文章编号: 1001-0920 (2015) 12-2137-08 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.1503

基于输入状态稳定的离散广义系统预测控制

刘晓华, 高 婵

(鲁东大学 数学与统计科学学院，山东 烟台 264025)

摘 要: 针对一类具有持续扰动和输入约束的离散广义系统, 研究其鲁棒预测控制器的设计问题. 将输入状态稳定的概念引入广义系统预测控制, 在 quasi-min-max 性能指标下, 提出了广义系统双模鲁棒预测控制器的设计方法, 证明了基于双模鲁棒预测控制器的闭环广义系统输入状态稳定, 且具有正则、因果性. 数值仿真结果验证了所提出方法的有效性.

关键词: 模型预测控制；离散广义系统；输入状态稳定；持续扰动；双模控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Model predictive control of discrete-time singular systems based on input-to-state stability

LIU Xiao-hua, *GAO Chan*

(School of Mathematics and Statistics Science，Ludong University，Yantai 264025，China．Correspondent：LIU Xiao-hua，E-mail：xhliu_yt@sina.com)

Abstract: Robust model predictive control (MPC) is studied for a class of discrete-time singular system subject to persistent disturbance and input constrains. The notion of input-to-state stability is introduced to the model predictive control of singular systems. The design method of the singular system dual-mode MPC is proposed under the index of quasi-min-max. On the basis of the proposed dual-mode MPC approach, it can be proved that the closed-loop discrete-time singular system is input-to-state stable. Finally, the numerical simulation result shows the feasibility and the effectiveness of the proposed method.

Keywords: model predictive control；discrete-time singular systems；input-to-state stability；persistent disturbance；dual-mode control

0 引 言

广义系统又称为奇异系统或微分代数方程系统, 是在电力、经济、机器人和宇航等实际系统中有着广泛应用的一类动力学系统[1-2]. 近年来, 广义系统的控制问题已引起学术界越来越多的关注, 并取得了丰富的研究成果[3].

由于能够处理系统强约束和非线性因素的问题, 模型预测控制 (MPC) 已成为应用最为广泛的现代控制方法[4]. 目前, 针对实际系统中存在的参数不确定性、未建模动态以及外界干扰等问题提出的鲁棒预测控制, 是模型预测控制的一个重要研究方向[5-6]. 鲁棒预测控制的目的是保证闭环系统具有 Lyapunov 意义下的渐近稳定性[7-8].

考虑到广义系统广泛存在于诸多实际领域中, 广义系统鲁棒预测控制的研究已引起学者的关注[9-11]. 文献 [9] 提出了广义系统鲁棒预测控制问题, 给出了一类范数有界不确定广义系统鲁棒预测控制器的设计方法; 考虑到系统状态不可测的问题, 文献 [10] 提出了一种基于输出反馈的广义系统鲁棒预测控制器综合算法; 文献 [11] 给出了观测器型广义系统鲁棒预测控制器的设计方法, 其算法可以保证闭环受控系统的渐近稳定和正则、无脉冲性.

然而, 当实际系统与标称模型相差很大时, 例如系统存在持续扰动时, 上述鲁棒预测控制器的渐近稳定性将得不到保证. 近年来, 为了处理具有持续扰动或强非线性的系统, 输入状态稳定 (ISS) 的概念被引入到鲁棒预测控制中[12-14]. 输入状态稳定性刻画了系统在受持续扰动时, 闭环系统的一种有界稳定性质. 文献 [12] 将输入状态稳定的概念引入到预测控制系统中, 研究了一类具有持续扰动离散系统的鲁棒预测

收稿日期: 2014-10-01；**修回日期:** 2015-01-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60774016).

作者简介: 刘晓华(1959−), 男, 教授, 博士生导师, 从事预测控制、自适应控制理论与应用等研究；高婵(1990−), 女, 硕士生, 从事预测控制的研究.

控制问题, 提出了持续扰动下鲁棒预测控制器存在的充分条件; 文献 [13] 考虑一类具有持续扰动和参数不确定的离散系统, 运用双模预测控制策略, 给出了可保证闭环系统输入状态稳定的充分条件. 输入状态稳定意义下的鲁棒预测控制通常采用双模控制策略, 即在终端约束区域外用预测控制器将状态驱动到终端约束集, 在终端约束区域内求解固定的局部控制器, 从而使系统具有输入状态稳定性[13-14].

本文针对具有持续扰动和输入约束的离散广义系统, 研究其鲁棒预测控制问题. 首先, 将输入状态稳定的概念引入到鲁棒广义预测控制器设计; 然后, 采用有限时域的 quasi-min-max 性能指标求得连续控制序列, 将系统状态驱动到终端约束集, 在终端约束集内采用固定反馈控制器, 证明所设计的双模预测控制器可使闭环系统输入状态稳定, 且具有正则、因果性; 最后, 通过仿真实验验证了所提出方法的有效性.

1 问题描述

1.1 系统描述

考虑具有持续扰动的离散广义系统

$$Ex(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+Gw(k). \qquad (1)$$

其中: $x(k)\in R^n$、$u(k)\in R^m$、$w(k)\in\mathcal{W}\subset R^P$ 分别为系统的状态、输入和扰动向量; E 为常数矩阵, 且有 $\mathrm{rank}(E)=r(r\leqslant n)$.

假设 1 控制输入 $u(k)$ 满足约束

$$u(k)\in\mathcal{U}=\{u(k)\in R^m:\|u(k)\|\leqslant\bar u,\ k=0,1,\cdots\}, \qquad (2)$$

其中 $\bar u>0$ 为持续扰动的上界.

假设 2 干扰输入 $w(k)$ 不会衰减到零, 并且满足约束

$$w(k)\in\mathcal{W}=\{w(k)\in R^P:\|w(k)\|\leqslant\bar w,\ k=0,1,\cdots\}, \qquad (3)$$

其中 $\bar w>0$ 为持续扰动的上界. 称此 $w(k)$ 为有界持续扰动.

定义 1[15] 对于离散广义系统 (1) 有: 1) 如果对于 $z\in C$, 有 $\det(zE-A)\neq 0$, 则称系统 (1) 是正则的; 2) 如果 $\deg(\det(zE-A))=\mathrm{rank}(E)$, 则称系统 (1) 是因果的.

