第 30 卷 第 10 期
Vol. 30 No. 10

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 10 月
Oct. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 10-1841-06 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.1195

基于直接估计法的NGM(1,1) 模型拓展

童明余[1,2], 周孝华[1], 曾 波[3]

(1. 重庆大学 经济与管理学院，重庆 400040；2. 重庆师范大学 图书馆,
重庆 400047；3. 重庆工商大学 商务策划学院，重庆 400067)

摘 要: 从近似非齐次指数序列的GM(1,1) 模型时间响应函数出发, 推导累加序列间的函数递推关系, 并给出求解时间响应函数参数值的直接估计方法. 在此基础上, 构建一种能同时模拟近似齐次和近似非齐次指数序列的新NGM(1,1) 模型, 该模型避免了模型参数估计从差分方程到微分方程的跳跃性误差, 并从理论上解释了新模型能模拟齐次指数序列和非齐次指数序列的原因. 通过对新 NGM(1,1) 模型与既有模型进行比较, 表明了所提出模型具有更优良的模拟和预测性能.

关键词: 灰色系统；灰色预测模型；直接估计法；近似非齐次指数增长序列

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Expand of NGM(1,1) model based on the direct estimation method

TONG Ming-yu[1,2], *ZHOU Xiao-hua*[1], *ZENG Bo*[3]

(1. College of Economics and Business Adiministration，Chongqing University，Chongqing 400040，China；2. Library of Chongqing Normal University，Chongqing 400047，China；3. College of Business Planning，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China．Correspondent：TONG Ming-yu，E-mail：tongmy1230@163.com)

Abstract: The recursive relationship of the accumulative sequence is deduced according to the original sequence of non-homogeneous exponential of time response function of GM(1,1) model, and the direct estimation method is constructed to solve the parameters values of the time response function. Then, an NGM(1,1) model which can simulate approximate homogenous exponential sequence and approximate non-homogenous exponential sequence is proposed. This NGM(1,1) model avoids the jumping error of the model parameters estimation from difference equation to differential equation, and explains theoretically the reason for its capability of simulating the homogenous and non-homogenous exponential sequence. The results show that the simulation and prediction of the proposed model is more excellent through the comparison of the new NGM(1,1) and the existing models.

Keywords: grey theory；prediction model；direct estimation method；approximate non-homogenous exponential sequence

0 引 言

灰色预测模型因建模时所需样本量小、建模过程简单等优点, 广泛应用于工业、农业、医学、军事等领域[1]. GM(1,1) 模型是灰色预测模型的基础和核心, 但实际应用中发现 GM(1,1) 模型的预测精度不稳定, 许多学者从序列的光滑性[2-4]、初始值[5-8]、背景值[9-10]、灰导数[11-13]等方面对该模型进行了改进和拓展, 有效地提高了该模型的模拟和预测性能.

从模型时间响应函数的最终还原式可以看出, GM(1,1) 是纯指数模型, 其固有的建模机理导致该模型难以有效实现对近似非齐次指数增长序列的模拟. 然而, 现实生活中许多原始序列更符合近似非齐次指数序列特征, 因此, 如何提高 GM(1,1) 模型对近似非齐次指数序列的模拟和预测精度显得尤为重要.

近年来, 灰色研究者从 DGM(1,1) 模型的非齐次拓展、非齐次指数序列的齐次化转换和 GM(1,1) 模型

收稿日期: 2014-08-01；**修回日期:** 2014-10-28.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271226)；国家社科重点项目(14AJL015)；教育部人文社会科学研究一般项目(14YJAZH033)；中国博士后科学基金项目(2014M560712)；重庆市教委科学技术研究项目(KJ120706)；重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2014jcyjA00024).

作者简介: 童明余(1978−), 女, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论的研究；周孝华(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事经济系统分析、数量经济学等研究.

灰色影子方程的优化方法3个角度,对近似非齐次指数序列的灰色建模方法进行了研究.这些研究成果具体体现在以下3个方面:

1) 文献[14]通过对离散模型建模机理进行分析,构建适用于近似非齐次指数序列的NDGM(1,1)模型,给出了模型的参数求解公式和递推函数,从而将灰色预测模型的建模基础从齐次指数增长序列拓展到非齐次指数增长序列.

