

多变量时滞 GM(1,N) 模型及其应用

王正新

(浙江财经大学 a. 经济与国际贸易学院, b. 中国金融研究院, 杭州 310018)

摘要: 针对具有时滞因果关系的小样本系统建模问题, 提出一种灰色多变量时滞 GM(1,N) 模型及其求解方法; 考虑到相关变量累加序列变化量较大的情形下, 驱动项不能被视为灰常量的问题, 给出了时滞 GM(1,N) 模型的一种派生模型. 在此基础上, 通过数值仿真和实例分析验证了新模型的有效性. 数值结果表明: 时滞 GM(1,N) 模型能够较好地描述和预测含时滞特征的小样本数据系统的运行规律, 不考虑相关因素的时滞作用时, 时滞 GM(1,N) 模型退化为经典的 GM(1,N) 模型.

关键词: 灰色系统; GM(1,N) 模型; 时滞; 预测

中图分类号: N941.5

文献标志码: A

Multivariable time-delayed GM(1, N) model and its application

WANG Zheng-xin

(a. School of Economics & International Trade, b. China Academy of Financial Research, Zhejiang University of Finance & Economics, Hangzhou 310018, China. E-mail: jenkins226@163.com)

Abstract: As to the modeling problems in small sample systems with time-delay causality, the multivariable grey time-delay GM(1,N) model and its solving method are proposed. Considering that driving items in the model can not be seen as grey constants when the accumulative sequences of relevant variables change significantly, a derived GM(1,N) model with time-delay is further deduced. On this basis, the effectiveness of the new model is verified by the numerical simulation and actual examples. Results show that the time-delay GM(1,N) model can better describe and predict delay characteristics of systems with small sample data. The time-delay GM(1,N) model degenerates to the traditional one without considering the factor of time-delay.

Keywords: grey system; GM(1,N) model; time-delay; modeling; forecasting

0 引言

变量之间因果作用的时滞现象广泛存在于现实经济社会系统中, 例如: 从投资到产出、从发现需求到生产、从生产到消费的过程均具有系统延迟特征. 在具有大样本数据的条件下, 应用统计建模方法可以对时滞现象进行描述, 相关理论和方法体系较为成熟并得到了广泛的应用; 在小样本数据条件下, 相关研究工作难以在概率统计理论框架体系下展开. 我国著名学者邓聚龙教授提出的灰色系统理论^[1]为解决“小样本, 贫信息”系统的建模、预测和控制问题提供了一种有效的途径.

GM(1,N) 模型^[1-3]是多变量灰色系统建模方法的基本模型, 该模型中包含一个系统行为变量和 $N-1$ 个影响因子变量, 常用于分析多个影响因子变量对系

统行为变量的作用; 在已知影响因子变量的变化趋势的情形下, 还可以对系统行为变量作预测. 邓聚龙教授^[1]首先提出了多变量灰色 GM(1,N) 模型, 并将其用于湖北省某城市的经济、科技、社会协调发展规划. Kung 等^[4]比较了 GARCH 模型和 GM(1,N) 模型在金融市场预测中的表现, 发现 GM(1,N) 预测方法具有较高的鲁棒性, 但其预测能力明显弱于 GARCH 模型. 事实上, 邓聚龙教授已在文献 [1] 中指出, 尽管 GM(1, N) 模型自身具有动态特性, 但由于它不具有全信息而一般不适合预测; Tien 等^[5]的研究发现, GM(1,N) 模型在预测中容易出现大误差的现象, 并用实验数据验证了邓聚龙教授的观点. 所以, 目前直接应用 GM(1,N) 模型的研究大都主要集中在经济社会系统的静态分析上^[6-8].

收稿日期: 2014-07-23; 修回日期: 2014-10-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71101132, 71271086, 71301061, 71571157); 浙江省自然科学基金项目(LY15G010005).

作者简介: 王正新(1981-), 男, 副教授, 博士, 从事小样本时间序列预测、数量经济学等研究.