引理 1[9] 对于奇异矩阵 $E, \mathrm{rank}(E)=r(r\leqslant n)$. 若存在正交矩阵 $U=[U_1\ \ U_2]$, $V=[V_1\ \ V_2]$, 使得

$$E=U\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V,$$

且 $EV_2=0$, $U_2^{\mathrm T}E=0$, 则以下结论成立: 1) 所有满足 $ZE^{\mathrm T}=EZ^{\mathrm T}$ 的 Z 可以参数化表示为

$$Z=EV_1WV_1^{\mathrm T}+SV_2^{\mathrm T}.$$

其中: $0\leqslant W\in R^{r\times r}$, $S\in R^{n\times(n-r)}$. 若 Z 非奇异, 则 $W>0$. 2) 如果 $EV_1WV_1^{\mathrm T}+SV_2^{\mathrm T}$ 非奇异, 则存在 $\hat W$, 使得

$$(EV_1WV_1^{\mathrm T}+SV_2^{\mathrm T})^{-\mathrm T}=U_1\hat WU_1^{\mathrm T}E+U_2\hat S.$$

其中

$$\hat W=\Sigma_r^1W^{-1}\Sigma_r^{-1},$$
$$\hat S=U_2^{\mathrm T}(EV_1WV_1^{\mathrm T}+SV_1^{\mathrm T})^{-\mathrm T}.$$

引理 2[16] 对于任意适当维数的实矩阵 X、Y 和正定矩阵 P, 有

$$M^{\mathrm T}PN+N^{\mathrm T}PM\leqslant\varepsilon M^{\mathrm T}PM+\varepsilon^{-1}N^{\mathrm T}PN,\quad \forall\varepsilon>0. \qquad (4)$$

引理 3[3] 矩阵测度 $\mu(X)$ 有如下两种性质: 1) $-\mu(X)\leqslant\mathrm{Re}\lambda(X)\leqslant\mu(X)$, 2) $\mu(X)=\lambda_{\max}(X+X_T)$. 其中: $\lambda(X)$ 为矩阵 X 的特征值, $\mathrm{Re}(a)$ 为复数 a 的实部, $\lambda_{\max}(X)$ 为矩阵 X 的最大特征值.

引理 4[16] 考虑对称矩阵

$$S(x)=\begin{bmatrix}S_{11}(x) & S_{12}(x)\\ S_{12}^{\mathrm T}(x) & S_{22}(x)\end{bmatrix},$$

其中 $S_{11}(x)$ 是方阵, 以下 3 个条件是等价的:

1) $S(x)<0$;

2) $S_{11}(x)<0,\ S_{22}(x)-S_{12}^{\mathrm T}(x)S_{11}^{-1}(x)S_{12}(x)<0$;

3) $S_{22}(x)<0,\ S_{11}(x)-S_{12}(x)S_{22}^{-1}(x)S_{12}^{\mathrm T}(x)<0$.

1.2 输入状态稳定

考虑如下离散广义系统:

$$Ex(k+1)=Ax(k)+Gw(k). \qquad (5)$$

其中: $x(k)\in R^n$、$w(k)\in\mathcal{W}\subset R^P$ 分别为系统的状态和扰动输入向量, $\mathcal{W}$ 为有界集; $E\in R^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(E)=r(r\leqslant n)$.

定义 2[12] 给定非空集合 $\mathcal{X}\subset R^n$, 如果存在控制序列 $u(x)\in\mathcal{U}$, 使得被控系统对于任意的 $x(k)\in\mathcal{X}$ 和容许扰动 $w(k)\in\mathcal{W}$, 满足 $x(k+1)\in\mathcal{X}$, 则称 $\mathcal{X}$ 是被控系统的鲁棒控制不变集.

定义 3[13] 若函数 $f_1(\cdot):R^+\to R^+$ 满足连续、严格递增且 $f_1(0)=0$, 则称其为 $\mathcal{K}$ 类函数, 其中 $R^+=\{x\in R\mid x\geqslant 0\}$. 若函数 $f_2(\cdot):R^+\to R^+$ 是 K 类函数且满足 $s\to\infty$ 时, 有 $f_2(s)\to+\infty$, 则称其为 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数. 若函数 $f_3(s,d):R^+\times R^+\to R^+$ 对于任意固定的 $d\geqslant 0$, 都有 $f_3(\cdot,d)$ 为 $\mathcal{K}$ 类函数, 对于任意固定的 $s\geqslant 0$, $f_3(s,\cdot)$ 是严格递减的, 且当 $d\to\infty$ 时, 有 $f_3(s,d)\to 0$, 则称其为 $\mathcal{KL}$ 类函数.

定义 4 如果对于任意的 $x(k)\in\mathcal{X}$, $w(k)\in\mathcal{W}$ 和初始条件 $x(0)\in R^n$, 存在一个 $\mathcal{KL}$ 类函数 β 和 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 γ, 对于任意的 $k\geqslant 0$, 使得系统满足

$$\|x(k,Ex(0),w(k))\|\leqslant\beta(\|Ex(0)\|,w(k))+\gamma(\|w(k)\|), \qquad (6)$$

则称离散广义系统 (5) 在包含原点的集合 $\mathcal{X} \subset R^n$ 内是输入状态稳定 (ISS) 的. 其中 $x(k, Ex(0), w(k))$ 是在扰动输入 $w(k)$ 作用下以 $x(0)$ 为初始条件的状态响应轨迹.

定理 1　若系统 (5) 是正则、因果的, 并且存在一个连续函数 $V(\cdot): R^n \to R_+$, 以及 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数 $\alpha_1(\cdot)$、$\alpha_2(\cdot)$、$\alpha_3(\cdot)$ 和 $\mathcal{K}$ 类函数 $\sigma(\cdot)$, 使得对于任意的 $x(0) \in R^n$ 和 $w(k) \in \mathcal{W}$, 满足如下的条件:

1) $V(0) = 0$,

2) $\alpha_1(\|x(k)\|) \leqslant V(x(k)) \leqslant \alpha_2(\|x(k)\|)$,

3) $V(x(k+1)) - V(x(k)) \leqslant$
$-\alpha_3(\|x(k)\|) + \sigma(\|w(k)\|)$,

则称离散广义系统 (5) 是输入状态稳定 (ISS) 的, 系统是输入状态稳定的, 并将 $V(\cdot): R^n \to R_+$ 称为 ISS-Lyapunov 函数.