2) 文献[15]根据灰色系统理论差异信息原理,将近似非齐次指数增长序列通过累减生成转化为近似齐次指数增长序列,在此基础上构建了近似非齐次指数增长序列的间接DGM(1,1)模型;文献[16]针对建模序列的近似非齐次增长特征,提出了DGM(1,1)直接建模法,该方法实现了传统离散灰色预测模型对近似非齐次指数增长序列的模拟.

3) 文献[17-18]从GM(1,1)模型的建模原理出发,对GM(1,1)模型的灰色微分方程进行了优化,提出了近似非齐次指数增长序列的NGM(1,1)模型,运用最小二乘法对NGM(1,1)模型进行参数估计,得到了时间响应函数表达式,弥补了GM(1,1)模型不能对近似非齐次指数序列进行有效模拟的不足,拓展了GM(1,1)模型的应用范围.

上述3种模型将传统灰色预测模型建模对象从齐次指数增长序列拓展至非齐次指数增长序列,对拓展灰色模型应用范围、丰富和完善灰色预测模型理论体系具有重要意义.然而,文献[14]关于模型的推导缺乏理论依据,递推函数的还原式不具有明显的近似非齐次指数增长律的特性;文献[15]提出的间接DGM(1,1)模型对原序列的累减生成序列存在负数时模型失效;文献[17-18]提出的NGM(1,1)模型仍然以差分方程为建模基础进行参数估计,而时间响应函数由微分方程的解引申而来,从差分方程到微分方程存在跳跃性误差,可能导致模型模拟精度不高.

本文提出一种求解灰色微分方程参数的新思路,首先直接从适用于近似非齐次的GM(1,1)模型的白化微分方程的解出发,推导出原始序列的一次累加生成序列的递推方程组,利用克莱姆法则求解该方程组的系数,从而求出白化微分方程的参数.给出近似非齐次序列预测模型的具体表达式,避免了利用差分方程进行参数估计,而从微分方程得到时间响应函数的跳跃性误差,从理论上证明了优化后的模型对纯指数律序列以及完全非齐次指数序列能实现完全模拟.与已有文献中的算例进行比较,结果表明所提出模型对近似非齐次指数序列具有更高的模拟和预测精度.

1 NGM(1,1)模型参数的直接估计

文献[17-18]分别对NGM(1,1)模型进行了优化,但模型参数的求解仍然利用最小二乘原理对差分方程的系数进行参数估计,再将参数估计值代入从微分方程解得的时间响应函数中,这样得到的预测函数值不仅存在计算误差,还存在模型误差.鉴于此,本文直接从微分方程的时间响应函数出发,求解模型的参数估计值,再代入时间响应函数式,通过累减还原得到近似非齐次指数序列的预测表达式,避免模型参数估计值从差分方程到微分方程的跳跃性误差,这样得到的模拟值只存在计算误差而不存在模型误差.具体推导过程如下.

NGM(1,1)模型的时间响应式[18]为

$$x^{(1)}(t)=\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}-\frac{c}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(t-1)}+\frac{b}{a}t-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a},\quad t=2,3,\cdots,n. \tag{1}$$

还原式为

$$\hat{x}^{(0)}(t)=\hat{x}^{(1)}(t)-\hat{x}^{(1)}(t-1)=(1-\mathrm{e}^{a})\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}-\frac{c}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(t-1)}+\frac{b}{a}. \tag{2}$$

由式(1)可得

$$\begin{aligned}&x^{(1)}(t+1)=\\&\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}-\frac{c}{a}\Big)\mathrm{e}^{-at}+\frac{b}{a}(t+1)-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}=\\&\mathrm{e}^{-a}\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}-\frac{c}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(t-1)}+\frac{b}{a}(t+1)-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}=\\&\mathrm{e}^{-a}\Big[\Big(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}-\frac{c}{a}\Big)\mathrm{e}^{-a(t-1)}+\frac{b}{a}t-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}\Big]\to\\&-\mathrm{e}^{-a}\Big(\frac{b}{a}t-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}\Big)+\frac{b}{a}(t+1)-\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}=\\&\mathrm{e}^{-a}x^{(1)}(t)+\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-a})t+(1-\mathrm{e}^{-a})\Big(\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}\Big)+\frac{b}{a}.\end{aligned} \tag{3}$$

