文章编号: 1001-0920 (2015) 10-1828-07 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.1098

基于多等级方案成对比较的决策方法

付 超, 侯 震
(合肥工业大学 a. 管理学院，b. 过程优化与智能决策教育部重点实验室，合肥 230009)

摘 要: 为了解决现有的方案两两比较方法一般构建单等级上的比较关系, 且不能同时表达多种不同偏好关系的不足, 提出一种新的基于多等级方案成对比较的决策方法, 构建方案集上基于对称框架的分布式多等级偏好关系. 通过设定各等级的得分值, 计算分布式偏好关系的得分矩阵, 并基于此矩阵构建成对优化模型, 求取各方案的优先权区间, 进而产生决策结果. 将所提出的方法应用于某制造企业云服务供应商的选择问题, 验证了所提出方法的应用性和有效性.

关键词: 方案成对比较；分布式偏好关系；多等级；优先权区间；得分矩阵
中图分类号: C934；N945.25 **文献标志码:** A

Decision method based on pairwise comparison of alternatives on multiple grades

FU Chao, *HOU Zhen*
(a. School of Management，b. Key Laboratory of Process Optimization and Intelligent Decision-making, Ministryof Education，Hefei University of Technology，Hefei 230009，China．Correspondent：FU Chao，E-mail: chaofu@hfut.edu.cn)

Abstract: To address the shortcomings of existing methods of pairwise comparison of alternatives generally constructing comparison relation on one grade rather than expressing a variety of different preference relations simultaneously, a new decision method based on pairwise comparison of alternatives on multiple grades is proposed. In the method, a symmetrical framework based distributed preference relation(DPR) on multiple grades is constructed on a set of alternatives. Through giving scores of grades in the framework, the score matrix of the DPR is calculated and used to construct a pair of optimization models to obtain the priority interval of any alternative, which is further applied to generate decision results. A selection problem of cloud service providers in a manufacturing enterprise is solved by using the proposed method, which verifies its applicability and effectiveness.

Keywords: pairwise comparison of alternatives；distributed preference relation；multiple grades；priority interval；score matrix

0 引 言

面向不确定性问题的分析和求解催生并发展了不确定性决策方法. 当前各种不确定决策方法大多集中于基偏好决策研究, 大体上可分为绝对基偏好和相对基偏好两类. 两类方法都有其实用性、合理性和科学性. 与决策环境、决策问题的特征、决策相关的数据和信息、决策者的决策行为偏好等紧密相关.

一般而言, 在多数决策环境中, 决策者更易给出相对基偏好, 即直接对方案进行成对比较. 层次分析法[1]和模糊偏好关系[2]定义了两种经典的相对基偏好表示方法. 层次分析法运用 5 标度表达决策者对成对方案间的不同偏好程度, 形成判断矩阵, 通过进行一致性检验确定各方案的重要性. 模糊偏好关系运用 $[0, 1]$ 区间的连续值表示决策者对成对方案间的不同偏好程度. 两种不同的偏好表示形式可以进行等价转换[2], 区别在于前者遵循乘性一致性约束, 后者遵循加性一致性约束. Szmidt 等[3]将直觉模糊集和模糊偏好关系进行综合, 提出了直觉模糊偏好关系, 同时考

收稿日期: 2014-07-13；**修回日期:** 2014-10-17.
基金项目: 国家自然科学基金项目(71201043)；教育部人文社科基金项目(12YJC630046)；安徽省自然科学基金项目(1408085MG136).
作者简介: 付超(1978−), 男, 副教授, 博士, 从事决策理论与方法的研究；侯震(1989−), 男, 硕士生, 从事决策理论与方法的研究.

虑成对方案间的优于、劣于和不确定 3 种关系. 此后, 一些学者围绕直觉模糊偏好关系展开了一系列更为深入的研究[4-6]. 相比模糊偏好关系, 直觉模糊偏好关系为决策者给出偏好提供了更大的灵活性和实用性.

尽管直觉模糊偏好关系能较为灵活地刻画决策者的偏好, 但其本质上还是表示单等级偏好, 且不能同时表示优于、劣于、无差异和不确定 4 种关系. 当应对复杂情形时, 决策者需要考虑并综合成对方案间的多个方面或多位专家的意见, 形成最终的偏好. 对于决策者而言, 这并不是一件轻松的工作, 需要在多个方面或多位专家意见之间进行权衡.

为了克服上述不足, 本文提出一种新的相对基偏好表示方法, 在多个等级上同时刻画成对方案间的优于、劣于、无差异和不确定 4 种关系, 称为分布式偏好关系. 以下首先分析传统方案成对比较方法的不足, 进而针对不足介绍提出的分布式偏好关系, 以及基于此关系的决策方法, 最后将提出的决策方法应用于某制造企业的云服务提供商选择, 以验证所提出方法的有效性和合理性.