证明　假设离散广义系统 (5) 是正则且因果的, 则存在非奇异矩阵 M、$N \in R^{n\times n}$, 且有

$$\text{MEN} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \text{MAN} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\text{MG} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix},$$

使得

$$N^{-1}x = \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix},$$

离散广义系统 (5) 受限等价于如下系统:

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1(k+1) = A_1\bar{x}_1(k) + G_1w(k), \\ &0 = \bar{x}_2(k) + G_2w(k). \end{aligned} \tag{7}$$

该系统的初始状态为

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{10} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

定义函数 $V(x(k))$ 满足定理 1 的条件, 结合式 (7), 存在关于 $\bar{x}_1(k)$ 的函数 $V(\bar{x}_1(k))$ 满足如下条件:

1) $V(0) = 0$,

2) $\bar{\alpha}_1(\|\bar{x}_1(k)\|) \leqslant V(\bar{x}_1(k)) \leqslant \bar{\alpha}_2(\|\bar{x}_1(k)\|)$,

3) $V(\bar{x}_1(k+1)) - V(\bar{x}_1(k)) \leqslant$
$-\bar{\alpha}_3(\|\bar{x}_1(k)\|) + \bar{\sigma}(\|w(k)\|)$.

其中: $\bar{\alpha}_1(\cdot), \bar{\alpha}_2(\cdot), \bar{\alpha}_3(\cdot)$ 为 $\mathcal{K}_\infty$ 函数, $\bar{\sigma}(\cdot)$ 为 $\mathcal{K}$ 类函数.

根据受限等价系统 (7) 和正常系统的 ISS 理论, 存在一个 $\mathcal{KL}$ 类函数 $\bar{\beta}$ 和 $\mathcal{K}$ 类函数 $\bar{r}$, 使得

$$\|\bar{x}_1(k)\| \leqslant \bar{\beta}(\|\bar{x}_{10}(k)\|, k) + \bar{r}(\|w(k)\|),\ \forall k \geqslant 0$$

成立.

由受限等价系统 (7) 可知 $\bar{x}_2(k) = -G_2w(k)$, 由此可得

$$\|\bar{x}_2(k)\| \leqslant \|G_2\|\|w(k)\|.$$

综上可知

$$\|\bar{x}(k)\| \leqslant \|\bar{x}_1(k)\| + \|\bar{x}_2(k)\| \leqslant$$
$$\bar{\beta}(\|\bar{x}_{10}(k)\|, k) + \bar{r}(\|w(k)\|) + \|G_2\|\|w(k)\|,\ \forall k \geqslant 0.$$

由 $\text{ME}x_0 = \text{MEN}\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$ 可得 $\|\bar{x}_{10}\| \leqslant \|M\|\|Ex_0\|$.

由于 $x(k) = N\bar{x}(k)$, 可以得到

$$\begin{aligned} &\|\bar{x}(k)\| \leqslant \|N\|\|\bar{x}(k)\| \leqslant \\ &\|N\|(\bar{\beta}(\|\bar{x}_{10}(k)\|, k) + \bar{r}(\|w(k)\|) + \|G_2\|\|w(k)\|) \leqslant \\ &\|N\|(\bar{\beta}(\|M\|\|Ex_0\|, k) + \bar{r}(\|w(k)\|) + \|G_2\|\|w(k)\|) \leqslant \\ &\beta(\|Ex(0)\|, k) + \gamma(\|w(k)\|). \end{aligned}$$

其中

$$\beta(\|Ex(0)\|, k) = \|N\|\bar{\beta}(\|M\|\|Ex_0\|, k),$$
$$\gamma(\|w(k)\|) = \|N\|(\bar{r}(\|w(k)\|) + \|G_2\|\|w(k)\|),$$

且易证 $\beta(\|Ex(0)\|, k)$ 为 $\mathcal{KL}$ 类函数, $\gamma(\|w(k)\|)$ 为 $\mathcal{K}$ 类函数.

综上可知, 若系统 (5) 正则、因果且具有满足定理 1 条件的 $V(x(k))$, 则系统是输入状态稳定的. □

1.3　控制问题描述

对于离散广义系统 (1), 考虑如下 quasi-min-max 优化问题:

$$J_N^* = \min_{U_0^N(k)} \max_{k=0,1,\cdots,N} J_N(k).$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ & Ex(i+1/k) = \\ & Ax(i/k) + Bu(i/k) + Gw(i/k),\ i \geqslant 0; \\ & w(i/k) \in \mathcal{W},\ u(i/k) \in \mathcal{U},\ i \in 0, 1, \cdots, N-1; \\ & x(N/k) \in \mathcal{X}_\mathcal{T}. \end{aligned} \tag{8}$$

其中: k 时刻的有限时域性能指标函数为

$$\begin{aligned} & J_N(k) = \\ & \sum_{i=0}^{N-1} L(x(i/k), u(i/k)) + V_f(x(N/k)) = \\ & \sum_{i=0}^{N-1} x(i/k)^{\mathrm{T}}Qx(i/k) + u(i/k)^{\mathrm{T}}Ru(i/k) + \\ & V_f(x(N/k)); \end{aligned}$$

$Q > 0$, $R > 0$ 为加权矩阵; J_N^* 为最优值函数. 采用如下双模预测控制律:

$$U^{\mathrm{DM}}(x) = \begin{cases} u(i/k),\ x(i/k) \notin \mathcal{X}_\mathcal{T},\ i = 0, 1, \cdots, N-1; \\ K_Nx(i/k),\ x(i/k) \in \mathcal{X}_\mathcal{T}. \end{cases} \tag{9}$$

其中: $\mathcal{X}_\mathcal{T}$ 为包含原点的终端约束集, $x(i/k)$ 为在 k 时刻基于模型 (1) 的 $k+i$ 时刻的状态预测值, $u(i/k)$ 为 k 时刻使性能指标优化的控制序列在 $k+i$ 时刻的值.

双模鲁棒预测控制的目的是: 在终端约束集 $\mathcal{X}_\mathcal{T}$ 外, 在每个采样时刻求解优化问题 (8), 得到控制序列 $u(i/k)$, 将系统状态驱动到终端约束集内. 在终端约束集 $\mathcal{X}_\mathcal{T}$ 内, 求解一个局部状态反馈增益 K_N, 从而得到双模预测控制器 (9), 进而使闭环离散广义系统在满足输入约束的条件下输入状态稳定, 且具有正则、因果性.

2 输入状态稳定鲁棒预测控制

考虑离散广义系统 (1), 在预测控制优化问题 (8) 中添加适当的终端代价函数 $V_f(x)$ 和终端约束集 $\mathcal{X}_\mathcal{T}$, 求得双模鲁棒预测控制律 (9), 保证闭环系统的输入状态稳定性 (ISS).