尽管经典 GM(1,N) 模型存在动态预测上的缺陷, 但由于其在小样本数据建模方面的优势, 很多学者提出了有价值的改进模型. Hsu 等^[9]采用遗传算法优化 GM(1,N) 模型的背景值插值系数, 将优化模型应用于预测台湾地区集成电路行业的产值; Hao 等^[10]利用灰色关联分析确定变量间的滞后期, 以此为基础建立 GM(1,N) 模型进行预测; 仇伟杰等^[11]基于采样定理和状态转移矩阵研究了 GM(1,N) 模型离散化结构解问题, 在 GM(1,N) 模型差分方程和微分方程之间架起一座桥梁; 谢乃明等^[12]将单变量离散灰色模型拓展为多变量离散灰色模型; 黄继^[13]针对现实系统输入与输出的时滞关系, 提出多变量 G(1,N|τ, r) 模型, 并应用粒子群算法求解模型参数; Guo 等^[14]对 GM(1,N) 模型序列生成和背景值进行了改进; Tien^[15]在传统 GM(1,N) 模型灰色微分方程中增加了一个控制参数, 同时采用卷积积分技术求解白化微分方程, 改进后的模型被命名为 GMC(1,n) 模型, 在其后的研究中相继提出了改进的 GMC(1,n) 模型^[16-18]. 此外, 用一组 GM(1,N) 模型描述系统动态行为的建模方法(如系统灰预测^[1,2]、MGM(1,N)^[19-21])也得到了广泛关注. 这些改进方法在一定程度上提高了 GM(1,N) 模型动态预测的预测能力.

现有的多变量灰色 GM(1,N) 模型及其改进形式一般只适用于同步变化的变量建模预测, 而不能适应现实经济社会系统中广泛存在的时滞因果作用关系. 直接应用 GM(1,N) 模型预测具有时滞特征的行为序列, 极有可能导致较大预测误差的问题. 本文试图建立适用于时滞系统行为序列预测的 GM(1,N) 模型, 以期在一定程度上弥补传统 GM(1,N) 模型的缺陷.

1 时滞 GM(1, N) 模型及其求解

1.1 时滞 GM(1, N) 模型的定义及其参数估计

定义 1 设系统特征数据序列为

$$X_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(n)),$$

相关因素序列为

$$X_2^{(0)} = (x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), \dots, x_2^{(0)}(n)),$$

$$X_3^{(0)} = (x_3^{(0)}(1), x_3^{(0)}(2), \dots, x_3^{(0)}(n)),$$

⋮

$$X_N^{(0)} = (x_N^{(0)}(1), x_N^{(0)}(2), \dots, x_N^{(0)}(n)).$$

$X_i^{(1)}$ 为 $X_i^{(0)}$ 的一阶累加生成(1-AGO)序列, $i = 2, 3, \dots, N$, $Z_1^{(1)}$ 为 $X_1^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, 则称

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = b_2 \sum_{j=1}^k \lambda_2^{k-j} x_2^{(1)}(j) + b_3 \sum_{j=1}^k \lambda_3^{k-j} x_3^{(1)}(j) + \dots + b_N \sum_{j=1}^k \lambda_N^{k-j} x_N^{(1)}(j) =$$

$$\dots + b_N \sum_{j=1}^k \lambda_N^{k-j} x_N^{(1)}(j) = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j) \quad (1)$$

为时滞 GM(1,N) 模型.

上述模型中, 离散时间变量 $k = 1, 2, \dots, n, -a$ 为系统发展系数, $\sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j}$ 为驱动项, 驱动系数 $b_i \lambda_i^{k-j}$ 随时间的推移呈递减规律, λ_i 为第 i 个变量对系统行为特征变量影响的递减程度, $0 < \lambda_i < 1, i = 2, 3, \dots, N$. λ_i 越大, 递减速度越慢; 反之, 递减速度越快. 如果不考虑相关因素的时滞作用而只考虑 $j = k$, 则驱动项为 $b_i x_i^{(1)}(k)$, 此时, 时滞 GM(1,N) 模型退化为经典的 GM(1,N) 模型.

与单变量灰色模型相比, 多变量灰色模型在参数辨识过程中更容易出现数据矩阵的漂移现象. 在建立时滞 GM(1,N) 模型之前最好对数量级较大的原始数据序列做预处理, 具体方法可采用初值化或均值化等数据变换.