令

$$\alpha=\mathrm{e}^{-a},\ \beta=\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-a}),$$

$$\gamma=(1-\mathrm{e}^{-a})\Big(\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}\Big)+\frac{b}{a},$$

则式(3)可以表示为

$$x^{(1)}(t+1)=\alpha x^{(1)}(t)+\beta t+\gamma. \tag{4}$$

设 $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}$ 为方程(4)的参数估计值,以模拟值

$$\hat{x}^{(1)}(t+1)=\hat{\alpha}x^{(1)}(t)+\hat{\beta}t+\hat{\gamma}$$

代替 $x^{(1)}(t+1)$, $t=1,2,\cdots,n-1$, 得到误差平方和

$$S=\sum_{t=1}^{n-1}[x^{(1)}(t+1)-\hat{\alpha}x^{(1)}(t)-\hat{\beta}t-\hat{\gamma}]^2.$$

根据最小二乘法原理,使 S 最小的 $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ 和 $\hat{\gamma}$ 应满足

$$\frac{\partial S}{\partial\hat{\alpha}}=-2\sum_{t=1}^{n-1}[x^{(1)}(t+1)-\hat{\alpha}x^{(1)}(t)-\hat{\beta}t-\hat{\gamma}]x^{(1)}(t)=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial\hat\beta}=-2\sum_{t=1}^{n-1}[x^{(1)}(t+1)-\hat\alpha x^{(1)}(t)-\hat\beta t-\hat\gamma]t=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial\hat\gamma}=-2\sum_{t=1}^{n-1}[x^{(1)}(t+1)-\hat\alpha x^{(1)}(t)-\hat\beta t-\hat\gamma]=0.$$

化简后得到

$$\hat\alpha\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)^2+\hat\beta\sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t)+\hat\gamma\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)=\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1)x^{(1)}(t),$$

$$\hat\alpha\sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t)+\hat\beta\sum_{t=1}^{n-1}t^2+\hat\gamma\sum_{t=1}^{n-1}t=\sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t+1),$$

$$\hat\alpha\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)+\hat\beta\sum_{t=1}^{n-1}t+\hat\gamma(n-1)=\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1).$$

根据克莱姆法则解该非齐次方程组, 令

$$B=\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)^2 & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)\\ \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}t^2 & \sum_{t=1}^{n-1}t\\ \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}t & n-1\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1)x^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)\\ \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t+1) & \sum_{t=1}^{n-1}t^2 & \sum_{t=1}^{n-1}t\\ \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1) & \sum_{t=1}^{n-1}t & n-1\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)^2 & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1)x^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)\\ \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t+1) & \sum_{t=1}^{n-1}t\\ \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1) & n-1\end{bmatrix},$$

$$B_3=\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)^2 & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1)x^{(1)}(t)\\ \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}t^2 & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t+1)\\ \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}t & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1)\end{bmatrix}.$$

则非齐次方程组的解为

$$\hat\alpha=\frac{B_1}{B},\ \hat\beta=\frac{B_2}{B},\ \hat\gamma=\frac{B_3}{B}.$$

将 $\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma$ 代入可得

$$\alpha=\mathrm{e}^{-a},\ \beta=\frac{b}{a}(1-\mathrm{e}^{-a}),$$

$$\gamma=(1-\mathrm{e}^{-a})\Big(\frac{c}{a}-\frac{b}{a^2}\Big)+\frac{b}{a}.$$

得到参数 a, b, c 的估计值为

$$\hat a=-\ln\hat\alpha,\ \hat b=\frac{\hat a\hat\beta}{1-\hat\alpha},\ \hat c=\frac{\hat a\hat\gamma-\hat b}{1-\hat\alpha}+\frac{\hat b}{\hat a}.$$

将参数估计值代入还原式 (2), 可以得到原始序列的模拟和预测值.