2.1 优化问题分析

在终端约束集 $\mathcal{X}_\mathcal{T}$ 外, 考虑预测控制序列

$$U^N(k)=[u(0/k),u(1/k),\cdots,u(N-1/k)],$$

其中: $u(i/k)=K(k)x(i/k)$, $i=1,2,\cdots,N-1$; $x(k)=x(0/k)$, $u(k)=u(0/k)$ 为自由决策变量.

选择终端代价函数 $V_f(x)=x^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}PEx$. 其中: $E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0$, P 为正定矩阵. 假设在每个采样时刻, 对于持续扰动 $w(i/k)\in\mathcal{W}\,(i=1,2,\cdots,N-1)$ 存在 $\rho>0$, 使得 $V(x)$ 满足不等式

$$\begin{aligned}&V_f(x(i+1/k))-V_f(x(i/k))\leqslant\\&-\|x(i/k)\|_Q^2-\|u(i/k)\|_R^2+\rho\|w(i/k)\|^2.\end{aligned}\tag{10}$$

将不等式 (10) 从 $i=1$ 叠加到 $i=N-1$, 得到

$$J_1^N\leqslant V_f(x(1/k))+(N-1)\rho\bar{w}^2.\tag{11}$$

设 $\bar{x}(0/k)=Ax(0/k)+Bu(0/k)$, 由引理 2 可知, 对于任意 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}&V_f(x(1/k))=\\&[\bar{x}(0/k)+Gw(k)]^{\mathrm{T}}P(k)[\bar{x}(0/k)+Gw(k)]\leqslant\\&(1+\varepsilon)\bar{x}(0/k)^{\mathrm{T}}P(k)\bar{x}(0/k)+\\&(1+\varepsilon^{-1})w^{\mathrm{T}}(k)G^{\mathrm{T}}P(k)Gw(k).\end{aligned}$$

设 $\sigma(k)$ 为 $P(k)$ 的最大特征值, $\lambda(k)$ 为 $G^{\mathrm{T}}G$ 的最大特征值, 则有

$$\begin{aligned}&V_f(x(1/k))\leqslant\\&(1+\varepsilon)\bar{x}(0/k)^{\mathrm{T}}P(k)\bar{x}(0/k)+(1+\varepsilon^{-1})\sigma(k)\lambda(k)\bar{w}^2.\end{aligned}\tag{12}$$

由式 (11) 和 (12) 可得

$$\begin{aligned}&\max_{w(i/k),k=1,2,\cdots,N-1}J_1^N\leqslant\\&(1+\varepsilon)\bar{x}(0/k)^{\mathrm{T}}P(k)\bar{x}(0/k)+\\&[(N-1)\rho+(1+\varepsilon^{-1})\sigma(k)\lambda(k)]\bar{w}^2.\end{aligned}$$

设 $\varepsilon_1=1+\varepsilon$, $\varepsilon_2=1+\varepsilon^{-1}$, 可得

$$\begin{aligned}&\Phi(k)=\\&\|x(0/k)\|_Q^2+\|u(0/k)\|_R^2+(1+\varepsilon)\bar{x}(0/k)^{\mathrm{T}}\times\\&P(k)\bar{x}(0/k)+[(N-1)\rho+(1+\varepsilon^{-1})\sigma(k)\lambda(k)]\bar{w}^2.\end{aligned}$$

综上所述, $\max J_N(k)\leqslant\Phi(k)$, 即 $\Phi(k)$ 为性能指标 $J_N(k)$ 的上确界, 由此可将对性能指标的最小化问题转化为上确界 $\Phi(k)$ 的最小化问题. 如果存在一个合适的非负变量 $\gamma(k)$, 满足 $\Phi(k)\leqslant\gamma(k)$, 则优化问题 (8) 可转化为一个半正定规划问题[14].

在终端约束集 $\mathcal{X}_\mathcal{T}$ 内, 在满足一定假设的条件下, 通过求解一组线性矩阵不等式 (LMI), 得到局部状态反馈增益 K_N, 进而可得状态反馈控制器 $u^*(0/k)=K_Nx(k)$.

2.2 优化问题求解

在终端约束集 $\mathcal{X}_\mathcal{T}$ 外, 求解控制序列

$$U^N(k)=[u(0/k),u(1/k),\cdots,u(N-1/k)],$$

将当前控制量 $u(k)=u(0/k)$ 作用于被控系统 (1), 使系统状态到达终端约束集内.

定理 2 考虑控制序列 $U^N(k)$ 和离散广义系统 (1), 假设在每个采样时刻 k, 不等式 (10) 成立, 则优化问题 (8) 可转化为以下优化问题:

$$\min_{\gamma(k),u(k),\theta,W,S,Y}\gamma(k);$$

s.t.

$$\begin{bmatrix}-EZE^{\mathrm{T}} & 0 & [AZ+BY]^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}} & Z^{\mathrm{T}}\\ 0 & -\rho I & G^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ * & * & -Z^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ * & * & * & -R^{-1} & 0\\ * & * & * & * & -Q^{-1}\end{bmatrix}\leqslant 0,\tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}-\gamma_1(k) & u(k)^{\mathrm{T}} & (Ax(k)+Bu(k))^{\mathrm{T}} & \bar{w}\\ * & -R^{-1} & 0 & 0\\ * & * & -\varepsilon_1^{-1}Z^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & \dfrac{-\varepsilon_2^{-1}\lambda^{-1}}{\sigma(G^{\mathrm{T}}G)}\end{bmatrix}\leqslant 0,\tag{14}$$

$$\begin{bmatrix}-\bar{\Phi}(k-1) & u(k)^{\mathrm{T}} & (Ax(k)+Bu(k))^{\mathrm{T}} & \bar{w}\\ * & -R^{-1} & 0 & 0\\ * & * & -\varepsilon_1^{-1}Z^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & * & \dfrac{-\varepsilon_2^{-1}\lambda^{-1}}{\sigma(G^{\mathrm{T}}G)}\end{bmatrix}\leqslant 0,\tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}-\bar{u}^2 & u(k)^{\mathrm{T}}\\ u(k) & -I\end{bmatrix}\leqslant 0,\tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{u}^2 EZE^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & -\theta \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma(k) & 1 \\ 1 & -\theta \end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{18}$$

其中

$$\gamma_1(k) = \gamma(k) - (N-1)\rho\bar{w}^2 - x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k),$$

$$\bar{\Phi}(k-1) = \Phi(k-1) - (N-1)\rho\bar{w}^2 - x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k),$$

$$\varepsilon_1 = 1+\varepsilon,\ \varepsilon_2 = 1+\varepsilon^{-1}.$$

特别地, 对于所有的 $x(i/k) \in \{x \in R^n : \|x(i/k)\| \geqslant r_1\}$, 存在 $c > 0$, 且 $r_1 = \sqrt{\dfrac{\rho\bar{w}^2 + c}{\lambda_{\min}(Q)}}$, 有 $V_f(Ex(i+1/k)) - V_f(Ex(i/k)) \leqslant -c$.