1 已有方案成对比较方法分析

1.1 已有方案成对比较方法

1.1.1 层次分析法

层次分析法是 Saaty[1]提出的一种方案成对比较方法, 使用 5 标度进行方案成对比较, 形成判断矩阵. 为了保证判断的有效性和合理性, Saaty 提出特征向量法和一致性比率进行判断矩阵的一致性检验, 之后诸多学者相继提出不同的矩阵一致性调整方法. 具体而言, 一致判断矩阵定义如下:

定义 1 设矩阵 $A=(a_{ij})_{N\times N}$, 若对于 $\forall\, a_{ij}$, 满足 $a_{ij}>0$ 且 $a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}}$, $i,j=1,2,\cdots,N$, 则称 A 为正互反判断矩阵.

定义 2 设矩阵 $A=(a_{ij})_{N\times N}$ 为正互反判断矩阵, 若 $\forall\, i,k,j=1,2,\cdots,N$, 有 $a_{ik}\cdot a_{kj}=a_{ij}$, 则 A 为完全一致矩阵.

1.1.2 模糊偏好关系

模糊偏好关系是另一种常用的方案成对比较方法. 类似于层次分析法, 任意成对方案间的模糊偏好关系形成判断矩阵. 在利用判断矩阵进行决策前, 需要进行一致性检验, 常见的检验包括三角一致性、弱一致性、最大-最大一致性、最大-最小一致性、乘性一致性和加性一致性[2]等. 目前研究较多的是加性一致性和乘性一致性检验, 其基本定义如下:

定义 3[2] 设矩阵 $R=(r_{ij})_{M\times M}$ 表示方案集 X 上的模糊二元关系, 对于 $\forall\, i,j=1,2,\cdots,M$, 有 $r_{ij}\in[0,1]$ 且 $r_{ij}+r_{ji}=1$, 则称其为互补模糊二元关系. 若 $\forall\, i,j,k=1,2,\cdots,M$, 满足 $r_{ij}\geqslant 0.5$, $r_{jk}\geqslant 0.5\Rightarrow r_{ik}\geqslant\min(r_{ij},r_{jk})$, 则称 $R=(r_{ij})_{M\times M}$ 为建立在方案集 X 上的满足最大-最小传递性的互补模糊二元关系, 或称其为模糊偏好序.

定义 4[2] 设 $R=(r_{ij})_{M\times M}$ 表示方案集 A 上的互补模糊二元关系, 若 $\forall\, i,j,k=1,2,\cdots,M$ 满足 $r_{ik}=r_{ij}+r_{jk}-0.5$, 则称矩阵 R 满足加性一致性.

定义 5[2] 设矩阵 $R=(r_{ij})_{M\times M}$ 表示方案集 X 上的互补模糊二元关系, 若 $\forall\, i,j,k=1,2,\cdots,M$, 满足 $r_{ij}>0$, 且 $\dfrac{1}{r_{ik}}-1=\Big(\dfrac{1}{r_{ij}}-1\Big)\Big(\dfrac{1}{r_{jk}}-1\Big)$, 则称矩阵 R 满足乘性一致性.

随着近年来对区间模糊集研究的深入, 区间模糊偏好关系也被越来越多地应用于实际决策问题中[7], 但其依然保留了传统模糊集的基本特性.

模糊偏好关系与层次分析法形成的两个判断矩阵可以进行相互转换, 并保留原始的一致性[7].

1.1.3 直觉模糊偏好关系

鉴于直觉模糊集在表示决策者偏好方面的灵活性, Szmidt 等[3]将直觉模糊集与模糊偏好关系相结合, 提出了直觉模糊偏好关系. 此后, Xu[4]对其进行了规范化的数理界定和延伸, 具体如下:

定义 6[4] 设矩阵 $R=(r_{ij})_{M\times M}$ 表示方案集 X 上的直觉模糊偏好关系, 其中 $r_{ij}=(\mu_{ij},v_{ij},\pi_{ij})$ 表示方案 i 与方案 j 之间的优于、劣于和不确定程度. $\forall\, i,j=1,2,\cdots,M$, r_{ij} 满足

$$\begin{cases}0\leqslant\mu_{ij}+v_{ij}\leqslant 1,\\ \mu_{ij}=v_{ji},\\ \mu_{ji}=v_{ij},\\ \pi_{ij}=\pi_{ji}=1-\mu_{ij}-v_{ij}=1-\mu_{ji}-v_{ji},\\ \mu_{ii}=v_{ii}=0.5,\\ \pi_{ii}=0.\end{cases}$$

由定义 6 可知, 当 $\pi_{ij}=0$ 时, 直觉模糊偏好关系退化为模糊偏好关系, 即直觉模糊偏好关系是模糊偏好关系的泛化.

