M},\hat{N}\in\mathcal{S}$, 若 $L=NM^{-1}$ 且 M,N 在 $\mathcal{S}$ 中右互素, 即存在 $X,Y\in\mathcal{S}$ 满足 $YM+XN=I$, 则称 NM^{-1} 为 L 的右素分解; 若 $L=\hat{M}^{-1}\hat{N}$ 且 $\hat{M},\hat{N}$ 在 $\mathcal{S}$ 中左互素, 即存在 $\hat{X},\hat{Y}\in\mathcal{S}$ 满足 $\hat{N}\hat{X}+\hat{M}\hat{Y}=I$, 则称 $\hat{M}^{-1}\hat{N}$ 为 L 的左素分解. 值得注意的是, NM^{-1} 为 L 的右素分解的充要条件是 $[M,N]^{\mathrm{T}}$ 是 L 的强右表示; $\hat{M}^{-1}\hat{N}$ 为 L 的左素分解的充要条件是 $[-\hat{N},\hat{M}]$ 是 L 的强左表示.

下面是经典的 Youla 参数化定理, 它给出了所有镇定控制器的刻画.

定理 1 [17]　系统 $L\in\mathcal{L}$ 可镇定当且仅当存在 $M,N,X,Y,\hat{M},\hat{N},\hat{X},\hat{Y}\in\mathcal{S}$ 使得 L 分别有左、右素分解 $\hat{M}^{-1}\hat{N}$ 和 NM^{-1}, 并且满足双 Bezout 恒等式

$$\begin{bmatrix} Y & X\\ -\hat{N} & \hat{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & -\hat{X}\\ N & \hat{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M & -\hat{X}\\ N & \hat{Y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y & X\\ -\hat{N} & \hat{M}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}. \quad (5)$$

$C\in\mathcal{L}$ 镇定 L 当且仅当 C 有如下形式:

$$C=(\hat{X}+MQ)(\hat{Y}-NQ)^{-1}=(Y-Q\hat{N})^{-1}(X+Q\hat{M}), \quad (6)$$

其中 $Q\in\mathcal{S}$.

2　控制器设计

本节主要给出时变线性系统同时镇定的所有稳定控制器的参数化. 首先介绍几个引理.

引理 1 [17]　假设系统 $L\in\mathcal{L}$ 有右素分解 $L=AB^{-1}$, 且控制器 $C\in\mathcal{L}$ 有左素分解 $C=D^{-1}N$, 使得闭环系统 $\{L,C\}$ 是适定的, 则闭环系统 $\{L,C\}$ 是可镇定的当且仅当 $DB+NA$ 在 $\mathcal{S}$ 中可逆.

类似地, 如果 $L\in\mathcal{L}$ 有左素分解 $L=\hat{B}^{-1}\hat{A}$, 且控制器 $C\in\mathcal{L}$ 有右素分解 $C=\hat{N}\hat{D}^{-1}$, 使得闭环系统 $\{L,C\}$ 是适定的, 则闭环系统 $\{L,C\}$ 是可镇定的当且仅当 $\hat{B}\hat{D}+\hat{A}\hat{N}$ 在 $\mathcal{S}$ 中可逆.

引理 2 [18]　假设系统 $L\in\mathcal{L}$ 有左素分解 $B^{-1}A$, 其中 $A,B\in\mathcal{S}$, 且 $[X,Y]^{\mathrm{T}}$ 是 $[A,B]$ 在 $\mathcal{S}$ 中的右逆, 即 $AX+BY=I$. 如果系统 L 可以由稳定的控制器 C 镇定, 即 $C\in\mathcal{S}$, 则 C 有如下形式的右素分解:

$$C=(X-Q)(Y+LQ)^{-1}. \quad (7)$$

其中: $Q\in\mathcal{S}$ 且有 $Q=(I+CL)^{-1}T,T\in\mathcal{S}$. 特别地, 该结果对于 A 为紧算子时是成立的.