证明 考虑终端代价函数

$$V_f(x) = x^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}PEx,$$

其中 $Z = P^{-\mathrm{T}}$. 定义 Hamilton函数 $H(x,u,w)$, 即

$$\begin{aligned} &H(x(i/k),u(i/k),w(i/k)) = \\ &V_f(x(i+1/k)) - V_f(x(i/k)) + \\ &\|x(i/k)\|_Q^2 + \|u(i/k)\|_R^2 - \rho(\|w(i/k)\|)^2, \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\rho > 0$.

由离散广义系统 (1) 和 $u(i/k) = K(k)x(i/k)$ $(i = 1,2,\cdots,N-1)$ 可知, 式 (19) 等价于

$$H(x,u,w) = [x^{\mathrm{T}}(i/k)\ \ w^{\mathrm{T}}(i/k)]\varXi \begin{bmatrix} x(i/k) \\ w(i/k) \end{bmatrix}.$$

其中

$$\varXi = \begin{bmatrix} M & (A+BK(k))^{\mathrm{T}}PG \\ G^{\mathrm{T}}P(A+BK(k)) & G^{\mathrm{T}}PG - \rho I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} M = &(A+BK(k))^{\mathrm{T}}P(A+BK(k)) - \\ &E^{\mathrm{T}}PE + Q + K^{\mathrm{T}}(k)RK(k). \end{aligned}$$

由式 (10) 可得

$$\begin{bmatrix} M & (A+BK(k))^{\mathrm{T}}PG \\ G^{\mathrm{T}}P(A+BK(k)) & G^{\mathrm{T}}PG - \rho \end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{20}$$

对式 (20) 分别左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{P^{-1}, I\}$, 由引理 1 和引理 4 可得

$$\begin{bmatrix} -E^{\mathrm{T}}P^{-1}E & 0 & P^{-1}(A+BK(k))^{\mathrm{T}} & P^{-1}K(k)^{\mathrm{T}} & P^{-1} \\ 0 & -\rho I & G^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -P^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -R^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{21}$$

令 $Z = P^{-\mathrm{T}}, Z = EV_1WV_1^{\mathrm{T}} + SV_2^{\mathrm{T}}$, $Y = K(k)P^{-1}$, 则式 (13) 成立.

对于任意的 $x(i/k) \in \{x \in R^n : \|x(i/k)\| \geqslant r_1\}$, 存在 $c \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned} &\rho\|w(i/k)\|^2 + c \leqslant \rho\bar{w}^2 + c \leqslant \lambda_{\min}(Q)\|x(i/k)\|^2 \Rightarrow \\ &-\|x(i/k)\|_Q^2 - \|u(i/k)\|_R^2 + \rho\|w(i/k)\|^2 \leqslant -c. \end{aligned} \tag{22}$$

结合式 (13) 和 (22), 对于任意 $x(i/k) \in \{x \in R^n : \|x(i/k)\| \geqslant r_1\}$, 有

$$\begin{aligned} &V_f(x(i+1/k)) - V_f(x(i/k)) \leqslant \\ &-\|x(i/k)\|_Q^2 - \|u(i/k)\|_R^2 + \rho\|w(i/k)\|^2 \leqslant -c. \end{aligned}$$

在每个采样时刻 k, 令 $x(0/k) = x(k), u(0/k) = u(k)$, 且有

$$\begin{aligned} &\Phi(k) \leqslant \gamma(k) \Rightarrow \\ &x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) + u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k) + \\ &\varepsilon_1[Ax(k)+Bu(k)]^{\mathrm{T}}P[Ax(k)+Bu(k)] + \\ &\varepsilon_2\lambda(k)\sigma(G^{\mathrm{T}}G)\bar{w}^2 + (N-1)\rho(\bar{w})^2 - \gamma(k) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{23}$$

给定 $\gamma_1(k) = \gamma(k) - (N-1)\rho\bar{w}^2 - x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)$, 式 (23) 等价于

$$\begin{aligned} &-\gamma_1(k) + u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k) + \varepsilon_1[Ax(k) + \\ &Bu(k)]^{\mathrm{T}}P[Ax(k)+Bu(k)] + \varepsilon_2\lambda(k)\sigma(G^{\mathrm{T}}G)\bar{w}^2 \leqslant 0. \end{aligned}$$

由引理 4 可得

$$\begin{bmatrix} -\gamma_1(k) & u^{\mathrm{T}}(k) & (Ax(k)+Bu(k))^{\mathrm{T}} & \bar{w} \\ * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1^{-1}P^{-1} & 0 \\ * & * & * & \dfrac{-\varepsilon_2^{-1}\lambda^{-1}}{\sigma(G^{\mathrm{T}}G)} \end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{24}$$

其中: $Z = P^{-\mathrm{T}}, Z = EV_1WV_1^{\mathrm{T}} + SV_2^{\mathrm{T}}$, 即不等式 (14) 成立.

由于 $u(k) \in \mathcal{U} = \{u \in R^m : \|u(k)\| \leqslant \bar{u}^2\}, k = 0, 1, \cdots, N-1$, 当前控制作用 $u(k)$ 等价于如下约束:

$$\begin{bmatrix} -\bar{u}^2 & u^{\mathrm{T}}(k) \\ u(k) & -I \end{bmatrix} \leqslant 0.$$

考虑 $U_1^N : u(i/k) = K(k)x(i/k)$, $i = 1,2,\cdots, N-1$, 通过对式 (15) 运用引理 4 可得

$$\begin{aligned} &x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k) + \varepsilon_1[Ax(k)+Bu(k)]^{\mathrm{T}}P[Ax(k) + \\ &Bu(k)] + (N-1)\rho\bar{w}^2 + \\ &\varepsilon_2\lambda(k)\sigma(G^{\mathrm{T}}G) - \Phi(k-1) \leqslant 0, \end{aligned}$$

则函数 $\Phi(k)$ 是单调递减的, 且有

$$\begin{aligned} &x(i/k)^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(i/k) \leqslant \\ &(1+\varepsilon)\bar{x}(i-1/k)^{\mathrm{T}}P(k)\bar{x}(i-1/k) + \\ &(1+\varepsilon^{-1})\lambda(k)\sigma(G^{\mathrm{T}}G)\bar{w}^2. \end{aligned} \tag{25}$$