1.2 已有方案成对比较方法的不足

由于层次分析法和模糊偏好关系形成的判断矩阵可以进行等价转换, 并且在一定情况下二者可以相互表示[8-9], 而直觉模糊偏好关系又可视为模糊偏好关系的泛化[10], 因此以下针对直觉模糊偏好关系分析已有方案成对比较方法的不足.

直觉模糊偏好关系通过引入不确定度 π_{ij} 为决策者表达偏好提供更大的自由度, 以应对更为复杂的决策环境. 之后, 相关学者又针对直觉模糊集的这一特点对其进行了多方面的延伸[11-13], 但就其本质而言,

仍存在两点不足:

1) 直觉模糊偏好关系建立在单等级而非多等级上;

2) 直觉模糊偏好关系不能同时刻画成对方案间的优于、劣于、无差异和不确定4种关系.

当决策者需要考虑诸多方面或综合多位专家的意见来形成最终的直觉模糊偏好关系时, 他将认为这是一件困难的任务. 而基于决策者自身的知识或经验将多个方面或多位专家的意见以多等级形式进行表达, 允许成对方案间存在优于、劣于、无差异和不确定4种关系, 是一种更为可行和有效的偏好表示方法. 鉴于此, 以下提出成对方案间的分布式偏好关系, 并依此构建决策方法.

2 基于分布式偏好关系的决策方法

2.1 成对方案间的分布式偏好关系

传统的证据理论[14-16]和区间证据理论[17]在识别框架 $\Omega=\{H_1,H_2,\cdots,H_N\}$ 上表示决策者的绝对基偏好, 可以视为一种分布式偏好. 借鉴此表示方法, 设计一种新的对称框架 $\Omega=\{H_{-N},H_{-N+1},\cdots,H_{-1},H_0,H_1,\cdots,H_N\}$, 用以表达决策者的相对基偏好. 其中, 等级 $H_1,H_2,\cdots,H_N$ 表示成对方案间由弱至强的优于程度, $H_{-1},H_{-2},\cdots,H_{-N}$ 表示成对方案间由弱至强的劣于程度, H_0 表示成对方案间的无差异度. 以 H_0 为中心, 两边等级呈对称性. 基于此对称框架, 定义成对方案间的分布式偏好关系, 如下所示.

定义7 设矩阵 $D=(d_{ij})_{M\times M}$ 表示方案集 X 上使用对称框架 $\Omega=\{H_{-N},H_{-N+1},\cdots,H_{-1},H_0,H_1,\cdots,H_N\}$ 的分布式偏好关系, 其中

$$d_{ij}=\{(H_n,b_{ij}(H_n)),\\ n=-N,-N+1,\cdots,-1,0,1,\cdots,N\},\\ i,j=1,2,\cdots,M.$$

满足

$$b_{ij}(H_n)\in[0,1],\\ b_{ij}(\Omega)\in[0,1],\\ \sum_{n=-N}^{N}b_{ij}(H_n)+b_{ij}(\Omega)=1.$$

这里, $b_{ij}(H_n)\,(n=1,2,\cdots,N)$、$b_{ij}(H_n)\,(n=-N,-N+1,\cdots,-1)$、$b_{ij}(H_0)$ 和 $b_{ij}(\Omega)$ 分别表示优于度、劣于度、无差异度和不确定度.

当决策者主观给出 d_{ij} 时, 定义7中的优于度、劣于度、无差异度和不确定度可以视为对应等级上的主观概率. 若根据客观数据得出 d_{ij}, 则它们可视为对应等级上的客观概率.

为了度量各等级的差异, 定义各等级上的得分值, 如下所示.

定义8 设 $\Omega=\{H_{-N},H_{-N+1},\cdots,H_{-1},H_0,H_1,\cdots,H_N\}$ 为表达定义7中分布式偏好关系的对称框架, 则其对应的等级得分值定义为

$$S_H=(S(H_{-N}),S(H_{-N+1}),\cdots,\\ S(H_{-1}),S(H_0),S(H_1),\cdots,S(H_N)),$$

满足:

1) $0<S(H_1)<S(H_2)<\cdots<S(H_N)=1$;

2) $S(H_0)=0$;

3) $-1=S(H_{-N})<S(H_{-(N-1)})<\cdots<S(H_{-1})<0$;

4) $S(H_n)+S(H_{-n})=0,\ n=1,2,\cdots,N$.