定理 1 设 $X_1^{(0)}$ 为系统特征数据序列, $X_i^{(0)} (i = 2, 3, \dots, N)$ 为相关因素数据序列, $X_i^{(1)}$ 为诸 $X_i^{(0)}$ 的 1-AGO 序列, $Z_1^{(1)}$ 为 $X_1^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, λ_i 为 $(0, 1)$ 区间内的给定值, 而

$$B =$$

$$\begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & \sum_{j=1}^2 \lambda_2^{2-j} x_2^{(1)}(j) & \dots & \sum_{j=1}^2 \lambda_N^{2-j} x_N^{(1)}(j) \\ -z_1^{(1)}(3) & \sum_{j=1}^3 \lambda_2^{3-j} x_2^{(1)}(j) & \dots & \sum_{j=1}^3 \lambda_N^{3-j} x_N^{(1)}(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -z_1^{(1)}(n) & \sum_{j=1}^n \lambda_2^{n-j} x_2^{(1)}(j) & \dots & \sum_{j=1}^n \lambda_N^{n-j} x_N^{(1)}(j) \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix},$$

则参数列 $\hat{a} = [a, b_1, b_2, \dots, b_N]^T$ 的最小二乘估计满足:

- 1) 当 $n = N + 1$ 时, $\hat{a} = B^{-1}Y, |B| \neq 0$;
- 2) 当 $n > N + 1$ 时, $\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y, |B^T B| \neq 0$;
- 3) 当 $n < N + 1$ 时, $\hat{a} = B^T (B^T B)^{-1} Y, |B^T B| \neq 0$.

定义 2 设 $\hat{a} = [a, b_1, b_2, \dots, b_N]^T$, 称

$$\frac{dx_1^{(1)}(t)}{dt} + ax_1^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^T b_i \lambda_i^{t-s} x_i^{(1)}(s) ds \quad (2)$$

为时滞 GM(1,N) 模型的白化方程.

设 $X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, i = 2, 3, \dots, N, Z_1^{(1)}, B, Y$ 如定理 1 所述, 则时滞 GM(1,N) 模型白化方程的解为

$$x_1^{(1)}(t) = e^{-at} \left\{ \sum_{i=2}^N \iint b_i \lambda_i^{t-s} x_i^{(1)}(s) e^{at} ds dt + c \right\}, \quad (3)$$

其中 c 为待定常数.

将初始条件 $x_i^{(1)}(0)$ 代入式 (3), 可得

$$c = x_1^{(1)}(0) - \sum_{i=2}^N \int b_i x_i^{(1)}(0) e^{at} dt, \quad (4)$$

所以 $x_1^{(1)}(t)$ 可进一步表示为

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}(t) = & e^{-at} \left\{ \sum_{i=2}^N \iint b_i \lambda_i^{t-s} x_i^{(1)}(s) e^{at} ds dt + \right. \\ & x_1^{(1)}(0) - \sum_{i=2}^N \int b_i x_i^{(1)}(0) e^{at} dt \left. \right\} = \\ & e^{-at} \left\{ x_1^{(1)}(0) - t \sum_{i=2}^N b_i x_i^{(1)}(0) + \right. \\ & \left. \sum_{i=2}^N \iint b_i \lambda_i^{t-s} x_i^{(1)}(s) e^{at} ds dt \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

当 $X_i^{(1)}(i = 2, 3, \dots, N)$ 变化幅度很小时, 可视 $\sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j)$ 为灰常量, 时滞 GM(1,N) 模型的近似时间响应式为

$$\begin{aligned} \hat{x}_1^{(1)}(k) = & \left[x_1^{(1)}(1) - \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j) \right] e^{-a(k-1)} + \\ & \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j). \quad (6) \end{aligned}$$

一阶累减还原式为

$$\hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \hat{x}_1^{(1)}(k+1) - \hat{x}_1^{(1)}(k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

1.2 时滞 GM(1, N) 模型的派生模型

上述时滞 GM(1,N) 模型的白化时间响应函数是近似解, 在实际应用中, 很可能出现 $X_i^{(1)}(i = 2, 3, \dots, N)$ 变化幅度很大的情况, 此时驱动项不能被视为灰常量, 因而, 式 (6) 不能用于实际预测, 否则会出现较大误差. 为了解决这一问题, 下面给出时滞 GM(1,N) 模型的一种派生模型, 该模型可以替代式 (6) 直接用于模拟和预测.

定理 2 从时滞 GM(1,N) 模型的定义型可以推导其派生模型时滞 GM(1,N, $x^{(1)}$) 模型

$$x_1^{(0)}(k) = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k \beta_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j) - \alpha x_1^{(1)}(k-1). \quad (8)$$

其中: $k = 1, 2, \dots, n, \beta_i = \frac{b_i}{1+0.5a}, \alpha = \frac{a}{1+0.5a}$.