由于 $\|u(i/k)\| \leqslant \bar{u}$, $\Phi(k+i) \leqslant \Phi(k) \leqslant \gamma(k)$, 且 $x(i/k)^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}P(k)Ex(i/k) \leqslant \tau(k) \leqslant \gamma(k)$, $i = 1,2,\cdots,$

$N-1$. 通过运用 S-procedure[14] 可得如下不等式成立:

$$\bar{u}^2 x(i+1/k)^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} P(k) E x(i+1/k)- \gamma(k) x(i+1/k)^{\mathrm{T}} K(k)^{\mathrm{T}} K(k) x(i+1/k) \leqslant 0. \tag{26}$$

给定 $\psi(k)=\tau(k)^{-1}$, 由引理 4 可知, 不等式 (26) 等价于

$$\begin{bmatrix} -\bar{u}^2 E^{\mathrm{T}} P(k) E & K(k)^{\mathrm{T}} \\ K(k) & -\psi(k) \end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{27}$$

对式 (27) 分别左乘和右乘 $\operatorname{diag}\{P^{-1}, I\}$, 又由于 $\varphi(k) \times \gamma(k) \geqslant 1$, 即可得到式 (17) 和 (18). □

注 1 从定理 2 的证明可知, $\Phi(k)<\Phi(k-1)$ 且 $\Phi(k)>(N-1)\rho\bar{w}^2>0$, 这表明闭环系统的状态将在不多于 N 步内到达终端约束集 $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$. 当闭环系统的状态进入到终端约束集 $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ 时, 将通过一个局部状态反馈控制器保证闭环离散广义系统输入状态稳定.

为了求解终端约束集 $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ 内的局部状态反馈控制器, 给出如下假设.

假设 3 令 $\lambda_{\min}(*)$ 为矩阵 $*$ 的最小特征值. 设存在 $\lambda_{\min}(Q)$, $\lambda_{\min}(P)$, $\lambda_{\max}(P)>0$, 并且 $\lambda_{\min}(Q) \leqslant \lambda_{\max}(P)$, 函数 $h(x(k))=Kx(k): R^n \rightarrow R^m$, $h(0)=0$ 和一个 K 类函数 σ 满足如下条件: 1) $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{X}_{\mathcal{U}}$, $0 \in \operatorname{int}\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$; 2) $Ax(k)+BKx(k)+Gw(k) \in \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$, $\forall x \in \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$; 3) $L(x,u) \geqslant \|x\|_Q^2 \geqslant \lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall u \in \mathcal{U}$; 4) $\lambda_{\min}(P)\|Ex\|_2^2 \leqslant x^{\mathrm{T}} E^{\mathrm{T}} P E x \leqslant \lambda_{\max}(P)\|Ex\|_2^2$, $\forall x \in \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$; 5) $V_f(x(k+1))-V_f(x(k)) \leqslant -L(x(k), h(x(k)))+\sigma(\|w(k)\|)$, $\forall x(k) \in \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$, $\forall w(k) \in \mathcal{W}$.

注 2 假设 3 表明, 终端代价函数 V_f 是离散广义系统的局部 ISS-Lyapunov 函数, 终端约束集 $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ 为鲁棒控制不变集. 在文献 [7-8,14] 中, 给出了与本文相似的假设.

考虑局部控制器 $u^*(0/k)=K_N x(k)$, 其中终端代价函数 $V_f(Ex(k))=x^{\mathrm{T}}(k) E^{\mathrm{T}} P_N E x(k)$, $\forall x(k) \in \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$, $w(k) \in \mathcal{W}$ 满足条件

$$V_f(x(k+1))-V_f(x(k)) \leqslant -\|x(k)\|_Q^2-\|u(k)\|_R^2+\rho\|w(k)\|^2.$$

定理 3 对于离散广义系统 (1) 和任意的 $x(k) \in \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}=\{x(k) \in R^n: \|x(k)\|<r_1\}$, 如果对于给定常数 $\rho>0$, 存在 $\gamma \geqslant 0$, $\theta \geqslant 0$, $0 \leqslant W_1 \in R^{r \times r}$, $S_1 \in R^{n \times (n-r)}$, $Y_N \in R^{m \times m}$ 满足如下约束条件:

$$\begin{bmatrix} -EZ_N E^{\mathrm{T}} & 0 & [AZ_N+BY_N]^{\mathrm{T}} & Y_N^{\mathrm{T}} & Z_N^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma\rho I & G^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -Z_N^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma R^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma Q^{-1} \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{u}^2 E Z_N E^{\mathrm{T}} & Y_N^{\mathrm{T}} \\ Y_N & -\theta_N \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} -\gamma & 1 \\ 1 & -\theta_N \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{30}$$

其中 $Z_N=EV_1W_1V_1^{\mathrm{T}}+S_1V_2^{\mathrm{T}}=\gamma P_N^{-1}$, $Y_N=K_N Z_N$, 则存在局部状态反馈控制器 $u^*(0/k)=K_N x(k)$.

定理 3 的证明过程类似于定理 2. 根据定理 2 和定理 3 给出双模鲁棒预测控制算法.

Step 1: 选择参数 $Q, R, \rho, c, \varepsilon, N>0$, 并计算 $r_1=\sqrt{\dfrac{\rho\bar{w}^2+c}{\lambda_{\min}Q}}$, 得到终端约束集 $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$;

Step 2: 离线求解 LMI (28) ∼ (30), 得到局部状态反馈增益 K_N;

Step 3: 在每个采样时刻 $k=0,1,\cdots$, 测量系统的状态 $x(k)$;

Step 4: 如果 $x(k) \notin \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$, 则在线求解优化问题 (13) ∼ (18), 将当前控制量 $u(k)=u(0/k)$ 作用于系统 (1), 否则, 将局部控制器 $u^*(0/k)=K_N x(k)$ 作用于系统 (1);

Step 5: 令 $k=k+1$, 并从 Step 2 开始执行.

3 输入状态稳定性分析

定理 4 对于约束离散广义系统 (1), 若优化问题 (13) ∼ (18) 和 (28) ∼ (30) 有解, 则最优值函数 $J_N^*(k)$ 是闭环广义系统的一个 ISS-Lyapunov 函数, 即闭环广义系统相对于持续扰动 (3) 是输入状态稳定的, 且具有正则、因果性.

证明 首先, 证明闭环离散广义系统是正则、因果的.