给定对称框架 Ω 上的 S_H, d_{ij} 对应的得分值 S_{ij} 计算如下:

$$S_{ij}=[s_{ij}^-,s_{ij}^+]=\\ \Big[\sum_{n=-N}^{N}S(H_n)\cdot b_{ij}(H_n)+S(H_{-N})\cdot b_{ij}(\Omega),\\ \sum_{n=-N}^{N}S(H_n)\cdot b_{ij}(H_n)+S(H_N)\cdot b_{ij}(\Omega)\Big]. \tag{1}$$

当 $b_{ij}(\Omega)=0$ 时, S_{ij} 退化为一实数. S_{ij} 具有以下性质.

性质1 $S_{ij}=[s_{ij}^-,s_{ij}^+]$ 和 $S_{ji}=[s_{ji}^-,s_{ji}^+]$ 为 Ω 上 d_{ij} 和 d_{ji} 的得分值, 则

$$s_{ij}^-\in[-1,1], \tag{2}$$

$$s_{ij}^+\in[-1,1], \tag{3}$$

$$S_{ji}=[-s_{ij}^+,-s_{ij}^-]. \tag{4}$$

证明 由定义7、定义8和式(1)可直接推出式(2)和(3)成立.

由式(1)可知

$$s_{ij}^-=\sum_{n=-N}^{N}S(H_n)\cdot b_{ij}(H_n)+S(H_{-N})\cdot b_{ij}(\Omega),$$

$$s_{ij}^+=\sum_{n=-N}^{N}S(H_n)\cdot b_{ij}(H_n)+S(H_N)\cdot b_{ij}(\Omega),$$

$$s_{ji}^-=\sum_{n=-N}^{N}S(H_n)\cdot b_{ji}(H_n)+S(H_{-N})\cdot b_{ji}(\Omega),$$

$$s_{ji}^+=\sum_{n=-N}^{N}S(H_n)\cdot b_{ji}(H_n)+S(H_N)\cdot b_{ji}(\Omega).$$

由 Ω 的对称性可知

$$b_{ij}(H_n)=b_{ji}(H_{-n}),\ n=1,2,\cdots,N;\\ b_{ij}(\Omega)=b_{ji}(\Omega).$$

又由定义8可知

$$S(H_n)+S(H_{-n})=0,$$

因此, 有

$$s_{ij}^{-}=\sum_{n=-N}^{N}S(H_n)\cdot b_{ij}(H_n)+S(H_{-N})\cdot b_{ij}(\Omega)=-\sum_{n=-N}^{N}S(H_n)\cdot b_{ji}(H_n)-S(H_N)\cdot b_{ji}(\Omega)=-s_{ji}^{+}.$$

类似地, 有 $s_{ij}^{+}=-s_{ji}^{-}$. □

2.2 决策方法

针对方案集 X, 决策者给出 Ω 上的分布式偏好关系矩阵 D, 以及 Ω 上的等级得分值 S_H, 可以根据式 (1) 计算得分值矩阵 S, 即

$$S=\begin{bmatrix} 0 & [S_{12}^{-},S_{12}^{+}] & \cdots & [S_{1M}^{-},S_{1M}^{+}] \\ [S_{21}^{-},S_{21}^{+}] & 0 & \cdots & [S_{2M}^{-},S_{2M}^{+}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [S_{M1}^{-},S_{M1}^{+}] & [S_{M2}^{-},S_{M2}^{+}] & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $d_{ii}=\{(H_0,1)\}$, 且 $S(H_0)=0$, 根据式 (1) 可得 $S_{ij}=0$.

由性质 1 可知, S 并非一个正规化矩阵. 由于 s_{ij}^{-}, $s_{ij}^{+}\in[-1,1]$, 可利用 $(s_{ij}^{-}+1)/2$ 和 $(s_{ij}^{+}+1)/2$ 对 S 进行正规化, 得到正规化得分矩阵

$$\bar{S}=(\bar{S}_{ij}=[\bar{s}_{ij}^{-},\bar{s}_{ij}^{+}])_{M\times M},$$

满足以下性质.

性质 2　若 $\bar{S}_{ij}=[\bar{s}_{ij}^{-},\bar{s}_{ij}^{+}]$ 和 $\bar{S}_{ji}=[\bar{s}_{ji}^{-},\bar{s}_{ji}^{+}]$ 为 Ω 上 d_{ij} 和 d_{ji} 的正规化得分值, 则

$$\bar{s}_{ij}^{-}+\bar{s}_{ji}^{+}=1, \tag{5}$$

$$\bar{s}_{ij}^{+}+\bar{s}_{ji}^{-}=1. \tag{6}$$

证明　由式 (4) 可知, $s_{ij}^{-}+s_{ji}^{+}=0$. 又

$$\bar{s}_{ij}^{-}+\bar{s}_{ji}^{+}=\frac{s_{ij}^{-}+1}{2}+\frac{s_{ji}^{+}+1}{2},$$

