第 30 卷 第 10 期　　控 制 与 决 策　　2015 年 10 月
Vol. 30 No. 10　　Control and Decision　　Oct. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 10-1873-06　　DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1455

转移概率部分未知的随机 Markov 饱和切换系统的非脆弱镇定

刘殿军[1], 齐文海[2], 高宪文[2]

(1. 鞍钢集团 弓长岭矿业公司，辽宁 辽阳 111007；2. 东北大学 信息科学与工程学院，沈阳 110004)

摘　要: 研究一类转移概率部分未知的随机 Markov饱和切换系统的非脆弱镇定问题. 基于参数依赖型Lyapunov函数, 设计非脆弱状态反馈控制器以保证闭环饱和系统的随机稳定性, 在此基础之上, 通过求解线性矩阵不等式, 得到均方意义下的最大不变吸引域. 数值仿真验证了所提出方法的有效性.

关键词: Markov；转移概率部分未知；饱和系统；随机稳定性；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273　　**文献标志码:** A

Non-fragile stabilization for stochastic system with Markov switching under partly unknown transition rates and actuator saturation

LIU Dian-jun[1], *QI Wen-hai*[2], *GAO Xian-wen*[2]

(1. Gongchangling Mineral Company，Ansteel Group Coproration，Liaoyang 111007，China；2. College of Information Science and Engineering，Northeastern University，Shenyang 110004，China．Correspondent：QI Wen-hai，E-mail: qiwhtanedu@163.com)

Abstract: The problem of non-fragile stabilization for the stochastic system with Markovian switching under partly unknown transition rates and actuator saturation is considered . By employing the parameter-dependent Lyapunov methodology, the non-fragile state feedback controller is proposed to guarantee the stochastic stability of the resulting closed-loop saturated system. Based on the obtained results, sufficient conditions with LMI constraints are established to acquire the largest contraction invariant set in the mean square sense. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Markov；partly unknown transition rates；actuator saturation；stochastic stability；LMI

0　引　言

作为一类特殊的混杂系统, Makov 切换系统的研究得到了广泛的关注[1-2]. 由于受到突发因素的影响, 许多实际的工业控制过程可以描述为Markov 切换系统, 例如经济系统, 网络控制系统和故障容错系统等. 作为关键性的因素, 转移概率决定 Markov 切换系统的系统性能. 然而, 直到现在, 关于 Markov 切换系统的文献大都建立在转移概率完全已知的情况下. 由于控制系统的复杂性, 获得全部的转移概率是不太可能的. 近年来, 关于部分未知转移概率的 Markov 切换系统已有部分文献报道[3-8]. 同时, 作为一类特殊的非线性现象, 基于执行器物理性能的限制或者安全因素的考虑, 执行器饱和现象经常出现在控制系统中, 导致系统的性能下降或者失控. 对于执行器饱和控制的问题, 人们进行了大量的研究, 并取得了许多丰硕的成果[9-11].

近年来, 由于随机系统在控制领域的广泛应用, 对于其问题的研究已成为热点, 例如可靠控制[12]、扰动抑制[13]和多时滞控制[14]. 然而, 关于随机 Markov 饱和切换系统的文献却很少. 文献 [15] 针对部分转移概率未知的随机 Markov 分布时滞饱和系统, 设计了记忆状态反馈控制器.

本文针对一类随机 Markov 饱和切换系统, 在转移概率部分未知的情况下, 考虑控制器的增益波动, 基于参数依赖型 Lyapunov 函数, 设计了非脆弱控制器, 保证了系统的随机稳定性, 并得到了均方稳定意义下的最大不变吸引域. 最后, 通过数值算例验证了所提出方法的有效性.

收稿日期: 2014-09-21；**修回日期:** 2015-03-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61433004).

作者简介: 刘殿军 (1973−), 男, 高级工程师, 硕士, 从事矿山机电控制系统的研究；高宪文 (1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂工业控制系统建模以及随机系统的控制等研究.