证明 任给 $k = 1, 2, \dots, n$, 因 $x_1^{(0)}(k)$ 的背景值

$$\begin{aligned} z_1^{(1)}(k) = & 0.5x_1^{(1)}(k-1) + 0.5x_1^{(1)}(k-1) + 0.5x_1^{(0)}(k) = \\ & x_1^{(1)}(k-1) + 0.5x_1^{(0)}(k), \quad (9) \end{aligned}$$

将式 (9) 代入时滞 GM(1,N) 模型的定义型, 得

$$\begin{aligned} x_1^{(0)}(k) + a[x_1^{(1)}(k-1) + 0.5x_1^{(0)}(k)] = & \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j), \quad (10) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} (1+0.5a)x_1^{(0)}(k) = & \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j) - \\ & ax_1^{(1)}(k-1). \quad (11) \end{aligned}$$

解之得

$$\begin{aligned} x_1^{(0)}(k) = & \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k \frac{b_i}{1+0.5a} \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j) - \\ & \frac{a}{1+0.5a} x_1^{(1)}(k-1). \quad (12) \end{aligned}$$

由此定理 2 得证. \square

1.3 时滞 GM(1, N) 模型的参数优化

在实际建模过程中, 反映第 i 个变量对系统行为特征变量影响的递减程度的参数 λ_i 是未知的, 可根据经验事先给出 λ_i 的值, 然后按照建立时滞 GM(1, N) 模型的步骤估计出结构参数列, 进而求解模型的时间响应函数. 本文从提高建模精度的角度考虑, 以建模的平均误差最小化为目标, 以模型参数之间的关系为约束条件, 构建以下非线性优化模型.

1) 若 $X_i^{(1)}(i = 2, 3, \dots, N)$ 变化幅度较小, 则采用式 (6) 作为时间响应函数, 可以通过以下非线性规划模型求解 λ_i :

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_i} \text{avg}(e(k)) = & \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(k) - x_1^{(0)}(k)|}{x_1^{(0)}(k)}, \\ & i = 2, 3, \dots, N. \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \hat{x}_1^{(0)}(k) - \hat{x}_1^{(1)}(k) - \hat{x}_1^{(1)}(k-1), k = 2, 3, \dots, n; \\ \hat{x}_1^{(1)}(k) = \\ \left[x_1^{(1)}(1) - \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j) \right] e^{-a(k-1)} + \\ \frac{1}{a} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k b_i \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j), k = 2, 3, \dots, n; \\ \hat{a} = [a, b_1, b_2, \dots, b_N]^T; \\ 0 < \lambda_i < 1, i = 2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (13)$$

2) 若 $X_i^{(1)}(i = 2, 3, \dots, N)$ 变化幅度较大, 则采用式 (12) 作为时间响应函数, 可通过以下非线性规划模型求解 λ_i :

$$\min_{\lambda_i} \text{avg}(e(k)) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(k) - x_1^{(0)}(k)|}{x_1^{(0)}(k)},$$

$$i = 2, 3, \dots, N.$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \hat{x}_1^{(0)}(k) = \\ \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^k \frac{b_i}{1+0.5a} \lambda_i^{k-j} x_i^{(1)}(j) - \\ \frac{a}{1+0.5a} x_1^{(1)}(k-1), k = 2, 3, \dots, n; \\ \hat{a} = [a, b_1, b_2, \dots, b_N]^T; \\ 0 < \lambda_i < 1, i = 2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (14)$$

上述两个优化问题可通过优化软件 LINGO 或一些智能优化算法 (遗传算法或粒子群算法等) 进行求解, 一旦确定了 $\lambda_i (i = 2, 3, \dots, N)$ 的最优值, 模型的结构参数 a, b_2, b_3, \dots, b_N 也相应确定, 然后将求解结果代入时间响应函数即可得到模拟和预测结果.

2 数值仿真

设有一个双变量离散时滞系统

$$\begin{cases} x_1^{(0)}(k) = \sum_{j=1}^k 0.5^{k-j} x_2^{(1)}(j), \\ x_2^{(1)}(k) = e^{-a(k-1)} + \varepsilon(k). \end{cases}$$

其中: $\varepsilon(k)$ 为随机偏差, 取 $\varepsilon(k) = (-1)^{k-1} \varepsilon, \varepsilon = 0.01, k = 1, 2, \dots, n$.