因此, 式 (5) 成立. 类似可推出式 (6) 成立. □

设方案集 X 中各方案的优先权向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_M)$, 满足 $\sum_{i=1}^{M}w_i=1$. $\forall\, i,j=1,2,\cdots,M$, 有

$$\frac{w_i}{w_i+w_j}\in\bar{S}_{ij},$$

即

$$\bar{s}_{ij}^{-}\leqslant\frac{w_i}{w_i+w_j}\leqslant\bar{s}_{ij}^{+}.$$

参照文献 [18] 中加型一致性直觉判断矩阵的相关约束条件, 又由于正规化后最大和最小方案得分可以体现出两两方案间的偏好极值, 可建立以下优化模型确定各方案优先权的上下限, 即 w_i^{-} 和 w_i^{+}.

$$\begin{aligned} &\min/\max\ w_i;\\ &\text{s.t.}\ \bar{s}_{ij}^{-}\leqslant\frac{w_i}{w_i+w_j}\leqslant\bar{s}_{ij}^{+},\\ &\sum_{i=1}^{M}w_i=1,\\ &0\leqslant w_i\leqslant 1. \end{aligned}\tag{7}$$

上述模型的目标函数为一元连续函数, 在其有界闭区间定义域上必然存在最大值和最小值, 因此模型的解一定存在. 以下给出模型的解析解.

定理 1　给定方案集 X 的正规化得分矩阵 $\bar{S}$, 设 w_i^{-} 和 $w_i^{+}(i=1,2,\cdots,M)$ 为式 (7) 中一对优化问题的解, 则

$$w_i^{-}=\frac{1}{1+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{M}\dfrac{1-\bar{s}_{ij}^{-}}{\bar{s}_{ij}^{-}}}, \tag{8}$$

$$w_i^{+}=\frac{1}{1+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{M}\dfrac{1-\bar{s}_{ij}^{+}}{\bar{s}_{ij}^{+}}}. \tag{9}$$

证明　由式 (7) 可知

$$w_j\leqslant\frac{(1-\bar{s}_{ij}^{-})\cdot w_i}{\bar{s}_{ij}^{-}},\ \forall\, j\neq i.$$

因此, 有

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{M}w_j\leqslant w_i\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{M}\frac{1-\bar{s}_{ij}^{-}}{\bar{s}_{ij}^{-}}.$$

由式 (7) 还可知

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{M}w_j=1-w_i,$$

则有

$$1-w_i\leqslant w_i\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{M}\frac{1-\bar{s}_{ij}^{-}}{\bar{s}_{ij}^{-}},$$

进而推出

$$w_i\geqslant\frac{1}{1+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{M}\dfrac{1-\bar{s}_{ij}^{-}}{\bar{s}_{ij}^{-}}},$$

式 (8) 成立.

类似地, 由式 (7) 可知

$$w_j\geqslant\frac{(1-\bar{s}_{ij}^{+})\cdot w_i}{\bar{s}_{ij}^{+}},\ \forall\, j\neq i.$$

因此, 有

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{M}w_j=1-w_i\geqslant w_i\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{M}\frac{1-\bar{s}_{ij}^{+}}{\bar{s}_{ij}^{+}},$$

进而推出

$$w_i\leqslant\frac{1}{1+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{M}\dfrac{1-\bar{s}_{ij}^{+}}{\bar{s}_{ij}^{+}}},$$

式 (9) 成立. □

与文献 [18] 中的目标规划法相比, 定理 1 给出了各属性权重的上下限, 而非通过求解式 (7) 中的优化模型确定其上下限, 计算更为简单、高效. 同时, 定理 1 依赖于式 (7) 中 $[\bar{s}_{ij}^-, \bar{s}_{ij}^+]$ 的两个性质, 即性质 1 和性质 2, 不同于文献 [18] 中基于直觉模糊偏好信息的目标规划模型.

根据定理 1 得到方案集 X 上的 $[w_i^-, w_i^+]\ (i=1,2,\cdots,M)$ 后, 即可通过比较 $[w_i^-, w_i^+]$ 产生方案排序, 形成决策结果. 这里, 参考文献 [19-21] 中提出的区间数比较方法, 实现 $[w_i^-, w_i^+]$ 的比较.

定义 9 给定 $w_i=[w_i^-, w_i^+]$ 和 $w_j=[w_j^-, w_j^+]\ (i, j=1,2,\cdots,M)$, 设

$$l(w_i)=w_i^+-w_i^-,$$
$$l(w_j)=w_j^+-w_j^-.$$

则 w_i 优于 w_j 的可能度为

$$p(w_i\geqslant w_j)=\max\Big\{1-\max\Big(\frac{w_j^+-w_i^-}{l(w_i)+l(w_j)},0\Big),0\Big\}. \tag{10}$$

由式 (10) 可得方案集 X 上优先权向量对应的可能度矩阵

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & p_{M2} & \cdots & p_{MM} \end{bmatrix},$$

其中 p_{ij} 表示 $p(w_i\geqslant w_j)$. 这里, 引入文献 [22] 中基于可能度矩阵的方案排序方法, 通过矩阵 P 求得各方案的效用值为

$$u_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{M}p_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{M}\sum\limits_{j=1}^{M}p_{ij}}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{M}p_{ij}+\dfrac{M}{2}-1}{M(M-1)},$$
$$i=1,2,\cdots,M. \tag{11}$$

进而可以依据 u_i 确定方案集 X 上各方案的排序, 产生决策结果.