2　模型性质

定理 1　设原始数据序列 $X^{(0)}=\{q,q^2,q^3,q^4,q^5,\cdots\}$, 其中 $x^{(0)}(t)=q^t$, $t=1,2,\cdots,n$. $\hat x^{(0)}(t)$ 为新 NGM(1,1) 模型的模拟值, 则 $\hat x^{(0)}(t)=q^t$, $t=2,3,\cdots,n$.

证明　由 $x^{(0)}(t)=q^t$ 可知, 1-AGO 生成序列为

$$x^{(1)}(t+1)=\sum_{i=1}^{t+1}x^{(0)}(i)=\frac{q(1-q^{t+1})}{1-q}=\frac{q^2-q^{t+2}+q-q^2}{1-q}\rightarrow$$

$$x^{(1)}(t+1)=q\frac{q(1-q^t)}{1-q}+q=qx^{(1)}(t)+q.$$

将 $x^{(1)}(t+1)=qx^{(1)}(t)+q$ 代入行列式 B_1, 可得

$$B_1=\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1)x^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)\\ \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t+1) & \sum_{t=1}^{n-1}t^2 & \sum_{t=1}^{n-1}t\\ \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t+1) & \sum_{t=1}^{n-1}t & n-1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n-1}(qx^{(1)}(t)+q)x^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)\\ \sum_{t=1}^{n-1}t(qx^{(1)}(t)+q) & \sum_{t=1}^{n-1}t^2 & \sum_{t=1}^{n-1}t\\ \sum_{t=1}^{n-1}(qx^{(1)}(t)+q) & \sum_{t=1}^{n-1}t & n-1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n-1}qx^{(1)}(t)^2+\sum_{t=1}^{n-1}qx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)\\ \sum_{t=1}^{n-1}qtx^{(1)}(t)+\sum_{t=1}^{n-1}qt & \sum_{t=1}^{n-1}t^2 & \sum_{t=1}^{n-1}t\\ \sum_{t=1}^{n-1}qx^{(1)}(t)+q(n-1) & \sum_{t=1}^{n-1}t & n-1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{n-1}qx^{(1)}(t)^2 & \sum_{t=1}^{n-1}tx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}x^{(1)}(t)\\ \sum_{t=1}^{n-1}qtx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}t^2 & \sum_{t=1}^{n-1}t\\ \sum_{t=1}^{n-1}qx^{(1)}(t) & \sum_{t=1}^{n-1}t & n-1\end{bmatrix}=qB.$$

同理可得 $B_2=0$, $B_3=qB$, 则

$$\hat\alpha=\frac{B_1}{B}=q,\ \hat\beta=\frac{B_2}{B}=0,\ \hat\gamma=\frac{B_3}{B}=q.$$

将其代入可得

$$\hat{a}=-\ln\hat{\alpha},\ \hat{b}=\frac{\hat{a}\hat{\beta}}{1-\hat{\alpha}},\ \hat{c}=\frac{\hat{a}\hat{\gamma}-\hat{b}}{1-\hat{\alpha}}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}.$$

计算得到

$$\hat{a}=-\ln q,\ \hat{b}=0,\ \hat{c}=\frac{q\ln q}{q-1}.$$

将估计值代入还原式(2), 化简得

$$\hat{x}^{(0)}(t)=q^t,\ t=2,3,\cdots,n. \qquad \square$$

定理1表明, 当原始序列为齐次指数增长序列时, 新NGM(1,1)模型退化为GM(1,1)模型, 可以将GM(1,1)模型作为新NGM(1,1)模型的特殊形式.

定理2 设原始数据序列 $X^{(0)}=\{c_1+c_2q, c_1+c_2q^2, c_1+c_2q^3, c_1+c_2q^4, c_1+c_2q^5,\cdots\}$. 其中: $c_1>0$, $c_2>0$; $x^{(0)}(t)=c_1+c_2q^t$, $t=1,2,\cdots,n$; $\hat{x}^{(0)}(t)$ 为新NGM(1,1)模型的模拟值, 且 $\hat{x}^{(0)}(t)=c_1+c_2q^t$, $t=2,3,\cdots,n$.