1 系统描述

考虑如下随机 Markov 饱和切换系统:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x(t)=\\&[A(g_t)x(t)+B(g_t)\sigma(u(t))]\mathrm{d}t+W(g_t)x(t)\mathrm{d}\omega(t),\\&x(t_0)=x_0,\ g_{t_0}=g_0,\ t_0=0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $x(t)\in\boldsymbol{R}^n$、$u(t)\in\boldsymbol{R}^m$、$w(t)\in\boldsymbol{R}^s$ 为系统的状态、控制输入和标准的维纳过程. 连续时间 Markov 跳变过程为 $\{g_t|g_t=1,2,\cdots,N,t\geqslant 0\}$. 定义 $S=\{1,2,\cdots,N\}$. 函数 $\sigma(\cdot):R^m\to R^m$ 是标准的向量饱和函数, 即

$$\sigma(u)=[\sigma^{\mathrm{T}}(u_1)\quad\sigma^{\mathrm{T}}(u_2)\quad\cdots\quad\sigma^{\mathrm{T}}(u_m)]^{\mathrm{T}}.$$

其中: $\sigma(u_i)=\sin g(u_i)\min\{1,|u_i|\}$, $\sigma(\cdot)$ 为符号函数. 转移概率表示如下:

$$P\{g_{t+\Delta t}=j|g_t=i\}=\begin{cases}\pi_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\ i\neq j;\\1+\pi_{ij}\Delta t+o(\Delta t),\ i=j.\end{cases}$$

其中

$$\Delta t\geqslant 0,\ \lim_{\Delta t\to 0}(o(\Delta t)/\Delta t)=0;$$

$$\pi_{ij}\geqslant 0,\ i\neq j;\ \sum_{j=1,i\neq j}^{N}\pi_{ij}=-\pi_{ii}.$$

转移概率为部分未知, 意味着转移概率矩阵 $\varPi=\{\pi_{ij}\}$ 中的元素只有部分已知. 对于 $\forall i\in S$, 定义 $S^i=S_k^i\bigcup S_{uk}^i$, 其中

$$S_k^i\triangleq\{j:\pi_{ij}\ \text{is known, for}\ j\in S\},$$

$$S_{uk}^i\triangleq\{j:\pi_{ij}\ \text{is unknown, for}\ j\in S\}.$$

若 $S^i\neq\varnothing$, 则可描述为

$$S_k^i\triangleq\{k_1^i,k_2^i,\cdots,k_m^i\},\ 1\leqslant m\leqslant N,$$

其中 $k_m^i\in S$ 表示矩阵 $\varPi$ 第 i 行中序号为 S_k^i 的第 m 个已知元素.

设计非脆弱状态反馈控制器为

$$u(t)=(K(g_t)+\triangle K(g_t))x(t).\tag{2}$$

其中: $K(g_t)$ 为控制器增益, $\triangle K(g_t)$ 为控制器增益波动. 假设控制器增益波动满足

$$\triangle K(g_t))=H_k(g_t)F_k(g_t,t)M_k(g_t).\tag{3}$$

其中: $H_k(g_t)$ 和 $M_k(g_t)$ 为已知的适当维数的常数矩阵, 满足

$$F_k^{\mathrm{T}}(g_t,t)M_k(g_t)F_k(g_t,t)M_k(g_t)\leqslant I.\tag{4}$$

注 1 由于实际过程中的复杂性, 设计精确的状态反馈控制器是不现实的. 本文考虑了控制器的增益波动, 设计了非脆弱状态反馈控制器, 这有助于提高系统的鲁棒性.

为便于记忆, 定义 $g_t=i$. 基于非脆弱状态反馈控制器 (2), 得到以下闭环随机 Markov 饱和切换系统:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x(t)=\\&[A_ix(t)+B_i\sigma((K_i+\triangle K_i)x(t))]\mathrm{d}t+W_ix(t)\mathrm{d}\omega(t),\\&x(t_0)=x_0,\ g_{t_0}=g_0,\ t_0=0.\end{aligned}\tag{5}$$

定义 1[7] 在任意的初始模态 $g_t\in S$, 初始状态 $x_0\in\ell$, $\ell\subset\boldsymbol{R}^n$ 下, 存在一个正的标量参数 $T(x_0,g_0)$, 使得

$$\begin{aligned}&\lim_{T_f\to\infty}E\Big\{\int_0^{T_f}x^{\mathrm{T}}(t,x_0,g_0)x(t,x_0,g_0)\mathrm{d}t|(x_0,g_0)\Big\}<\\&T(x_0,g_0),\end{aligned}\tag{6}$$

那么集合 $\ell\subset\boldsymbol{R}^n$ 被称为随机 Markov 切换系统 (5) 均方意义下的吸引区域.