在该系统中, 发展系数 $-a$ 决定着由其生成序列的变化特征, 为了测试多变量时滞模型对不同特征系统数据的建模效果, 本文将发展系数取为 $-a = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$ 十个不同数值, 由此生成 10 组具有不同特征的仿真数据. 取每组数据中的前 7 个数据构成小样本序列, 即取 $k = 1, 2, \dots, 7$, 分别建立 GM(1,1)^[1]、GM(1,N)^[2] 和本文提出的时滞 GM(1,N) 三种 (共 30 个) 模型, 比较它们对 10 组不同特征数据序列的模拟精度. 本文取平均模拟相对误差作为评价模型优越性的统计指标, 其计算公式为

$$\text{avg}(e(k)) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(k) - x_1^{(0)}(k)|}{x_1^{(0)}(k)} \times 100\%.$$

本例中 $X_2^{(1)}$ 变化幅度较大, 此时驱动项不能被视为灰常量, 为了避免由此导致的误差, 适合建立时滞 GM(1,N) 派生模型. 经计算, 3 种模型的平均模拟相对误差见表 1, 时滞 GM(1,N) 模型与 GM(1,N) 模型和 GM(1,1) 模型的误差比较曲线分别如图 1 和图 2 所

示. 由表 1 可以看出, GM(1,N) 模型的平均模拟误差明显大于时滞 GM(1,N) 模型和 GM(1,1) 模型, 参照灰色模型的精度检验标准^[2], GM(1,N) 模型显然不能通过 10% 的误差检验; 单变量 GM(1,1) 模型在发展系数较小的区间误差检验合格, 但当发展系数达到 0.6 以上时, 误差较大; 而本文提出的时滞 GM(1,N) 模型模拟误差始终在 5% 以下, 其模拟精度比较理想.

表 1 3 种模型的平均模拟相对误差 %

$-a$	GM(1,1)	GM(1,N)	时滞 GM(1, N)
0.1	0.11	45.89	4.75
0.2	0.53	62.31	0.91
0.3	1.41	76.73	1.68
0.4	2.87	89.52	2.68
0.5	5.00	100.95	2.29
0.6	7.87	111.19	1.75
0.7	11.48	120.39	1.36
0.8	15.8	128.65	1.07
0.9	20.75	136.08	0.86
1.0	26.19	142.74	0.69

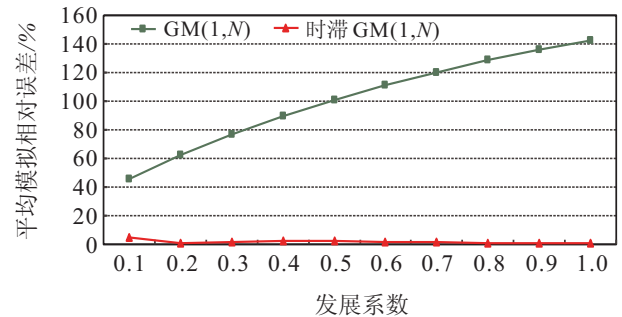


图 1 时滞 GM(1, N) 模型和传统 GM(1, N) 模型模拟误差曲线

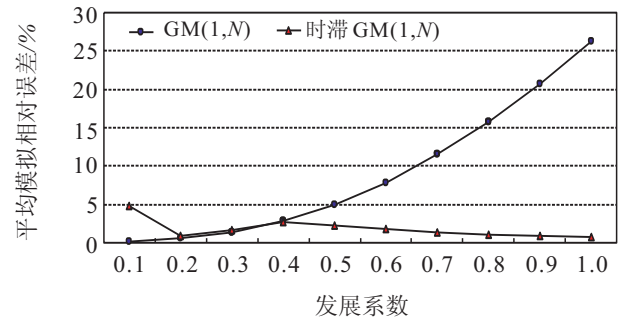


图 2 时滞 GM(1, N) 模型和 GM(1, 1) 模型模拟误差曲线

图 1 显示, 无论发展系数取何值, GM(1,N) 模型的误差曲线始终在时滞 GM(1,N) 模型的上方, 且随着发展系数的增大, 其平均模拟误差有明显增大的趋势. 本文提出的时滞 GM(1,N) 模型则相对稳定, 原因在于传统 GM(1,N) 模型只适用于同步变化的多变量系统建模, 而时滞 GM(1,N) 模型能够较好地描述变量间作用关系在时间上的延迟.