证明 由 $x^{(0)}(t)=c_1+c_2q^t$ 可知, 1-AGO生成序列为

$$\begin{aligned}
&x^{(1)}(t+1)=\sum_{i=1}^{t+1}x^{(0)}(i)=\\
&c_1(t+1)+c_2(q+q^2+\cdots+q^{t+1})=\\
&c_1(t+1)+c_2\frac{q-q^{t+2}+q^2-q^2}{1-q}=\\
&c_1(t+1)+c_2\Big[q\frac{q(1-q^t)}{1-q}+q\Big]=\\
&c_1(t+1)+q(x^{(1)}(t)-c_1t)+c_2q=\\
&qx^{(1)}(t)+c_1(1-q)t+(c_1+c_2q).
\end{aligned}$$

将 $x^{(1)}(t+1)=qx^{(1)}(t)+c_1(1-q)t+(c_1+c_2q)$ 代入行列式 B_1、B_2、B_3, 得到

$$B_1=qB,\ B_2=c_1(1-q)B,\ B_3=(c_1+c_2q)B.$$

则有

$$\hat{\alpha}=\frac{B_1}{B}=q,\ \hat{\beta}=\frac{B_2}{B}=c_1(1-q),\ \hat{\gamma}=\frac{B_3}{B}=c_1+c_2q.$$

将其代入可得

$$\hat{a}=-\ln\hat{\alpha},\ \hat{b}=\frac{\hat{a}\hat{\beta}}{1-\hat{\alpha}},\ \hat{c}=\frac{\hat{a}\hat{\gamma}-\hat{b}}{1-\hat{\alpha}}+\frac{\hat{b}}{\hat{a}}.$$

计算得到

$$\hat{a}=-\ln q,\ \hat{b}=-c_1\ln q,\ \hat{c}=c_1+\frac{c_2q\ln q}{q-1}.$$

将估计值代入还原式(2), 化简得到

$$\hat{x}^{(0)}(t)=c_1+c_2q^t,\ t=1,2,\cdots,n. \qquad \square$$

定理2表明, 新NGM(1,1)模型能够完全模拟非齐次指数增长序列, 而GM(1,1)模型不具有该性质.

3 模型比较分析

案例1 由模型性质可知, 原始序列为齐次指数增长序列和完全非齐次指数增长序列时, 新NGM(1,1)模型可以对建模序列实现完全模拟. 从新NGM(1,1)模型的时间响应函数表达式可看出, 新NGM(1,1)模型更符合具有近似非齐次指数增长特征的建模序列, 对近似非齐次指数增长序列的模拟应该获得更高的模拟精度. 下面运用GM(1,1)模型、DGM(1,1)模型和新NGM(1,1)模型分别对齐次指数增长序列($X_1: x_k=3^k$)、完全非齐次指数增长序列($X_2: x_k=3^k+2$)和近似非齐次指数增长序列($X_3: x_k\approx 1.4^k+1$)进行建模, 新NGM(1,1)模型对 X_1、X_2 和 X_3 进行模拟时, 参数估计值和时间响应函数为

$$\begin{aligned}
X_1:\ &\hat{\alpha}=3,\ \hat{\beta}=0,\ \hat{\gamma}=3,\\
&\hat{a}=-\ln 3,\ \hat{b}=0,\ \hat{c}=1.5\ln 3,\\
&\hat{x}^{(0)}(k)=3^k;\\
X_2:\ &\hat{\alpha}=3,\ \hat{\beta}=-4,\ \hat{\gamma}=5,\\
&\hat{a}=-\ln 3,\ \hat{b}=-2\ln 3,\ \hat{c}=1.5\ln 3+2,\\
&\hat{x}^{(0)}(k)=3^k+2;\\
X_3:\ &\hat{\alpha}=1.368\,2,\ \hat{\beta}=0.065\,8,\ \hat{\gamma}=1.418\,1,\\
&\hat{a}=-0.313\,5,\ \hat{b}=0.056\,0,\ \hat{c}=1.180\,9,\\
&\hat{x}^{(0)}(k)=1.591\,8\mathrm{e}^{0.313\,5(t-1)}-0.178\,6.
\end{aligned}$$