综上, 给出如下基于分布式偏好关系的决策方法流程.

Step 1: 对于包含方案集 $X=\{x_i, i=1,2,\cdots,M\}$ 的决策问题, 决策者综合考虑专家意见和决策问题的实际情况, 给出对称框架 $\varOmega$ 和等级得分值 S_H;

Step 2: 决策者通过从不同方面考虑各方案, 或综合自身偏好和不同专家的意见, 给出方案集 X 上的分布式偏好关系 D;

Step 3: 利用式 (1) 计算成对方案间的得分值, 形成得分值矩阵 S, 进而计算出正规化的得分矩阵 $\bar{S}$;

Step 4: 基于正规化得分矩阵 $\bar{S}$, 利用式 (7) 构造各方案优先权的优化模型, 根据定理 1 求取 $[w_i^-, w_i^+]$, $i=1,2,\cdots,M$;

Step 5: 基于 $[w_i^-, w_i^+]$, $i=1,2,\cdots,M$, 利用式 (10) 求取 $p(w_i\geqslant w_j)$, 形成可能度矩阵 P;

Step 6: 基于可能度矩阵 P, 利用式 (11) 求得各方案的效用值 $u_i\ (i=1,2,\cdots,M)$, 形成方案排序, 产生决策结果.

3 案例分析

某制造企业随着企业规模的扩大, 在设计、生产、销售过程中积累了大量的数据. 受其当前运行信息平台的限制, 企业在数据管理和数据共享等方面的困难日益凸显, 如何更加高效地利用积累数据来提升产品全生命周期管理水平成为企业面临的难题. 针对这一难题, 企业高层决定采用云计算技术来存储和管理数据, 服务于企业的产品全生命周期管理, 优化资源配置, 提升数据管理水平. 由信息部负责人担任决策者, 邀请来自信息部门、设计部门、生产部门、采购部门、财务部门和合作高校的 10 位专家, 对初步拟定的 6 家云服务提供商进行进一步筛选, 确定最适合企业的提供商. 这 6 家提供商分别为 IBM (x_1), 微软 (x_2), 浪潮 (x_3), HP (x_4), 阿里云 (x_5), 华为 (x_6). 具体的选择过程如下:

1) 决策者综合各专家意见, 确定对称框架为

$$\varOmega=(H_{-3},H_{-2},H_{-1},H_0,H_1,H_2,H_3)=$$
(非常劣, 劣, 较劣, 无差异, 较优, 优, 非常优),

其等级得分值为

$$S=(-1,-0.6,-0.3,0,0.3,0.6,1).$$

2) 决策者综合自身偏好和各专家意见, 对 6 家提供商进行成对比较, 形成分布式偏好关系 D, 如表 1 所示.

3) 利用式 (1) 计算成对方案间的得分值, 得出评价得分值矩阵

$$S=\left[\begin{array}{cccccc} 0 & [0.11,0.31] & [-0.07,0.13] & [0.07,0.47] & [0.42,0.42] & [0.3,0.5] \\ [-0.31,-0.11] & 0 & [-0.25,0.15] & [-0.15,0.45] & [0.05,0.25] & [0.11,0.31] \\ [-0.13,0.07] & [-0.15,0.25] & 0 & [0.2,0.2] & [0.02,0.42] & [0.06,0.26] \\ [-0.47,-0.07] & [-0.45,0.15] & [-0.2,-0.2] & 0 & [-0.37,0.43] & [-0.3,0.3] \\ [-0.42,-0.42] & [-0.25,-0.05] & [-0.42,-0.02] & [-0.43,0.37] & 0 & [-0.14,0.26] \\ [-0.5,-0.3] & [-0.31,-0.11] & [-0.26,-0.06] & [-0.3,0.3] & [-0.26,0.14] & 0 \end{array}\right].$$