由图2可见,当发展系数低于0.4时,GM(1,1)模型的误差小于时滞GM(1,N)模型,而当发展系数大于等于0.4时,GM(1,1)模型的误差快速增大,这是由单变量灰色模型的基本特性^[2]所决定的.本文提出的时滞GM(1,N)模型与之相反,当发展系数大于0.4时,平均模拟误差随着发展系数的增大而明显地递减,这是时滞GM(1,N)模型优于传统模型的重要特性.单变量模型GM(1,1)虽然具有“全信息^[1]”建模的优点,但它与传统GM(1,N)模型一样,无法适应发展系数较高的数据序列,也无法描述变量之间的时滞关系.

3 应用实例

固定资产投资作为资本积累的重要途径,它对经济增长的作用是最为活跃的一个部分,它直接关系到国民经济增长的规模、速度、结构和效益,也一直是政府为实现经济增长目标和进行宏观调控的重要手段.固定资产投资对经济增长的作用过程通常具有时滞,也就是说固定资产投资需要经过一定的时间后才能完全作用于经济增长.由于统计口径的变化,《浙江省统计年鉴》只公布了自2003年以来的固定资产投资额数据,分析浙江省固定资产投资对经济增长的作用,具有小样本数据集的特征.2003~2011年浙江省经济总产值与固定资产投资额的统计数据如表2所示.为了验证时滞GM(1,N)模型对不同特征的小样本实际序列的预测效果,本文将表2中的数据按时间分成3组建模并作一步预测,分组时间段为2003~2008、2004~2009和2005~2010,这3组序列体现了浙江省经济增长和固定资产投资数据的时变特征.下面以浙江全省经济总产值序列 $X_1^{(0)}$ 为系统特征序列,以固定资产投资额序列 $X_2^{(0)}$ 为影响因素序列,针对

上述3组数据分别建立GM(1,1)模型、GM(1,N)模型和时滞GM(1,N)模型,并对2009、2010和2011年的经济总产值作一步预测,分析比较不同建模方法的特点.

表2中的原始数据序列数量级较大,为了避免模型在参数辨识过程中出现数据矩阵的漂移现象,本文采用初值化方法^[1]对3组不同特征的数据分别进行处理后再建模,初值化之后的3组数据分别为

$$\begin{cases} X_1^{(0)} = \\ (1.000\ 0, 1.200\ 3, 1.382\ 6, 1.619\ 6, 1.932\ 4, 2.211\ 5), \\ X_2^{(0)} = \\ (1.000\ 0, 1.288\ 0, 1.468\ 4, 1.665\ 9, 1.843\ 1, 2.045\ 4); \\ X_1^{(0)} = \\ (1.000\ 0, 1.151\ 9, 1.349\ 4, 1.609\ 9, 1.842\ 5, 1.973\ 6), \\ X_2^{(0)} = \\ (1.000\ 0, 1.140\ 0, 1.293\ 4, 1.431\ 0, 1.588\ 1, 1.839\ 9); \\ X_1^{(0)} = \\ (1.000\ 0, 1.171\ 5, 1.397\ 7, 1.599\ 6, 1.713\ 4, 2.066\ 1), \\ X_2^{(0)} = \\ (1.000\ 0, 1.134\ 5, 1.255\ 2, 1.393\ 0, 1.613\ 9, 1.865\ 6). \end{cases}$$

对应于以上3组数据,GM(1,1)模型、GM(1,N)模型和时滞GM(1,N)模型的模拟预测结果如表3~表5所示.由于上述3组数据中的 $X_2^{(1)}$ 变化幅度较大,驱动项不能被视为灰常量,本例采用时滞GM(1,N)模型的派生形式建模预测.表3~表5中所列模拟预测值为初值化逆变换值.