注 2 由定义 1 可以看出, 如果系统的初始状态在吸引区域内, 则系统 (5) 在原点处是随机稳定的.

定义 2[7] 定义随机 Markov 饱和切换系统 (5) 的 Lyapunov 函数为 $V(x(t),i)$, 其无穷小算子为

$$\begin{aligned}&\varGamma V(x(t),i)=\\&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[E\{V(x(t+\Delta t),g(t+\Delta t))|x(t),\\&g(t)=i)\}-V(x(t),g(t)=i)].\end{aligned}$$

对于任意矩阵, 定义椭圆

$$\xi(P_i)=\{x(t)\in\boldsymbol{R}^n:x^{\mathrm{T}}(t)P_ix(t)\leqslant 1\}.$$

引理 1[9] 对于任意的矩阵 K_i, $F_i\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$, 如果 $x(t)\in\varPsi(F_i)$, 则 $\sigma(K_ix(t))$ 可表示为

$$\sigma(K_ix(t))=\sum_{v=1}^{2^m}\eta_v(U_vK_i+U_v^-F_i)x(t).$$

其中

$$\begin{aligned}&\psi(F_i)=\\&\{x(t)\in\boldsymbol{R}^n:|f_{ij}x(t)|\leqslant 1,\ j=1,2,\cdots,m\},\end{aligned}$$

f_{ij} 为矩阵 F_i 的第 j 行; U_v, $U_v^{-1}=I-U_v\in\wp$, $v=1,2,\cdots,2^m$, $\wp$ 为 $m\times m$ 的对角矩阵的集合, 其对角线上的元素为 1 或者 0; η_v 为标量, 并且 $0\leqslant q\eta_v\leqslant 1$, $\sum_{v=1}^{2^m}\eta_v=1$.

注 3 引理 1 采用了饱和设计方法中的直接设计法—— 凸多面体方法, 可以利用矩阵不等式的方法求解控制器.

引理 2[11] 对于任意适当维数的矩阵 T, M 和 N, 以及满足 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$ 的矩阵 F, 有

$$\begin{aligned}&T+MFN+N^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\leqslant\\&T+\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}N^{\mathrm{T}}N,\ \varepsilon>0.\end{aligned}\tag{7}$$

2 主要结论

下面将考虑闭环系统 (5) 的随机稳定性、非脆弱状态反馈控制器的设计和最大不变吸收域的估计.

2.1 随机稳定性分析

定理 1　对于系统 (5), 如果存在正标量 ε_i, 矩阵 F_i, 正定对称矩阵 P_i 和对称矩阵 Q_i, 使得下列条件成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & M_{ki}^{\mathrm{T}} & \varepsilon_i P_i B_i U_v H_{ki} \\ * & -\varepsilon_i & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i \end{bmatrix} < 0; \tag{8}$$

$$P_j - Q_i \leqslant 0,\ j \in S_{uk}^i,\ j \neq i; \tag{9}$$

$$P_j - Q_i \geqslant 0,\ j \in S_{uk}^i,\ j = i; \tag{10}$$

$$\xi(P_i) \in \psi(F_i). \tag{11}$$

其中

$$\Pi_1 = (A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i)^{\mathrm{T}} P_i + \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i) + P_i(A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i) + W_i^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} P_i W_i.$$

则存在非脆弱状态反馈控制器 (2), 使初始状态属于集合 $\bigcap_{i=1}^{N} \xi(P_i)$ 的系统 (5) 随机稳定.