引理 3 [17]　若 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 且 $\|I-T\|<1$, 则 T 是可逆的且

$$\|T^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|I-T\|}. \quad (8)$$

由文献 [18] 的定理 4.1 知, 存在控制器 $C\in\mathcal{S}$, 使得闭环系统 $\{L_1,C\}$ 和 $\{L_2,C\}$ 都是可镇定的. 但是控制器 C 的具体形式并没有给出. 为解决这一问题, 下面给出本文的主要结果, 它具体刻画了强镇定系统 L_1 和 L_2 的所有控制器.

定理 2　假设系统 $L_1,L_2\in\mathcal{L}$ 分别有左素分解 $L_1=\hat{M}_1^{-1}\hat{N}_1$ 和 $L_2=\hat{M}_2^{-1}\hat{N}_2$, 其中 $\hat{M}_i,\hat{N}_i,\hat{X}_i,\hat{Y}_i\in\mathcal{S}$ 且满足 Bezout 方程 $\hat{N}_i\hat{X}_i+\hat{M}_i\hat{Y}_i=I\,(i=1,2)$. 定义 $B=\hat{M}_1L_2-\hat{N}_1$, $\hat{A}=\hat{N}_2\hat{X}_1+\hat{M}_2\hat{Y}_1$. 如果系统 L_1 和 L_2 可被同时强镇定, 并且 $\hat{A}$ 在 $\mathcal{S}$ 中可逆, 则同时镇定系统 L_1 和 L_2 的所有控制器 $C\in\mathcal{S}$ 有如下形式的右素分解:

$$C(Q)=(\hat{X}_1-Q)(\hat{Y}_1+L_2Q)^{-1}, \quad (9)$$

其中 $Q\in\{Q\in\mathcal{S}:(I+BQ)^{-1}\in\mathcal{S}\}$.

证明　首先证明 $\hat{Y}_1+L_2Q$ 在 $\mathcal{S}$ 中是可逆的. 因

为

$$\hat{Y}_1 + L_2Q = (\hat{Y}_2 + L_2Q\hat{Y}_1^{-1}\hat{Y}_2)\hat{Y}_2^{-1}\hat{Y}_1, \tag{10}$$

其中 $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ 在 $\mathcal{S}$ 中可逆, 这是由于系统 L_1 和 L_2 可被同时强镇定. 令 $\tilde{Q} = Q\hat{Y}_1^{-1}\hat{Y}_2$, 有 $\tilde{Q} \in \mathcal{S}$. 由引理 2 可知, $\hat{Y}_2 + L_2\tilde{Q}$ 在 $\mathcal{S}$ 中是可逆的. 由于 $\hat{Y}_2 + L_2\tilde{Q}, \hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ 均在 $\mathcal{S}$ 中可逆, 由式 (10) 知, $\hat{Y}_1 + L_2Q$ 在 $\mathcal{S}$ 中可逆.

下面证明当 $C(Q) = (\hat{X}_1 - Q)(\hat{Y}_1 + L_2Q)^{-1}$ 时, $C(Q)$ 同时镇定系统 L_1 和 L_2.

由 $L_1 = \hat{M}_1^{-1}\hat{N}_1, L_2 = \hat{M}_2^{-1}\hat{N}_2$, 有

$$\begin{aligned}&\hat{M}_1(\hat{Y}_1 + L_2Q) + \hat{N}_1(\hat{X}_1 - Q) = \\ &(\hat{M}_1\hat{Y}_1 + \hat{N}_1\hat{X}_1) + (\hat{M}_1L_2 - \hat{N}_1)Q = I + BQ,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\hat{M}_2(\hat{Y}_1 + L_2Q) + \hat{N}_2(\hat{X}_1 - Q) = \\ &(\hat{M}_2\hat{Y}_1 + \hat{N}_2\hat{X}_1) + (\hat{M}_2L_2 - \hat{N}_2)Q = \hat{A}.\end{aligned} \tag{12}$$

由于 $I + BQ$ 和 $\hat{A}$ 均在 $\mathcal{S}$ 中可逆, 应用引理 1 以及式 (11) 和 (12), 有 $C(Q)$ 镇定系统 L_1 和 L_2.