表2 2003-2011年浙江省经济总产值与固定资产投资额

年份	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
总产值	9 705.02	11 648.7	13 417.7	15 718.47	18 753.73	21 462.69	22 990.35	27 722.31	32 318.85
投资额	4 180.38	5 384.38	6 138.39	6 964.28	7 704.90	8 550.71	9 906.46	11 451.98	14 077.25

亿元

表3 第1组数据的模拟和预测结果

年份	原始数据/亿元	GM(1,1)模型		GM(1,N)模型		时滞GM(1,N)模型	
		模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%
2003	9 705.02	9 705.02	—	9 705.02	—	9 705.02	—
2004	11 648.7	11 562.08	0.74	9 991.74	14.22	9 554.96	17.97
2005	13 417.7	13 503.88	0.64	16 856.45	25.63	12 461.41	7.13
2006	15 718.47	15 771.79	0.34	18 698.06	18.96	15 718.47	0.00
2007	18 753.73	18 420.58	1.78	19 884.38	6.03	20 665.31	10.19
2008	21 462.69	21 514.23	0.24	21 595.31	0.62	20 773.85	3.21
平均模拟误差/%			0.75		13.09		7.70
2009	22 990.35	25 127.44	9.30	24 788.82	7.82	23 556.9	2.46

表 4 第 2 组数据的模拟和预测结果

年份	原始数据/亿元	GM(1,1) 模型		GM(1,N) 模型		时滞 GM(1,N) 模型	
		模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%
2004	11 648.7	11 648.7	—	11 648.7	—	11 648.7	—
2005	13 417.7	13 911.74	3.68	10 675.97	20.43	12 261.55	8.62
2006	15 718.47	15 882.74	1.05	20 942.25	33.23	15 513.00	1.31
2007	18 753.73	18 133.00	3.31	20 804.99	10.94	18 550.28	1.08
2008	21 462.69	20 702.07	3.54	22 105.07	2.99	22 858.01	6.50
2009	22 990.35	23 635.12	2.80	25 039.50	8.91	22 343.25	2.81
平均模拟误差/%		2.88		15.30		4.06	
2010	27 722.31	26 983.73	2.66	28 701.50	3.53	27 872.86	0.54

表 5 第 3 组数据的模拟和预测结果

年份	原始数据/亿元	GM(1,1) 模型		GM(1,N) 模型		时滞 GM(1,N) 模型	
		模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%	模拟预测值	相对误差/%
2005	13 417.7	13 417.7	—	13 417.7	—	13 417.7	—
2006	15 718.47	16 027.35	1.97	12 240.96	22.12	14 486.48	7.84
2007	18 753.73	18 308.89	2.37	23 702.65	26.39	17 393.46	7.25
2008	21 462.69	20 915.21	2.55	22 472.15	4.70	19 478.10	9.25
2009	22 990.35	23 892.54	3.92	25 006.36	8.77	25 883.56	12.58
2010	27 722.31	27 293.70	1.55	28 491.67	2.78	27 355.39	1.32
平均模拟误差/%		2.47		12.95		7.65	
2011	32 318.85	31 179.03	3.53	34 864.80	7.88	32 490.11	0.53

由表 3~表 5 可以看出, 尽管数据的特征不同, 但应用 GM(1,1) 模型、GM(1,N) 模型和时滞 GM(1,N) 模型的模拟和预测误差的特征十分相似. GM(1,1) 模型对 3 组数据的平均模拟误差均小于 5%, 小于 GM(1,N) 模型和时滞 GM(1,N) 模型, 但其预测精度均大于时滞 GM(1,N) 模型. 这主要是由于本例的数据序列发展系数较小, 此时应用单变量 GM(1,1) 模型建模预测是恰当的, 但对于发展系数较大的数据序列 GM(1,1) 模型难以适应, 这一点在数值仿真中已得到验证.

传统 GM(1,N) 模型的模拟平均误差均大于 10%, 说明该模型对具有时滞因果关系的系统建模精度不高, 原因在于该模型只能反映同步变化的多变量序列之间的动态关系. 时滞 GM(1,N) 模型模拟和预测精度均高于传统 GM(1,N) 模型, 这说明时滞 GM(1,N) 模型能够有效改善传统模型对时滞因果关系的描述能力. 本例中时滞 GM(1,N) 模型对浙江省经济总产值的预测误差均小于其他两种模型, 对 3 组数据序列的一步预测误差也都小于 5%, 实现了高精度预测.