证明　对于系统 (5), 选择 Lyapunov 函数

$$V(x(t), i) = x^{\mathrm{T}}(t) P(g_t) x(t), \tag{12}$$

其中 $P(g_t) > 0$. 由式 (12) 可知, 如果

$$x(t) \in \bigcap_{i=1}^{N} \xi(P_i),$$

则可得 $x(t) \in \psi(F_i)$. 由定义 2 可得

$$\begin{aligned} &\Gamma V(x(t), i) = \\ &\Big[A_i^{\mathrm{T}} P_i + P_i A_i + P_i B_i \sigma(K_i + \triangle K_i) + \\ &\sigma^{\mathrm{T}}(K_i + \triangle K_i) B_i^{\mathrm{T}} P_i + W_i^{\mathrm{T}} P_i W_i + \sum_{j \in S} \pi_{ij} P_j\Big] x(t) = \\ &\sum_{v=1}^{2^m} \eta_v x^{\mathrm{T}}(t) \Big[(A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i)^{\mathrm{T}} P_i + \\ &P_i(A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i) + \\ &P_i B_i U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki} + (B_i U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki})^{\mathrm{T}} P_i + \\ &W_i^{\mathrm{T}} P_i W_i + \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i) + \\ &\sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i)\Big] x(t). \end{aligned} \tag{13}$$

其中: 对于任意的矩阵 Q_i, 有

$$\sum_{j \in S} \pi_{ij} Q_i = 0.$$

基于引理 2, 存在正标量 ε_i, 使得

$$\begin{aligned} &P_i B_i U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki} + (B_i U_v H_{ki} F_{ki}(t) M_{ki})^{\mathrm{T}} P_i \leqslant \\ &\varepsilon_i P_i B_i U_v H_{ki} H_{ki}^{\mathrm{T}} U_v B_i^{\mathrm{T}} P_i + \varepsilon_i^{-1} M_{ki}^{\mathrm{T}} M_{ki}, \end{aligned} \tag{14}$$

因此有下式成立:

$$\begin{aligned} &\Gamma V(x(t), i) \leqslant \\ &\sum_{v=1}^{2^m} \eta_v x^{\mathrm{T}}(t) \Big[(\varepsilon_i P_i B_i U_v H_{ki} H_{ki}^{\mathrm{T}} U_v B_i^{\mathrm{T}} P_i + \\ &\varepsilon_i^{-1} M_{ki})^{\mathrm{T}} M_{ki} + (A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i)^{\mathrm{T}} P_i + \\ &P_i(A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i) + W_i^{\mathrm{T}} P_i W_i + \\ &\sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i) + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i)\Big] x(t) = \\ &\sum_{v=1}^{2^m} \eta_v x^{\mathrm{T}}(t) \Pi_{ij} x(t), \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned} &\Pi_{ij} = \\ &\varepsilon_i P_i B_i U_v H_{ki} H_{ki}^{\mathrm{T}} U_v B_i^{\mathrm{T}} P_i + \varepsilon_i^{-1} M_{ki}^{\mathrm{T}} M_{ki} + \\ &(A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i)^{\mathrm{T}} P_i + \\ &P_i(A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i) + W_i^{\mathrm{T}} P_i W_i + \\ &\sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i) + \sum_{j \in S_{uk}^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i). \end{aligned}$$

注意到 $\pi_{ij} \geqslant 0\ (\forall i, j \in S,\ i \neq j)$ 和 $j \in S_{uk}^i$, 如果 $i \in S_k^i$, 则根据不等式 (8) 和 (9) 可得 $\Pi_{ij} < 0$. 若 $i \in S_{uk}^i$, 则可计算

$$\begin{aligned} &\Pi_{ij} = \\ &\varepsilon_i P_i B_i U_v H_{ki} H_{ki}^{\mathrm{T}} U_v B_i^{\mathrm{T}} P_i + \varepsilon_i^{-1} M_{ki}^{\mathrm{T}} M_{ki} + \\ &(A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i)^{\mathrm{T}} P_i + \\ &P_i(A_i + B_i U_v K_i + B_i U_v^- F_i) + W_i^{\mathrm{T}} P_i W_i + \\ &\sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i) + \sum_{j \in S_{uk}^i, j \neq i} \pi_{ij}(P_j - Q_i) + \\ &\pi_{ii}(P_i - Q_i). \end{aligned}$$