序列 X_3 参数值的求解过程如下: 将序列 X_3 及其累加序列值代入行列式 B、B_1、B_2 和 B_3, 求出行列式的值 $B=18.14$, $B_1=24.82$, $B_2=1.193\,0$, $B_3=25.724$. 根据推导可求出 $\hat{\alpha}=1.368\,2$, $\hat{\beta}=0.065\,8$, $\hat{\gamma}=1.418\,1$, $\hat{a}=-0.313\,5$, $\hat{b}=0.056\,0$, $\hat{c}=1.180\,9$, 代入还原式(2)得到预测模型. 实验结果如表1所示.

由表1可见, 新NGM(1,1)模型对于齐次指数序列和完全非齐次指数序列均能实现完全模拟, 对于近似非齐次指数序列, 新NGM(1,1)模型具有更高的模

表1 3种模型模拟值与相对误差比较

序列	建模数据	模型	模拟数据	平均相对误差/%
X_1	3, 9, 27, 81,243	GM(1,1)	3.000 0, 7.732 3, 21.018 5, 57.134 2, 155.306 8	25.447 7
		DGM(1,1)	3.000 0,9.000 0,27.000 0,81.000 0,243.000 0	0.000 0
		新NGM(1,1,k)	3.000 0,9.000 0,27.000 0,81.000 0, 243.000 0	0.000 0
X_2	5, 11, 29, 83, 245	GM(1,1)	5.000 0,7.556 0, 20.095 8, 53.446 7, 142.146 3	36.188 8
		DGM(1,1)	5.000 0, 8.730 8, 25.443 7, 74.149 0, 216.087 4	13.839 3
		新NGM(1,1,k)	5.000 0, 11.000 0, 29.000 0, 83.000 0,245.000 0	0.000 0
X_3	1.4, 2.0, 2.8, 3.9, 5.4	GM(1, 1)	1.400 0, 1.990 6, 2.759 8, 3.826 2, 5.304 8	1.390 2
		DGM(1,1)	1.400 0, 2.011 7, 2.797 4, 3.889 8, 5.408 8	0.832 5
		新NGM(1,1,k)	1.400 0,1.999 4,2.801 4,3.898 8,5.400 3	0.088 2

表 2　两种模型对序列 X 的模拟误差比较

序号	实际数据	NHGM(1,1,k) 模型		新 NGM(1,1) 模型	
		模拟数据	相对误差/%	模拟数据	相对误差/%
2	4.32	4.19	2.93	4.32	0
3	7.05	6.17	4.69	7.05	0
4	12.02	11.24	6.51	12.02	0
5	21.09	19.23	8.28	21.09	0
6	37.60	33.83	10	37.60	0
平均相对误差 / %		6.482		0	

表 3　两种模型对序列 Y 的模拟误差比较

序号	实际数据	NHGM(1,1,k) 模型		新 NGM(1,1) 模型	
		模拟数据	相对误差/%	模拟数据	相对误差/%
2	4.82	4.59	4.75	4.71	1.46
3	7.05	6.99	0.77	7.53	2.53
4	12.52	11.37	9.12	11.68	1.75
5	21.09	19.37	8.09	21.84	0.58
6	38.10	33.96	10.84	37.75	0.08
平均相对误差 / %		6.714		1.28	

拟精度.

案例 2　为了将本文提出的新 NGM(1,1) 模型与 NHGM(1,1,k) 模型[19]的模拟和预测性能作比较, 借用文献中的两组数据分别进行建模, 同样利用前面 6 个数据建立灰色预测模型, 对第 7 个数据进行预测. 原始数据如下: 完全非齐次序列为

$$X=(\mathrm{e}^{0.6\times1}+1,\mathrm{e}^{0.6\times2}+1,\mathrm{e}^{0.6\times3}+1,\mathrm{e}^{0.6\times4}+1,\\ \mathrm{e}^{0.6\times5}+1,\mathrm{e}^{0.6\times6}+1,\mathrm{e}^{0.6\times7}+1);$$