4 结 论

含时滞特征的小样本数据系统建模工作难以在统计建模的理论框架体系下开展, 本文基于多变量灰色系统建模方法提出了时滞 GM(1,N) 模型及其派生模型, 并给出了参数优化方法, 为解决具有时滞因果关系小样本系统建模问题提供了有效工具. 在相

关因素序列的一阶累加值随时间变化幅度较小时, 时滞 GM(1,N) 模型白化微分方程的近似解可用于预测, 反之, 驱动项不能被视为灰常量, 需采用派生模型对系统行为特征序列进行预测. 实例分析表明, 时滞 GM(1,N) 模型能够有效地描述浙江省固定资产投资与经济增长作用的时滞关系, 并能显著地提高对经济增长序列的模拟和预测精度.

参考文献(References)

- [1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 1-5.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002: 1-5.)
- [2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 123-127.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application [M]. Beijing: Science Press, 2004: 123-127.)
- [3] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 100-135.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. The basis and applications of grey technology [M]. Beijing: Science Press, 2005: 100-135.)
- [4] Kung L M, Yu S W. Prediction of index futures returns and the analysis of financial spillovers — A comparison between GARCH and the grey theorem[J]. European J of Operational Research, 2008, 186(3): 1184-1200.

- [5] Tien T L. A research on the grey prediction model GM(1,n)[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(9): 4903-4916.
- [6] Emil S, Camelia D. Complete analysis of bankruptcy syndrome using grey systems theory[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(1): 19-32.
- [7] Fariborz R, Mahdi M, Ebrahim M. Application of grey theory approach to evaluation of organizational vision[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(1): 33-46.
- [8] Wang Z X, Dang Y G, Zhao J J. Integration of regional science and technology resources based on GM(1,3)[J]. The J of Grey System, 2010, 22(2): 129-136.
- [9] Hsu L C. Forecasting the output of integrated circuit industry using genetic algorithm based multivariable grey optimization models[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(4): 7898-7903.
- [10] Hao Y H, Wang Y J, Zhao J J. Grey system model with time lag and application to simulation of karst spring discharge[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(1): 47-56.
- [11] 仇伟杰, 刘思峰. GM(1,N)模型的离散化结构解[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(11): 1679-1699.
(Qiu W J, Liu S F. Dispersed structure solve of model GM(1,N) [J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 28(11): 1679-1699.)
- [12] 谢乃明, 刘思峰. 多变量离散灰色模型及其性质[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 28(6): 143-150.
(Xie N M, Liu S F. Research on the discrete grey model of multi-variables and its properties[J]. System Engineering – Theory & Practice, 2008, 28(6): 143-150.)
- [13] 黄继. 灰色多变量GM(1,N| τ , r)模型及其粒子群优化算法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(10): 145-151.
(Huang J. Grey GM(1,N| τ , r) model and its particle swarm optimization algorithm[J]. System Engineering – Theory & Practice, 2009, 29(10): 145-151.)
- [14] Guo H, Xiao X P, Forest J. A research on a comprehensive adaptive grey prediction model CAGM(1,N)[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 225(1): 216-227.
- [15] Tien T L. The indirect measurement of tensile strength of material by the grey prediction model GMC(1, n)[J]. Measurement Science Technology, 2005, 16(5): 1322-1328.
- [16] Tien T L. The deterministic grey dynamic model with convolution integral DGDGM(1,n)[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(8): 3498-3510.
- [17] Tien T L. The indirect measurement of tensile strength for a higher temperature by the new model IGDGM(1,n)[J]. Measurement, 2008, 41(6): 662-675.
- [18] Tien T L. The indirect measurement of tensile strength by the new model FGMC(1,n)[J]. Measurement, 2011, 44(10): 1884-1897.
- [19] 翟军, 盛建明, 冯英浚. MGM(1,n)灰色模型及应用[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(5): 109-113.
(Zhai J, Sheng J M, Feng Y J. MGM (1,n) grey model and its application[J]. System Engineering – Theory & Practice, 1997, 17(5): 109-113.)
- [20] 王丰效. 多变量非等间距MGM(1,m)模型及其应用[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(3): 388-390.
(Wang F X. Multivariable non-equidistance MGM(1,m) model and its application[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(3):388-390.)
- [21] 崔立志, 刘思峰, 吴正朋. 基于向量连分式理论的MGM(1,n)模型[J]. 系统工程, 2008, 26(10): 47-51.
(Cui L Z, Liu S F, Wu Z P. MGM(1,n) based on vector continued fractions theory[J]. Systems Engineering, 2008, 26(10): 47-51.)

(责任编辑: 孙艺红)