由于 $\operatorname{rank}E=r<n$, 若 $x(k) \notin X_T$, 则存在两个正交矩阵 U 和 V, 使得

$$UEV=\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

对 $U^{-\mathrm{T}} P_k U^{-1}$ 和 UAV 作如上分块, 可得

$$U^{-\mathrm{T}} P_k U^{-1}=\begin{bmatrix} P_{1k} & P_{2k} \\ P_{2k}^{\mathrm{T}} & P_{3k} \end{bmatrix},\ UAV=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$
$$K_k V^{-\mathrm{T}}=[K_{1k}\ \ K_{2k}]. \tag{32}$$

由定理 2 可知, $E^{\mathrm{T}} P_k E \geqslant 0$, 则对于每一个固定的 k, 有 $P_{1k} \geqslant 0$. 再由定理 2 可知 $(A+BK(k))^{\mathrm{T}} \times P(A+BK(k))-E^{\mathrm{T}} P E+Q+K(k)^{\mathrm{T}} R K(k) \leqslant 0$.

结合式 (31) 与 (32) 可得

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & A_2^{\mathrm{T}} P_{1k} A_2+H+H^{\mathrm{T}}+Q_3+K_{2k} R K_{2k} \end{bmatrix} \leqslant 0. \tag{33}$$

其中: $H=A_2^{\mathrm{T}} P_{2k} A_4+\dfrac{1}{2} A_4^{\mathrm{T}} P_{3k} A_4$, $*$ 与证明无关.

由式 (33) 和 $P_{1k} \geqslant 0, Q_3 > 0, R > 0$ 可知 $H+H^{\mathrm{T}} < 0$. 由引理 3 可得 $\mathrm{Re}\lambda\Big(\Big(A_2^{\mathrm{T}}P_{2k} + \dfrac{1}{2}A_4^{\mathrm{T}}P_{3k}\Big)A_4\Big) = \mathrm{Re}\lambda(H) \leqslant \mu(H) = \dfrac{1}{2}\lambda_{\max}(H+H^{\mathrm{T}}) < 0$, 即 $\Big(A_2^{\mathrm{T}}P_{2k} + \dfrac{1}{2}A_4^{\mathrm{T}}P_{3k}\Big)A_4$ 是可逆的, 进而 A_4 是可逆的, 因此闭环离散广义系统是正则、因果的.

若 $x(k) \in \mathcal{X}_T$, 则同理可知, 闭环离散广义系统是正则、因果的.

然后, 分析闭环离散广义系统的输入状态的稳定性.

由于约束集 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{W}$ 是有界集, 闭环系统的状态是有界的, 故最优值函数 $J_N^*(k)$ 存在上界, 即有 $J_N^*(k) \leqslant \bar{J}_N(k)$. 假设存在 $d \in (0, r_1)$, 使 $B_d = \{x \in R^n : \|x\| \leqslant d\} \subseteq \mathcal{X}_T$. 若 $x(k) \in \mathcal{X}_T$, 则由最优化原理可得

$$J_N^*(k) \geqslant \min J_N(k) \geqslant \\ \|x(k)\|_Q^2 + \|u(k)\|_R^2 \geqslant \lambda_{\min}(Q)\|x(k)\|^2.$$

由定理 3 可知

$$\begin{aligned} J_N^*(k) \leqslant & \max_{w(k)} J_1^N(k) = \\ & \max_{w(k)}\Big(\sum_{i=0}^{N-2}(\|x(k+i)\|_Q^2 + \|u(i/k)\|_R^2) + \\ & V_f(x(k+N-1))\Big) + (V_f(x(k+N)) - \\ & V_f(x(k+N-1)) + \|x(k+N-1)\|_Q^2 + \\ & \|u(k+N-1)\|_R^2) \leqslant J_{N-1}^*(k) + \rho\bar{w}^2. \end{aligned} \tag{34}$$

由式 (34) 可知

$$\begin{aligned} & J_N^*(k) \leqslant J_{N-1}^*(k) + \rho\bar{w}^2 \leqslant J_{N-2}k + 2\rho\bar{w}^2 \cdots \leqslant \\ & J_0^*(k) + N\rho\bar{w}^2 = x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}PEx(k) + N\rho\bar{w}^2 \leqslant \\ & \Big(\lambda_{\max}(E^{\mathrm{T}}PE) + \frac{N\rho\bar{w}^2}{r_1^2}\Big)\|x(k)\|^2. \end{aligned} \tag{35}$$

综上可得

$$\lambda_{\min}(Q)\|x(k)\|^2 \leqslant J_N^*(k) \leqslant \\ \Big(\lambda_{\max}(E^{\mathrm{T}}PE) + \frac{N\rho\bar{w}^2}{r_1^2}\Big)\|x(k)\|^2.$$

由式 (35) 可知

$$\begin{aligned} & J_1^{N+1*}(k) - J_N^*(k) \leqslant J_1^{N*}(k) + \rho\bar{w}^2 - J_N^*(k) \leqslant \\ & -(\|x(k)\|_Q^2 + \|u(k)\|_R^2) + \rho\bar{w}^2 \leqslant \\ & -\lambda_{\max}(Q)\|x(k)\|^2 + \rho\bar{w}^2. \end{aligned} \tag{36}$$

若 $x(k) \notin X_T$, 当 $x(k) \notin B_d$ 时, 则有 $\|x(k)\| \geqslant d$. 通过

$$J_N^*(k) \leqslant \bar{J}_N(k) \leqslant \Big(\frac{\bar{J}_N(k)}{\|d\|^2}\Big)\|x(k)\|^2 \tag{37}$$

可推得

$$\lambda_{\min}(Q)\|x(k)\|^2 \leqslant \Big(\frac{\bar{J}_N(k)}{\|d\|^2}\Big)\|x(k)\|^2.$$

由定理 2 可知

$$\begin{aligned} & J_1^{N+1*}(k) = \\ & J_N^*(k) + V_f(x(k+N+1)) - V_f(x(k+N)) + \\ & \|x(k+N)\|_Q^2 - \|x(k)\|_Q^2 + \|u(k+N)\|_R^2 - \|u(k)\|_R^2 \leqslant \\ & J_N^*(k) - \|x(k)\|_Q^2 + \rho\bar{w}^2, \end{aligned}$$

即有

$$J_1^{N+1*}(k) - J_N^*(k) \leqslant -\lambda_{\max}(Q)\|x(k)\|^2 + \rho\bar{w}^2.$$

综上所述, 由定理 1 可知, 最优值函数 $J_N^*(k)$ 是闭环离散广义系统的一个 ISS-Lyapunov 函数, 即闭环系统相对于有界持续扰动是输入状态稳定的. □