表 1　6 家云服务提供商的分布式偏好关系

d_{ij}	IBM	微软	浪潮	HP	阿里云	华为
IBM	$\{(H_4,1)\}$	$\{(H_4,0.3),(H_5,0.5),(H_6,0.1),(\Omega,0.1)\}$	$\{(H_3,0.1),(H_4,0.6),(H_5,0.2),(\Omega,0.1)\}$	$\{(H_4,0.2),(H_5,0.3),(H_6,0.3),(\Omega,0.2)\}$	$\{(H_5,0.6),(H_6,0.4)\}$	$\{(H_4,0.1),(H_5,0.4),(H_6,0.3),(H_7,0.1),(\Omega,0.1)\}$
微软	—	$\{(H_4,0.1)\}$	$\{(H_2,0.4),(H_3,0.1),(H_6,0.2),(H_7,0.1),(\Omega,0.2)\}$	$\{(H_3,0.1),(H_4,0.1),(H_5,0.4),(H_6,0.1),(\Omega,0.3)\}$	$\{(H_3,0.2),(H_5,0.7),(\Omega,0.1)\}$	$\{(H_3,0.1),(H_5,0.8),(\Omega,0.1)\}$
浪潮	—	—	$\{(H_4,0.1)\}$	$\{(H_3,0.4),(H_5,0.4),(H_7,0.2)\}$	$\{(H_2,0.1),(H_3,0.1),(H_5,0.3),(H_6,0.2),(H_7,0.1),(\Omega,0.2)\}$	$\{(H_2,0.1),(H_3,0.2),(H_5,0.4),(H_6,0.1),(H_7,0.1),(\Omega,0.1)\}$
HP	—	—	—	$\{(H_4,0.1)\}$	$\{(H_2,0.1),(H_3,0.1),(H_4,0.1),(H_5,0.2),(H_6,0.1),(\Omega,0.4)\}$	$\{(H_3,0.1),(H_4,0.5),(H_5,0.1),(\Omega,0.3)\}$
阿里云	—	—	—	—	$\{(H_4,0.1)\}$	$\{(H_2,0.1),(H_4,0.5),(H_6,0.2),(\Omega,0.2)\}$
华为	—	—	—	—	—	$\{(H_4,0.1)\}$

利用 S 计算出正规化得分矩阵

$$\bar{S}=$$

$$\left[\begin{array}{ccc}
0.5 & [0.555,0.655] & [0.465,0.565] \\
[0.345,0.445] & 0.5 & [0.375,0.575] \\
[0.435,0.535] & [0.425,0.625] & 0.5 \\
[0.265,0.465] & [0.275,0.575] & [0.4,0.4] \\
[0.29,0.29] & [0.375,0.475] & [0.29,0.49] \\
[0.25,0.35] & [0.345,0.445] & [0.37,0.47]
\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Leftarrow \left.\begin{array}{ccc}
[0.535,0.735] & [0.71,0.71] & [0.65,0.75] \\
[0.425,0.725] & [0.525,0.625] & [0.555,0.655] \\
[0.6,0.6] & [0.51,0.71] & [0.53,0.63] \\
0.5 & [0.315,0.715] & [0.35,0.65] \\
[0.285,0.685] & 0.5 & [0.43,0.63] \\
[0.35,0.65] & [0.37,0.57] & 0.5
\end{array}\right].$$

4) 基于 $\bar{S}$, 利用式 (7) 构造各提供商优先权的优化模型, 根据定理 1 求取

$$[w_i^-,w_i^+]\,(i=1,2,\cdots,6)=$$
$$\{[0.2097,0.2942],[0.1312,0.2226],$$
$$[0.1622,0.2420],[0.0837,0.1877],$$
$$[0.0877,0.1506],[0.0896,0.1533]\}.$$

5) 利用式 (10) 和 $[w_i^-,w_i^+]\,(i=1,2,\cdots,6)$ 计算可能度矩阵

$$P=\begin{bmatrix}
0.5 & 0.9269 & 0.8033 & 1 & 1 & 1 \\
0.0731 & 0.5 & 0.3521 & 0.7095 & 0.8726 & 0.8559 \\
0.1967 & 0.6479 & 0.5 & 0.861 & 1 & 1 \\
0 & 0.2905 & 0.139 & 0.5 & 0.5994 & 0.5853 \\
0 & 0.1274 & 0 & 0.4006 & 0.5 & 0.482 \\
0 & 0.1441 & 0 & 0.4147 & 0.518 & 0.5
\end{bmatrix}.$$

6) 根据式 (11) 求得各提供商的效用值为

$$(0.2906,0.1871,0.2336,0.1174,0.0838,0.0875).$$

因此, 产生各提供商的排序为

$$x_1 \underset{0.8033}{\succ} x_3 \underset{0.6479}{\succ} x_2 \underset{0.7095}{\succ} x_4 \underset{0.5853}{\succ} x_6 \underset{0.5180}{\succ} x_5,$$

决策者确定 IBM 公司为最适合企业的云服务提供商.