近似非齐次序列为

$$Y=(\mathrm{e}^{0.6\times1}+1,\mathrm{e}^{0.6\times2}+1.5,\mathrm{e}^{0.6\times3}+1,\mathrm{e}^{0.6\times4}+1.5,\\ \mathrm{e}^{0.6\times5}+1,\mathrm{e}^{0.6\times6}+1.5,\mathrm{e}^{0.6\times7}+1).$$

新 NGM(1,1) 模型对序列 X、Y 进行模拟的时间响应函数分别为

$$\hat{x}^{(0)}(t)=\mathrm{e}^{0.6(t-1)}+1,\ t=2,3,\cdots,6;$$

$$\hat{y}^{(0)}(t)=2.598\,4\mathrm{e}^{0.619\,3(t-1)}+1.657\,2,\ t=2,3,\cdots,6.$$

模拟结果如表 2 和表 3 所示. 两个模型分别对序列 X 和序列 Y 进行模拟时, 实际数据与模拟数据对比关系如图 1 和图 2 所示. 由表 2 和表 3 可见, 无论是完全非齐次指数序列 (如序列 X) 还是近似非齐次指数序列 (如序列 Y), NHGM(1,1,k) 模型的平均相对误差均大于 5%, 查精度对照表属于 II 级, 用于预测时误差较大; 新 NGM(1,1) 模型的平均相对误差均小于 2%, 查精度对照表属于 I 级, 完全可以用于预测, 两种模型对完全非齐次序列和近似非齐次序列的预测性能见表 4 和表 5. 由表 4 和表 5 可见, 从预测误差角度分析, NHGM(1,1,k) 模型对完全非齐次指数增长序列和近似非齐次指数增长序列的预测误差均达到 10% 以上, 预测能力不足; 新 NGM(1,1) 模型在预测性能方面比 NHGM(1,1,k) 模型有大幅提高.

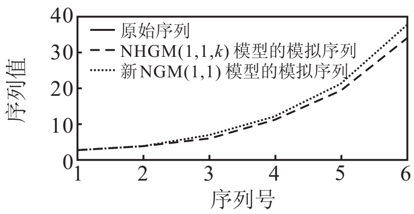

图 1　非齐次指数序列 X 模拟性能对比

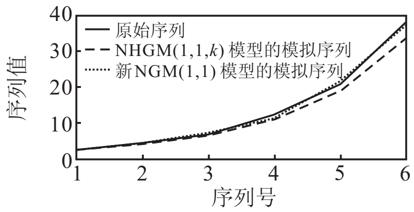

图 2　非齐次指数序列 Y 模拟性能对比

表 4　两种模型对序列 X 的预测性能比较

实际数据	NHGM(1,1,k) 模型		新 NGM(1,1) 模型	
	模拟数据	相对误差/%	模拟数据	相对误差/%
67.69	59.8	11.65	67.69	0

表 5　两种模型对序列 Y 的预测性能比较

实际数据	NHGM(1,1,k) 模型		新 NGM(1,1) 模型	
	模拟数据	相对误差/%	模拟数据	相对误差/%
67.69	60.57	10.51	69.23	2.28

4　结　　论

本文以近似非齐次指数 GM(1,1) 模型为研究基础, 提出了一种求解模型参数的新方法, 避免了模型参数求解从差分方程到微分方程的跳跃性误差, 并推导了模型参数的求解过程, 给出了模型序列预测值的具体表达式. 从理论上解释了新 NGM(1,1) 模型对齐次指数增长序列和完全非齐次指数增长序列都能实现完全模拟, 新 NGM(1,1) 模型是传统 GM(1,1) 模型的一般形式. 通过与既有文献中算例对模型的有效性

进行验证, 结果表明, 新 NGM(1,1) 模型比 NHGM(1,1) 模型具有更高的模拟和预测精度.

参考文献(References)

[1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第 5 版. 北京: 科学出版社, 2010: 3-4.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Gray system theories and its applications[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 3-4.)

[2] 王正新, 党耀国, 裴玲玲. 缓冲算子的光滑性[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1643-1649.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L. The smoothness of buffer operators[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(9): 1643-1649.)