4 仿真算例

考虑离散广义系统 (1), 系统参数如下:

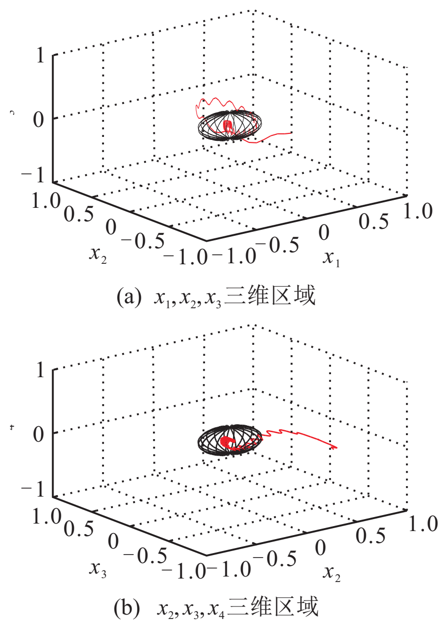
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ -0.02 & 0.02 & 1 & 0 \\ 0.02 & -0.02 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

持续扰动 $w(k) = \overline{w}\sin(k)$. 其中: $\bar{w} = 0.5$, 输入约束 $\|u(k)\| \leqslant 1$.

给定参数 $Q = I \in R^{n\times n}$, $R = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $c = 0.02$, $\rho = 0.5$, $N = 3$, 通过计算得到 $r_1 = 0.380\,8$, 终端约束集 $\mathcal{X}_T = \{x(k) \in R^n : \|x(k)\| < 0.380\,8\}$. 选择初始状态 $x(0) = [1, 0.5, -0.7, 0]^{\mathrm{T}}$, 采样间隔 0.1 s. 根据双模鲁棒预测控制算法, 运用 LMI 工具箱求解优化问题, 进而得到满足条件的双模控制器.

终端约束区域三维图像和闭环系统状态运动轨迹如图 1 所示.

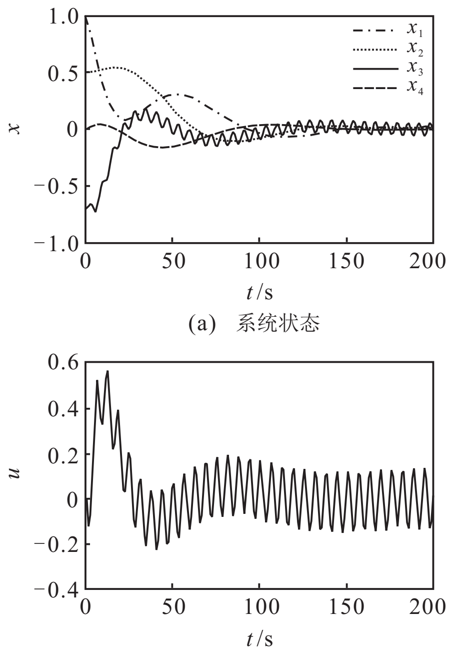


(a) x_1, x_2, x_3 三维区域

(b) x_2, x_3, x_4 三维区域

图 1　终端约束区域 X_T 和闭环系统状态运动轨迹

由图1可知, 本文提出的方法可使闭环状态最终进入终端约束集内. 系统状态曲线和控制输入曲线如图2所示



(a) 系统状态

(b) 控制输入

图 2 系统状态曲线和控制输入曲线

图2表明闭环系统的状态是有界的, 且控制输入在每一个时刻都是满足约束条件的.

5 结 论

本文通过引入输入状态稳定的概念, 给出了离散广义系统输入状态稳定的充分条件, 提出了一类具有持续扰动和输入约束的离散广义系统quasi-min-max鲁棒预测控制算法. 通过求解半正定规划问题得到连续控制序列, 将系统状态驱动到终端约束集, 在终端约束集内使用固定反馈控制器, 给出了离散广义系统双模预测控制器的设计方法, 并证明了闭环离散广义系统的正则性和因果性. 最后通过仿真实验验证了本文算法的可行性和有效性.

参考文献(References)

[1] Dai L. Singular control systems[M]. New York: Springer Verlag, 1989: 1-332.

[2] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer Verlag, 1993: 1-464.

[3] 张庆灵, 杨冬梅. 不确定广义系统的分析与综合[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003: 47-147.
(Zhang Q L, Yang D M. Analysis and control for uncertain descriptor systems[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2003: 47-147.)

[4] Joe Q S, Badgwell T A. A survey of industrial model predictive control technology[J]. Control Engineering Practice, 2003, 11(7): 733-764.

[5] Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.

[6] Mayne D Q, Seron M M, Rakovic S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances[J]. Automatica, 2005, 41(2): 219-224.

[7] Chen H, Allgpwer F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability[J]. Automatica, 1998, 10(34): 1205-1217.

[8] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 6(36): 789-814.

[9] Zhang L, Huang B. Robust model predictive control of singular systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(6): 1000-1006.

[10] 刘晓华, 王利杰. 不确定广义系统的输出反馈鲁棒预测控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(9): 1371-1376.
(Liu X H, Wang L J. Robust model predictive control for uncertain singular systems via dynamic output feedback[J]. Control and Decision, 2009, 24(9): 1371-1376.)

[11] 刘晓华, 杨园华. 基于观测器的不确定广义时滞系统鲁棒预测控制[J]. 控制与决策, 2009, 24(4): 606-611.
(Liu X H, Yang Y H. Robust model predictive control of singular systems with delayed-state and parameter uncertainty based on state observer[J]. Control and Decision, 2009, 24(4): 606-611.)

[12] Limon D, Alamo T, Salas F, et al. Input-to-state stability of min-max MPC controller for nonlinear systems with bounded uncertainties[J]. Automatica, 2006, 42(5): 797-803.

[13] Lazar M, De La Pena D M, Heemels W P M H, et al. On input-to-state stability of min–max nonlinear model predictive control[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(1): 39-48.

[14] He D F, Huang H, Chen Q X. Quasi-min-max MPC for constrained nonlinear systems with guaranteed input-to-state stability[J]. J of the Franklin Institute, 2014, 351(6): 3405-3423.

[15] Zhang G, Xia Y, Shi P. New bounded real lemma for discrete-time singular systems[J]. Automatica, 2008, 44(3): 886-890.

[16] poursafar N, Taghirad H D, Haeri M. Model predictive control of nonlinear discrete-time systems: A linear matrix inequality approach[J]. IET Control Theory Applications, 2010, 4(10): 1922-1932.

(责任编辑: 闫 妍)