另一方面, 假设 $C \in \mathcal{S}$ 镇定系统 L_1 和 L_2. 下面证明存在 $Q \in \mathcal{S}$ 使得 $\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 + L_2Q \\ \hat{X}_1 - Q \end{bmatrix}$ 是控制器 C 的强右表示. 应用引理 2, 存在 $Q_1, Q_2 \in \mathcal{S}$, 使得

$$\begin{bmatrix} M_C \\ N_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 + L_1Q_1 \\ \hat{X}_1 - Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_2 + L_2Q_2 \\ \hat{X}_2 - Q_2 \end{bmatrix} Z, \tag{13}$$

其中 Z 在 $\mathcal{S}$ 中可逆. 令 $Z = \hat{A}$, 有

$$\begin{aligned}&[\,\hat{M}_2 \;\; \hat{N}_2\,]\begin{bmatrix} M_C \\ N_C \end{bmatrix} = \\ &[\,\hat{M}_2 \;\; \hat{N}_2\,]\begin{bmatrix} \hat{Y}_2 + L_2Q_2 \\ \hat{X}_2 - Q_2 \end{bmatrix}\hat{A} = \\ &[(\hat{M}_2\hat{Y}_2 + \hat{N}_2\hat{X}_2) + (\hat{M}_2L_2 - \hat{N}_2)Q_2]\hat{A} = \\ &(I + 0)\hat{A} = \hat{A} = [\,\hat{M}_2 \;\; \hat{N}_2\,]\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{X}_1 \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{14}$$

因此

$$[\,\hat{M}_2 \;\; \hat{N}_2\,]\begin{bmatrix} M_C - \hat{Y}_1 \\ N_C - \hat{X}_1 \end{bmatrix} = 0. \tag{15}$$

由文献 [19] 的推论 6.1 可知, 系统 L_2 存在右素分解 $N_2M_2^{-1}$, 其中 $Y_2M_2 + X_2N_2 = I$, 且 $M_2, N_2, X_2, Y_2, \hat{M}_2, \hat{N}_2, \hat{X}_2, \hat{Y}_2$ 满足双 Bezout 恒等式. 定义

$$Q = M_2[\,X_2 \;\; -Y_2\,]\begin{bmatrix} M_C - \hat{Y}_1 \\ N_C - \hat{X}_1 \end{bmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 + L_2Q \\ \hat{X}_1 - Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{X}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ -I \end{bmatrix} Q = \\ &\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{X}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 \\ -I \end{bmatrix} M_2[\,X_2 \;\; -Y_2\,]\begin{bmatrix} M_C - \hat{Y}_1 \\ N_C - \hat{X}_1 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{X}_1 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \right. \\ &\left. \begin{bmatrix} \hat{Y}_2 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} [\,\hat{M}_2 \;\; \hat{N}_2\,] \right\} \begin{bmatrix} M_C - \hat{Y}_1 \\ N_C - \hat{X}_1 \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{X}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_C - \hat{Y}_1 \\ N_C - \hat{X}_1 \end{bmatrix} - \\ &\begin{bmatrix} \hat{Y}_2 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} [\,\hat{M}_2 \;\; \hat{N}_2\,] \begin{bmatrix} M_C - \hat{Y}_1 \\ N_C - \hat{X}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_C \\ N_C \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{16}$$

因此

$$\begin{bmatrix} M_C \\ N_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 + L_2Q \\ \hat{X}_1 - Q \end{bmatrix}, \tag{17}$$

其中 $Q \in \mathcal{S}$. □

与定理 2 类似, 下面的定理将给出控制器的左素分解的形式.

定理 3 假设系统 L_1 和 L_2 分别有右素分解 $L_1 = N_1M_1^{-1}$ 和 $L_2 = N_2M_2^{-1}$, 其中 $M_i, N_i, X_i, Y_i \in \mathcal{S}$ 满足 Bezout 方程 $X_iN_i + Y_iM_i = I\,(i = 1, 2)$. 定义 $A = Y_1M_2 + X_1N_2, \hat{B} = L_2M_1 - N_1$. 如果系统 L_1 和 L_2 可被同时强镇定, 且 A 在 $\mathcal{S}$ 中可逆, 则同时镇定系统 L_1 和 L_2 的所有控制器 $C \in \mathcal{S}$ 有如下形式的左素分解:

$$C(Q) = (Y_1 + QL_2)^{-1}(X_1 - Q), \tag{18}$$

其中 $Q \in \{Q \in \mathcal{S} : (I + Q\hat{B})^{-1} \in \mathcal{S}\}$.