4　结　论

本文分析了目前常用的 3 种方案两两比较方法, 即层次分析法、模糊偏好关系和直觉模糊偏好关系, 并指出它们存在的不足. 针对不足, 提出了基于多等级方案成对比较的决策方法, 构建了包含多等级对称框架上的成对方案间分布式偏好关系, 设计了综合利用分布式偏好关系和框架中等级得分值产生决策结果的决策过程. 运用所提出的方法进行某制造企业的云服务提供商选择, 阐释了方法的实现过程、应用性和合理性.

下一步拟将所提出的方法扩展到区间不确定情形下, 通过构建区间分布式偏好关系进行决策.

参考文献(References)

[1] Saaty T L, Peniwati K. Group decision making: Drawing out and reconciling differences[M]. Pittsburgh: RWS Publications, 2008: 63-94.

[2] Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F, et al. Some issues on consistency of fuzzy preference relations[J]. European J of Operational Research, 2004, 154(1): 98-109.

[3] Szmidt E, Kacprzyk J. A consensus-reaching process under intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Int J of Intelligent Systems, 2003, 18: 837-852.

[4] Xu Z S. Intuitionistic preference relations and their application in group decision making[J]. Information Sciences, 2007, 177(11): 2363-2379.

[5] Behret H. Group decision making with intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 70: 33-43.

[6] Zeng S Z, Su W H, Sun L. A method based on similarity measures for interactive group decision-making with intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(10/11): 6909-6917.

[7] Yue Q, Fan Z P, Shi L H. New approach to determine the priorities from interval fuzzy preference relations[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 22(2): 267-273.

[8] 宋光兴, 杨德礼. AHP 判断矩阵与模糊判断矩阵相互转化方法[J]. 大连理工大学学报, 2003, 43(4): 536-539.
(Song G X, Yang D L, Approaches to transformation between AHP judgment matrix and fuzzy judgment matrix[J]. J of Dalian University of Technology, 2003, 43(4): 536-539.)

[9] Ohnishi S, Yamanoi T, Imai H. A fuzzy representation for non-additive weights of AHP[C]. IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Taipei: IEEE, 2011: 672-675.

[10] Li Z W, Wen G Q, Han Y. Decision making based on intuitionistic fuzzy soft sets and its algorithm[J]. J of Computational Analysis and Applications, 2014, 17(4): 620-631.

[11] Wang Z, Xu Z S, Liu S S, et al. Direct clustering analysis based on intuitionistic fuzzy implication[J]. Applied Soft Computing J, 2014, 23: 1-8.

[12] Beliakov G K. Pagola M, Wilkin T. Vector valued similarity measures for Atanassov’s intuitionistic fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2014, 280: 352-367.

[13] Zhu B, Xu Z S. Hesitant fuzzy Bonferroni means for multi-criteria decision making[J]. J of the Operational Research Society, 2013, 64(12): 1831-1840.

[14] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38: 325-339.

[15] 杨风暴, 王肖霞. D-S 证据理论的冲突证据合成方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010: 15-39.
(Yang F B, Wang X X. The conflict evidence combination method of D-S theory[M]. BeiJing: National Defence Industry Press, 2010: 15-39.)

[16] Fu C, Chin K S. Robust evidential reasoning approach with unknown attribute weights[J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 59: 9-20.

[17] Wang Y M, Yang J B, Xu D Y, et al. The evidential reasoning approach for multiple attribute decision analysis using interval nelief degrees[J]. European J of Operational Research, 2006, 175(1): 35-66.

[18] 徐泽水. 直觉模糊偏好信息下的多属性决策途径[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(11): 62-71.
(Xu Z S. Approaches to multiple attribute decision making with intuitionistic fuzzy preference information[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2007, 27(11): 62-71.)

[19] 徐泽水, 达庆利. 区间数的排序方法研究[J]. 系统工程, 2001, 19(6): 94-96.
(Xu Z S, Da Q L. Research on method for ranking interval numbers[J]. Systems Engineering, 2001, 19(6): 94-96.)

[20] 徐泽水, 达庆利. 一种基于可能度的区间判断矩阵排序法[J]. 中国管理科学, 2003, 11(1): 63-65.
(Xu Z S, Da Q L. A possibility-based method for priorities of interval judgement matrices[J]. Chinese J of Management Science, 2003, 11(1): 63-65.)

[21] 肖峻, 张跃, 付川. 基于可能度的区间数排序方法比较[J]. 天津大学学报, 2011, 44(8): 705-711.
(Xiao J, Zhang Y, Fu C. Comparison between methods of interval number ranking based on possibility[J]. J of Tianjin University, 2011, 44(8): 705-711.)

[22] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311-314.
(Xu Z S. Algorithm for priority of fuzzy complementary judgement matrix [J]. J of Systems Engineering, 2001, 16(4): 311-314.)

(责任编辑：齐 霁)