[3] 戴文战, 苏永. 缓冲算子调节度与光滑度的关系[J]. 控制与决策, 2014, 29(1): 158-162.
(Dai W Z, Su Y. Relationship between regulation degree and smoothness of buffer operators[J]. Control and Decision, 2014, 29(1): 158-162.)

[4] 曾波, 刘思峰. 基于振幅压缩的随机振荡序列预测模型[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(11): 2493-2497.
(Zeng B, Liu S F. Predietion model of stoehastic oseillation sequenee based on amplitude compression[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(11): 2493-2497.)

[5] 姚天祥, 刘思峰, 党耀国. 初始值优化的离散灰色预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2394-2398.
(Yao T X, Liu S F, Dang Y G. Discrete grey prediction model based on optimized initial value[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2394-2398.)

[6] 谢乃明, 刘思峰. 离散灰色模型的拓展及其最优化求解[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(6): 108-112.
(Xie N M, Liu S F. Research on extension of discrete grey model and its optimize formula[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2006, 26(6): 108-112.)

[7] Dang Y G, Liu S F, Chen K J. The models that be taken as initial value[J]. Kybernetes, 2004, 33(2): 247-254.

[8] Wang Y H, Dang Y G, Li Y Q, et al. An approach to increase prediction precise of GM(1,1) model based on optimization of the initial condition[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37(8): 5640-5644.

[9] 罗党, 刘思峰, 党耀国. 灰色模型 GM(1,1) 优化[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 50-53.
(Luo D, Liu S F, Dang Y G. Optimization of grey model GM(1,1)[J]. Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53.)

[10] 谭冠军. GM(1,1) 模型的背景值构造方法和应用[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 98-103.
(Tan G J. The structure method and application of background value in grey system GM(1,1) model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(4): 98-103.)

[11] 李玻, 魏勇. 优化灰导数后的新的 GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(2): 100-104.
(Li B, Wei Y. Optimizes grey derivative of GM(1,1)[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2009, 29(2): 100-104.)

[12] 王义闹, 李应川, 陈智洁. 逐步优化灰导数白化值的 GM(1,1) 直接建模法[J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(3): 54-57.
(Wang Y N, Li Y C, Chen Z J. A direct modeling method of GM(1,1) with a step by step optimum grey derivative's whitening values[J]. J of Huazhong University of Science & Technology, 2001, 29(3): 54-57.)

[13] 陈芳, 魏勇. 近非齐次指数序列 GM(1,1) 模型灰导数的优化[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2876-2878.
(Chen F, Wei Y. Approximate non-homogeneous index sequence GM(1,1) model of grey derivative optimization[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(11): 2876-2878.)

[14] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-98.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-98.)

[15] 曾波, 刘思峰. 近似非齐次指数增长序列的间接 DGM(1,1) 模型分析[J]. 统计与信息论坛, 2010, 25(8): 30-33.
(Zeng B, Liu S F. Analysis of indirect DGM(1,1) model non-homogeneous exponential incremental sequences[J]. Statistics & Information Forum, 2010, 25(8): 30-33.)

[16] 曾波, 刘思峰. 近似非齐次指数序列的 DGM(1,1) 直接建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(2): 297-301.
(Zeng B, Liu S F. Direct modeling approach of DGM(1,1) with approximate non-homogerieous exponential sequence[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2011, 31(2): 297-301.)

[17] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1702-1706.)

[18] 崔兴凯, 路秀英. 基于 NGM(1,1,*k*) 模型的农产品产量预测方法[J]. 微电子学与计算机, 2011, 28(8): 201-207.
(Cui X K, Lu X Y. Farm productivity prediction method using the NGM(1,1,*k*) model[J]. Microelectronics & Computer, 2011, 28(8): 201-207.)

[19] 战立青, 施化吉. 近似非齐次指数数据的灰色建模方法与模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(3): 659-694.
(Zhan L Q, Shi H J. Methods and model of grey modeling for approximation non-homogenous exponential data[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(3): 659-694.)

(责任编辑：郑晓蕾)