3 同时鲁棒强镇定

给定系统 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, 且 L_1, L_2 是不确定的, 它们在某个集合 B 中. 所谓鲁棒同时镇定问题, 是寻找一共同的控制器 C 使得系统 $L_1, L_2 \in B$ 都可镇定. 应用定理 2 的结果, 下面的定理将给出同时鲁棒强镇定的一个结论.

定理 4 假设系统 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ 是可镇定的, 且分别有左素分解 $L_1 = \hat{M}_1{}^{-1}\hat{N}_1$ 和 $L_2 = \hat{M}_2{}^{-1}\hat{N}_2$. $\hat{A}, B$ 如定理 2 所定义. 令 $s = \max\{\|\hat{A}^{-1}\|, \|(I + BQ)^{-1}\|\}$, 且 $C = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 + L_2Q \\ \hat{X}_1 - Q \end{bmatrix}, Q \in \{Q \in \mathcal{S} : (I+BQ)^{-1} \in \mathcal{S}\}$. 如果 $\left\| \begin{bmatrix} \hat{Y}_1 + L_2Q \\ \hat{X}_1 - Q \end{bmatrix} \right\| \leqslant \dfrac{1}{rs}$, 则对于所有满足条件: 1) $\Delta\hat{M}, \Delta\hat{N} \in \mathcal{S}$, 2) $\|[-\Delta\hat{N}, \Delta\hat{M}]\| < r$ 的 $[-\Delta\hat{N}, \Delta\hat{M}]$, $C \in \mathcal{S}$ 同时镇定 $[-\hat{N}_1 + \Delta\hat{N}, \hat{M}_1 + \Delta\hat{M}]$ 和 $[-\hat{N}_2 + \Delta\hat{N}, \hat{M}_2 + \Delta\hat{M}]$.

证明 应用引理 1 以及 $L_i = \hat{M}_i{}^{-1}\hat{N}_i, i = 1, 2$, 只要证明 $[\hat{N}_i - \Delta\hat{N}, \hat{M}_i + \Delta\hat{M}]\begin{bmatrix} \hat{X}_1 - Q \\ \hat{Y}_1 + L_2Q \end{bmatrix}$ 是可逆的即可. 由于

$$[\hat N_1-\Delta\hat N,\hat M_1+\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}=$$
$$(I+BQ)+[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}=$$
$$(I+BQ)\Big\{I+$$
$$(I+BQ)^{-1}[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}\Big\};$$
$$[\hat N_2-\Delta\hat N,\hat M_2+\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}=$$
$$(\hat M_2\hat Y_1+\hat N_2\hat X_1)+[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}=$$
$$\hat A+[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}=$$
$$\hat A\Big\{I+\hat A^{-1}[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}\Big\}.$$

$I+BQ$ 和 $\hat A$ 在 $\mathcal S$ 中可逆, 只需证明

$$I+(I+BQ)^{-1}[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}$$

和

$$I+\hat A^{-1}[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}$$

在 $\mathcal S$ 中都可逆. 因为 $\mathcal S$ 是一个 Banach 代数, 由假设知

$$\Big\|(I+BQ)^{-1}[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}\Big\|\leqslant$$
$$\|(I+BQ)^{-1}\|\cdot\|[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\|\cdot\Big\|\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}\Big\|<$$
$$sr\cdot\frac{1}{rs}=1,$$
$$\Big\|\hat A^{-1}[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}\Big\|\leqslant$$
$$\|\hat A^{-1}\|\cdot\|[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\|\cdot\Big\|\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}\Big\|<$$
$$sr\cdot\frac{1}{rs}=1,$$

因此, 由引理 3 可知

$$I+(I+BQ)^{-1}[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}$$

和

$$I+\hat A^{-1}[-\Delta\hat N,\Delta\hat M]\begin{bmatrix}\hat X_1-Q\\ \hat Y_1+L_2Q\end{bmatrix}$$

在 $\mathcal S$ 中都可逆. 从而 $C\in\mathcal S$ 同时镇定 $[-\hat N_1+\Delta\hat N,\hat M_1+\Delta\hat M]$ 和 $[-\hat N_2+\Delta\hat N,\hat M_2+\Delta\hat M]$. □

4 例 子

下面通过例子来说明定理 2 的可行性和有效性.