由不等式 (8) ∼ (10) 同样可得 $\Pi_{ij} < 0$. 由此可得

$$\Gamma V(x(t), i) \leqslant -\min_{i \in S}[\lambda_{\min}(-\Pi_{ij})] x^{\mathrm{T}}(t) x(t),$$

因此有

$$\lim_{T_f \to \infty} E\Big\{\int_0^{T_f} x^{\mathrm{T}}(t, x_0, g_0) x(t, x_0, g_0) \mathrm{d}t | (x_0, g_0)\Big\} < T(x_0, g_0). \qquad \square$$

注 4　定理 1 利用了转移概率内部的性质, 应用了自由权矩阵 Q_i, 在一定程度上降低了保守性.

注 5　定理 1 包含了转移概率完全已知、部分未知和全部未知的 3 种情况, 当转移概率完全已知时, 自由权矩阵 Q_i 不起作用, 不等式 (9) 和 (10) 不存在, Π_1 中的 $\sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i)$ 项被 $\sum_{j \in S} \pi_{ij} P_j$ 代替. 当转移概率全部未知时, Π_1 中的 $\sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij}(P_j - Q_i)$ 项不存在. 由此可见, 只有当转移概率为部分未知和全部未知时,

自由权矩阵 Q_i 才起作用.

2.2 状态反馈控制器设计和吸引域估计

一般而言, 即使是简单的系统, 要想获得精确的吸引域也是很难的, 所以要对吸引域进行估计. 先用收缩性不变集估计吸引域, 然后在吸引域中求解出最大的一个作为系统的吸引域估计值, 引入形状参考集. 对于一个包含原点的集合 $\ell \subset \boldsymbol{R}^n$, 定义

$$\alpha_R(\ell) := \sup\{\alpha > 0 : \alpha X_R \subset \ell\},$$

如果 $\alpha_R(\ell) > 1$, 则 $X_R \subset \ell$. 由此易知 $\alpha_R(\ell)$ 中反应集合 ℓ 的大小.

考虑形状参考集类型为多面体, 即

$$X_R = C_0\{x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^\rho\}.$$

其中: $x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^\rho$ 为给定的 n 维向量; C_0 表示这组向量凸包.

定理 1 给出了随机稳定的充分条件. 为了求得非脆弱状态反馈控制器 (2) 和最大不变吸引域, 需要将上述条件转化为易于求解的线性矩阵不等式形式. 为了验证给定的初始状态 $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ 是否位于 $x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^\rho$ 内, 需求解下列凸优化问题:

$$\begin{aligned}
&\sup\ \ \alpha;\\
&\alpha,\ \varepsilon_i,\ P_i > 0,\ F_i, Q_i.\\
&\text{s.t.}\ \ 1)\ \alpha x_0^g \subset \bigcap_{i=1}^{N} \xi(P_i);\\
&\qquad 2)\ \text{不等式}\ (8) \sim (10);\\
&\qquad 3)\ |F_{iq}x(t)| \leqslant 1,\ \forall x(t) \in \xi(P_i).
\end{aligned} \tag{16}$$

其中: f_{ij} 为矩阵 F_i 的第 j 行, $i = 1, 2, \cdots, N$, $g = 1, 2, \cdots, \rho$, $l = 1, 2, \cdots, m$, $v = 1, 2, \cdots, z^m$. 当且仅当式 (11) 满足时, 式 (16) 中的条件 3) 成立. 如果 $\alpha_{\max} > 1$, 则初始状态 x_0 在凸集 C_0 中. 定义

$$\begin{aligned}
&\beta = \alpha^{-2},\ X_i = P_i^{-1},\ Y_i = K_i X_i,\\
&R_i = F_i X_i,\ V_i = X_i Q_i X_i.
\end{aligned} \tag{17}$$

通过分析可知, 条件 1) 等价于 $\alpha^2 (x_0^g)^{\mathrm T} P_i x_0^g \leqslant 1$, $g = 1, 2, \cdots, \rho$, 由 Schur 补, 可一步转化为

$$\begin{bmatrix} -\beta & (x_0^g)^{\mathrm T} \\ * & -X_i \end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{18}$$

同时, 条件 3) 等价于

$$\begin{bmatrix} -X_i & R_{iq}^{\mathrm T} \\ * & -I \end{bmatrix} \leqslant 0,\ q = 1, 2, \cdots, m, \tag{19}$$

其中 R_{iq} 为矩阵 R_i 的第 q 行.

对于不等式 (8), 左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{X_i, I, I\}$, 可得

$$\begin{bmatrix} \varPi_2 & X_i M_{ki}^{\mathrm T} & \varepsilon_i B_i U_v H_{ki} \\ * & -\varepsilon_i & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i \end{bmatrix} < 0, \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\varPi_2 =\\
&X_i A_i^{\mathrm T} + Y_i^{\mathrm T} U_v B_i^{\mathrm T} + R_i^{\mathrm T} U_v^{-1} B_i^{\mathrm T} + A_i X_i +\\
&B_i U_v Y_i + B_i U_v^{-1} R_i + X_i W_i^{\mathrm T} X_i^{-1} W_i X_i +\\
&\sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} X_i X_j^{-1} X_i - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_i.
\end{aligned}$$

在下面的分析中, 将不等式 (20) 分成两种情况.

情况 1 对于 $i \in S_k^i$, 不等式 (20) 等价于

$$\begin{bmatrix} \varPi_3 & X_i M_{ki}^{\mathrm T} & \varepsilon_i B_i U_v H_{ki} & X_i W_i^{\mathrm T} & \varPi_4 \\ * & -\varepsilon_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -X_i & 0 \\ * & * & * & * & \varPi_5 \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\varPi_3 =\\
&X_i A_i^{\mathrm T} + Y_i^{\mathrm T} U_v B_i^{\mathrm T} + R_i^{\mathrm T} U_v^{-1} B_i^{\mathrm T} + A_i X_i +\\
&B_i U_v Y_i + B_i U_v^{-1} R_i + \pi_{ii} X_i - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_i,\\
&\varPi_4 =\\
&[\sqrt{\pi_{ik_1^i}} X_i, \cdots, \sqrt{\pi_{ik_{r-1}^i}} X_i, \sqrt{\pi_{ik_{r+1}^i}} X_i, \cdots,\\
&\sqrt{\pi_{ik_m^i}} X_i],\\
&\varPi_5 = \mathrm{diag}\{X_{k_1^i}, \cdots, X_{k_{r-1}^i}, X_{k_{r+1}^i}, \cdots, X_{k_m^i}\}.
\end{aligned}$$

情况 2 对于 $i \notin S_k^i$, 不等式 (20) 等价于

$$\begin{bmatrix} \tilde\varPi_3 & X_i M_{ki}^{\mathrm T} & \varepsilon_i B_i U_v H_{ki} & X_i W_i^{\mathrm T} & \tilde\varPi_4 \\ * & -\varepsilon_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -X_i & 0 \\ * & * & * & * & \tilde\varPi_5 \end{bmatrix} < 0, \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\tilde\varPi_3 =\\
&X_i A_i^{\mathrm T} + Y_i^{\mathrm T} U_v B_i^{\mathrm T} + R_i^{\mathrm T} U_v^{-1} B_i^{\mathrm T} + A_i X_i +\\
&B_i U_v Y_i + B_i U_v^{-1} R_i - \sum_{j \in S_k^i} \pi_{ij} V_i,\\
&\tilde\varPi_4 = \qquad\qquad (23)\\
&[\sqrt{\pi_{ik_1^i}} X_i, \sqrt{\pi_{ik_2^i}} X_i, \cdots, \sqrt{\pi_{ik_m^i}} X_i],\\
&\tilde\varPi_5 = \mathrm{diag}\{X_{k_1^i}, X_{k_2^i}, \cdots, X_{k_m^i}\}. \qquad (24)
\end{aligned}$$

对于不等式 (9), 左乘和右乘 X_i, 可得

$$\begin{bmatrix} -V_i & X_i \\ * & -X_j \end{bmatrix} \leqslant 0,\ j \in S_{uk}^i,\ j \neq i. \tag{25}$$