例 1 考虑如下的两个离散时变线性系统:

$$L_1=\begin{bmatrix}4&&&&\\-16&4&&&\\64&-16&4&&\\-256&64&-16&4&\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix},$$
$$L_2=\begin{bmatrix}2&&&&\\&2&&&\\&&\ddots&&\\&&&2&\\&&&&\ddots\end{bmatrix}.$$

容易验证系统 L_1 和 L_2 分别有左素分解 $L_1=\hat M_1^{-1}\hat N_1$ 和 $L_2=\hat M_2^{-1}\hat N_2$, 其中

$$\hat N_1=I,\ \hat M_1=\begin{bmatrix}1/4&&&&\\1&1/4&&&\\&\ddots&\ddots&&\\&&1&1/4&\\&&&\ddots&\ddots\end{bmatrix},$$
$$\hat N_2=I,\ \hat M_2=\begin{bmatrix}1/2&&&&\\&1/2&&&\\&&\ddots&&\\&&&1/2&\\&&&&\ddots\end{bmatrix}=\frac12 I.$$

令

$$S=\begin{bmatrix}0&&&&\\1&0&&&\\&\ddots&\ddots&&\\&&1&0&\\&&&\ddots&\ddots\end{bmatrix},$$

有 $\hat M_1=\frac14 I+S$. 选择 $\hat X_1=\frac34 I-S$, $\hat Y_1=I$, 使得

$$\hat N_1\hat X_1+\hat M_1\hat Y_1=I.$$

因此

$$\hat A=\hat N_2\hat X_1+\hat M_2\hat Y_1=\frac54 I-S,$$
$$B=\hat M_1L_2-\hat N_1=2S-\frac12 I.$$

选择 $Q\in\mathcal S$ 且 $\|Q\|<2/5$ 时, $I+BQ$ 是可逆的算子. 于是同时镇定系统 L_1 和 L_2 的所有控制器 C 具有如下形式:

$$C=(\hat X_1-Q)(\hat Y_1+L_2Q)^{-1}=$$
$$\Big(\frac34 I-S-Q\Big)(I+2Q)^{-1}.$$

如果令 $Q=-\frac14 I$, 则 $I+BQ=\frac98 I-\frac12 S$ 是可逆的且

系统 L_1 和 L_2 的一个稳定控制器具有如下形式:

$$C = (\hat{X}_1 - Q)(\hat{Y}_1 + L_2 Q)^{-1} = 2I - 2S.$$

关于定理 4 的有效性, 通过下面的例子加以说明.

例 2 考虑线性系统 L_1 和 L_2 如例 1 所定义, 且系统 L_1 和 L_2 分别有左素分解 $L_1 = \hat{M}_1^{-1}\hat{N}_1$ 和 $L_2 = \hat{M}_2^{-1}\hat{N}_2$, 其中 $\hat{M}_1, \hat{N}_1, \hat{M}_2, \hat{N}_2, \hat{X}_1, \hat{Y}_1$ 如例 1 所给出.

取 $r = 1$, $Q = \dfrac{1}{5}I$, 则 $s = \max\{\|\hat{A}^{-1}\|, \|(I + BQ)^{-1}\|\} = 10/9$, L_1 和 L_2 的一个稳定控制器具有如下形式:

$$C = (\hat{X}_1 - Q)(\hat{Y}_1 + L_2 Q)^{-1} = \frac{11}{28}I - \frac{5}{7}S.$$

易得 $\|C\| = \dfrac{5}{7} < \dfrac{1}{rs}$, 对于所有的 $[-\Delta\hat{N}, \Delta\hat{M}]$, 满足条件 $\Delta\hat{M}, \Delta\hat{N} \in \mathcal{S}$, 且 $\|[-\Delta\hat{N}, \Delta\hat{M}]\| < 1$, 从而易知 C 同时强镇定 $[-\hat{N}_1 + \Delta\hat{N}, \hat{M}_1 + \Delta\hat{M}]$ 和 $[-\hat{N}_2 + \Delta\hat{N}, \hat{M}_2 + \Delta\hat{M}]$.

5 结 论

本文在套代数框架下, 针对只有左互素或者右互素分解的两个时变线性系统, 设计了所有的镇定控制器. 同时, 应用所得到的控制器的参数化, 进一步研究了一类鲁棒镇定问题. 数值例子表明了本文方法的有效性和可行性.

参考文献(References)

[1] Saeks R, Murray J. Fractional representation algebraic geometry and the simultaneous stabilization problem[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(4): 895-903.

[2] Vidyasagar M, Viswanadham N. Algebraic design techniques for realiable stabilization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(5): 1085-1095.

[3] Chosh B K. Transcendental and interpolation methods in simultaneous stabilization and simultaneous partial pole placement problems[J]. SIAM J of Control Optimization, 1986, 24(6): 1091-1109.

[4] Hiroshi I, Rixat A, Satoru T. Doubly coprime representation of linear systems and its application to simultaneous stabilization[J]. IMA J of Mathematical Control and Information, 2003, 20(1): 21-35.

[5] Blondel V. Simultaneous stabilization of linear systems[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.

[6] Blondel V, Campion G, Gevers M. A sufficient condition for simultaneous stabilization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1993, 38(8): 1264-1266.

[7] Blondel V, Gevers M, Mortini R. Simultaneous stabilization of three or more systems: Conditions on the real axis do not suffice[J]. SIAM J of Control Optimization, 1994, 32(2): 572-590.

[8] Abdallah C, Dorato P, Bredemann M. New sufficient conditions for strong simultaneous stabilization[J]. Automatica, 1997, 33(6): 1193-1196.

[9] Quadrat A. On a general structure of the stabilizing controllers based on stable range[J]. SIAM J of Control Optimization, 2004, 42(6): 2264-2285.

[10] Savkin A V, Petersen I R. A method for simultaneous strong stabilization of linear time-varying systems[J]. Int J of Systems Science, 2000, 31(6): 685-689.

[11] Lu Yufeng, Xu Xiaoping. Simultaneous stabilization for a family of plants[J]. J of Mathematical Research & Exposition, 2008, 28(3): 529-534.

[12] Yu Tian Qiu. The transitivity in simultaneous stabilization[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(1): 1-6.

[13] Yu Tian Qiu, Yan Han. Simultaneous controller design for time-varying linear systems[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(12): 1032-1037.

[14] Dale W, Smith M. Stabilizability and existence of system representations for discrete-time time-varying systems[J]. SIAM J of Control Optimization, 1993, 31(6): 1538-1557.

[15] Quadrat A. The fractional representation approach to synthesis problems: An algebraic analysis viewpoint, Part I: (Weakly) doubly coprime factorizations[J]. SIAM J of Control Optimization, 2003, 42(1): 266-299.

[16] Quadrat A. The fractional representation approach to synthesis problems: An algebraic analysis viewpoint, Part II: Internal stabilization[J]. SIAM J of Control Optimization, 2003, 42(1): 300-320.

[17] Feintuch A. Robust control theorey in hilbert space[M]. New York: Springer, 1998.

[18] Lu Yufeng, Xu Xiaoping. The stabilization problem for discrete time-varying linear systems[J]. Systems & Control Letters, 2008, 57(11): 936-939.

[19] Liu Liu, Lu Yufeng. Stability analysis for time-varyiny systems via quadratic constraints[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(10): 832-839.

[20] Lu Yufeng, Gong Ting. On stabilization for discrete linear time-varying systems[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(12): 1024-1031.

[21] 刘浏, 卢玉峰. 时变系统的模型匹配与跟踪问题[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(3): 302-308.
(Liu L, Lu Y F. Suboptimal model-matching and tracking problem of time-varying systems[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(3): 302-308.)

(责任编辑: 李君玲)