对于不等式 (10), 左乘和右乘 X_i, 可得

$$X_j - V_j \geqslant 0,\ j \in S_{uk}^i,\ j = i.$$

综上所述, 可得到下列优化问题:

$$\begin{aligned}&\min\ \ \beta;\\&\beta,\ \varepsilon_i,\ X_i>0,\ R_i,\ V_i,\ Y_i.\\&\text{s.t. 不等式 (18)} \sim (19), (21) \sim (24).\end{aligned} \tag{26}$$

如果 $\beta_{\min} < 1$ (意味着 $\alpha_{\max} > 1$), 则基于模态的非脆弱控制器 (2) 会使初始状态属于 C_0 的系统 (5) 随机稳定. 同时, 非脆弱状态反馈控制器增益为 $K_i = Y_i X_i^{-1}$.

3 数值仿真

四模态随机 Markov 饱和切换系统参数如下:

模态 1 为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2.4 & -0.6 \\ 0.1 & -1.2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ W_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 0.5 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix},$$

$$H_{k1} = [0.5\ \ 0],\ M_{k1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix};$$

模态 2 为

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2.1 & -0.2 \\ 0.2 & -1.5 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ W_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$H_{k2} = [1\ \ 0],\ M_{k2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

模态 3 为

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3.1 & 0.1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_{k3} = [1\ \ 0.5],\ M_{k3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

模态 4 为

$$A_4 = \begin{bmatrix} -3.1 & 0.4 \\ 0.3 & -1.2 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_{k4} = [0.5\ \ 0],\ M_{k4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

初始条件和转移概率矩阵为

$$x_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ g_0 = 2,\ \begin{bmatrix} -1 & ? & ? & 0.5 \\ ? & ? & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & ? & -1 & ? \\ 0.5 & ? & 0.9 & ? \end{bmatrix}.$$

求解凸优化问题 (25) 可得

$$\beta_{\min} = 1.223\,979\text{e-}008 < 1$$

和控制器增益为

$$K_1 = [-0.093\,8\ \ -0.387\,8],$$

$$K_2 = [-0.954\,2\ \ -2.481\,3],$$

$$K_3 = [-1.221\,4\ \ -4.271\,1],$$

$$K_4 = [-0.251\,7\ \ -1.191\,3].$$

假定转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} -1 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & -1.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 & -1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 & 0.9 & -2 \end{bmatrix}.$$

求解凸优化问题 (25) 可得

$$\beta_{\min} = 8.836\,197\text{e-}009 < 1$$

和控制器增益

$$K_1 = [-0.065\,8\ \ -0.286\,6],$$

$$K_2 = [-0.891\,5\ \ -2.175\,9],$$

$$K_3 = [-0.996\,0\ \ -3.230\,3],$$

$$K_4 = [-0.073\,9\ \ -0.329\,5].$$

图 1∼图 3 为闭环系统的转移概率部分未知系统模态、状态轨迹和控制输入. 由图 1∼图 3 可见, 所求解的非脆弱状态反馈控制器可使初始状态属于凸集, 使得初始状态属于 $C_0\{x_0^1\}$ 的系统 (5) 随机稳定.

注 6　从求解的吸引域 $\beta_{\min} = 8.836\,197\text{e-}009 < 1$ 可以看出, 转移概率矩阵获得的信息越多, 计算求得的吸引域就越大.

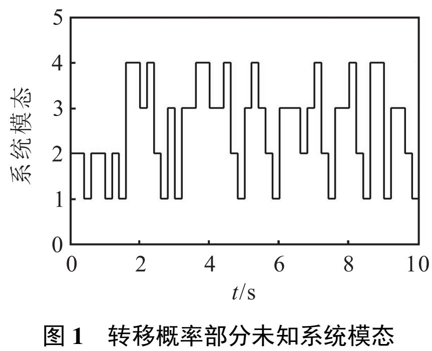

图 1　转移概率部分未知系统模态

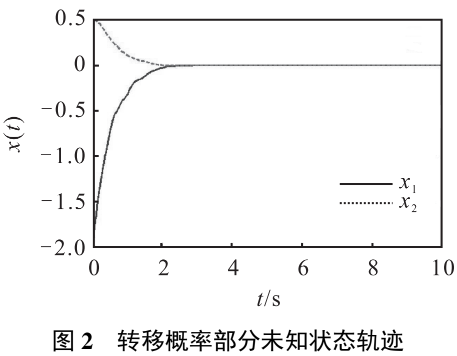

图 2　转移概率部分未知状态轨迹

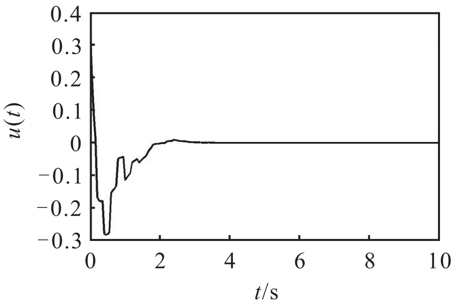

图 3 转移概率部分未知控制输入

4 结 论

针对部分转移概率部分未知的随机 Markov 饱和切换系统, 本文采用椭圆不变集构造系统均方意义下的稳定域, 完成了非脆弱状态反馈控制器的设计. 在线性矩阵不等式的框架下, 实现了控制器和最大吸引域的求解. 数值仿真进一步验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Mao X R. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching[J]. Stochastic Process and their Applications, 1999, 79(1): 45-67.

[2] Guan X P, Wu J, Long C N. Resilient guaranteeed cost control for uncertain discrete linear jump systems[J]. Int J of Systems Science, 2003, 34(4): 283-292.

[3] Zhang L X, Boukas E K. Stability and stabilization for Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities[J]. Automatica, 2009, 45(2): 463-468.

[4] Ding Y C, Zhu H, Zhong S M. H_∞ filtering for stochastic systems with Markovian switching and partly unknown transition probabilities[J]. Circuits Systems and Signal Process, 2013, 32(2): 559-583.

[5] Liu Y Q, Liu F. Disturbance rejection for Markov jump systems with partly unknown transition probabilities and saturation[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2013, 32(6): 2783-2797.

[6] Zhao J J, Wang J, Shen H. Dynamic anti-windup control design for Markovian jump delayed systems with input saturation[J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2013, 32(5): 2213-2229.

[7] Hu T, Lin Z, Chen B. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance[J]. Automatica, 2002, 38(2): 351-359.

[8] Wei Y L, Qiu J B, Karimi H R, et al. A new design of H_∞ filtering for continuous-time Markovian jump systems with time-varying delay and partially accessible mode information[J]. Signal Processing, 2013, 93(9): 2392-2407.

[9] Wei Y L, Qiu J B, Karimi H R, et al. H-infinity model reduction for continuous-time Markovian jump systems with incomplete statistics of mode information[J]. Int J of Systems Science, 2014, 45(7): 1496-1507.

[10] Hu T, Lin Z, Chen B. Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation[J]. Systems & Control Letters, 2002, 45(2): 97-112.

[11] Liu H P, Sun F, Boukas E K. Robust control of uncertain discrete-time Markovian jump systems with actuator saturation[J]. Int J of Control, 2006, 79(7): 352-358.

[12] Li J N, Pan Y J, Su H Y, et al. Stochastic reliable control of a class of networked control systems with actuator faults and input saturation[J]. Int J of Control, Automation and Systems, 2014, 12(3): 564-571.

[13] Song G F, Chen F, Xu S Y, et al. Disturbance tolerance and rejection of discrete-time stochastic systems with saturating actuators[J]. J of the Franklin Institute, 2013, 350(6): 1488-1499.

[14] Zhang M S. Robust stabilization for uncertain stochastic multiple time-delay systems with actuator saturation: An LMI approach[J]. Procedia Engineering, 2012, 29: 935-939.

[15] Zhao J J, Wang J, Park J H, et al. Memory feedback controller design for stochastic Markov jump distributed delay systems with input saturation and partially known transition rates[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2015, 15: 52-62.

(责任编辑: 滕 蓉)