

永磁同步电动机的分数阶时域和频域建模

余伟^{1,2}, 皮佑国², 王钦若¹

(1. 广东工业大学 自动化学院, 广州 510006; 2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510641)

摘要: 采用机理与数据相结合的建模方法对永磁同步电动机进行分数阶时域和频域建模. 在分数阶时域建模方法中, 设计伪随机激励信号, 获取实时实验数据并采用输出误差辨识算法来获取分数阶阶次; 在分数阶频域建模方法中, 由实时实验数据绘制出电动机的对数频率特性曲线. 采用分数阶频域建模中经典Levy辨识算法, 利用加权函数加以改进, 得到永磁同步电动机分数阶模型辨识结果. 最后通过对两种方法得到的结果进行对比表明了所提出模型的可靠性.

关键词: 分数阶; 建模; 永磁同步电动机; 输出误差辨识算法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Fractional-order modeling for permanent magnet synchronous motor in time and frequency domain

YU Wei^{1,2}, PI You-guo², WANG Qin-ruo¹

(1. School of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China; 2. School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China. Correspondent: YU Wei, E-mail: yuweiscut@163.com)

Abstract: Fractional-order modeling for permanent magnet synchronous motor is presented by adopting the combination of mechanism and data in time and frequency domain. The pseudo-random signals is designed to obtain real-time experiment data and numerical fitting to get the fractional order. Then data modeling is realized by using the output-error identification algorithm of the fractional-order system. An enhancement of the classic Levy identification method with weights is applied in the frequency domain. In a real-time permanent magnet synchronous motor plant, the fractional order model is identified according to the experimental tests by using the presented algorithm. The results are compared with two methods of fractional-order modeling, which show the reliability of the results.

Keywords: fractional; modeling; permanent magnet synchronous motor; output-error algorithm

0 引言

近些年, 分数阶微积分在科学、工程和工业领域的研究和应用不断增加, 其中分数阶系统建模是研究和发展最活跃的分支之一^[1]. 在控制理论学科中使用分数阶微积分的优势在于, 它能够更加准确地对包含记忆和遗传效应的系统建模. 因此, 分数阶微积分被用于不同领域建模, 尤其时域与频域建模在应用中受到了广泛关注^[2-4], 例如电容和电感中的记忆效应可用分数阶微积分来建模. 仿真实验和测试都验证了电感中的分数阶特性^[5-6].

与传统的电励磁电动机相比, 永磁同步电动机具有结构简单、体积小、重量轻、响应快、高效率、高

转矩惯量比、高功率因数、维修简单、运行可靠等优点^[7]. 随着永磁材料的飞速发展以及控制技术在同步电机中的应用, 永磁同步电动机在数控机床、机器人机电一体化、自动化办公、汽车电子等高性能的伺服领域获得了广泛的应用. 同步电机从原理上包含了交直流电机, 是电机的普适模型. 因此, 对永磁同步电动机进行更准确的建模, 对于运动控制具有普遍意义, 也有很强的应用背景.

在电机控制领域, 已有大量采用分数阶控制器获得更好控制性能的文献^[8-10]. 众多的研究成果表明, 实际电容和实际电感具有分数阶特性. 既然电容和电感这些储能元件是分数阶的, 则包含电感和机械储能

收稿日期: 2014-06-23; 修回日期: 2014-12-09.

基金项目: 广东省教育部产学研结合项目(2009B090300269).

作者简介: 余伟(1983-), 男, 博士后, 从事分数阶系统建模的研究; 皮佑国(1953-), 男, 教授, 博士生导师, 从事运动控制等研究.

的电动机模型实际上也是分数阶的, 因而用分数阶模型更能接近电动机的本质. 目前大部分的分数阶建模都是通过仿真建立分数阶模型^[11], 还未见有从实验角度对电动机分数阶建模的文献. 本文致力于通过实验数据, 利用分数阶微积分对永磁同步电动机进行建模研究并通过对所得模型的辨识结果表明了所提出方法的有效性.

1 永磁同步电动机分数阶模型结构

根据电机统一理论, 多相电动机可以等效为两相电动机. 三相永磁同步电动机经过变换以后, 在 d 轴电流为零的控制策略下, 可以等效为一台直流电动机. 在电流连续的条件下, 直流电动机的电枢回路满足如下微分方程:

$$U_d = RI_d + L \frac{dI_d}{dt} + E. \quad (1)$$

其中: U_d 是电枢电压, R 是定子电阻, I_d 是电枢电流, E 是反电动势.

忽略粘性摩擦和弹性扭矩, 电机轴的动态方程为

$$T_e - T_L = \frac{GD^2}{375} \frac{dn}{dt}. \quad (2)$$

其中: T_e 是电磁转矩, T_L 是电机的负载转矩, GD^2 是电力拖动系统整个运动部分折算到电动机轴上的飞轮惯量.

反电动势 E 和电磁转矩 T_e 可表示为

$$E = C_e n, \quad (3)$$

$$T_e = C_m I_d. \quad (4)$$

其中: C_e 是电动机的电动势系数, C_m 是电动机的转矩常数且 $C_m = \frac{30}{\pi} C_e$.

将式 (3) 和 (4) 代入 (1) 和 (2), 可得

$$U_d - E = R \left(I_d + T_l \frac{dI_d}{dt} \right), \quad (5)$$

$$I_d - I_{dL} = \frac{T_m}{R} \frac{dE}{dt}. \quad (6)$$

其中: $T_l = L/R$ 是电枢回路的电磁时间常数, $T_m = \frac{GD^2 R}{375 C_e C_m}$ 是电力拖动系统的机电时间常数, $I_{dL} = T_L/C_m$ 是负载电流. 在零初始条件下, 可得直流电动机在电流连续时电压与转速间的传递函数

$$G(s) = \frac{1/C_e}{T_m T_l s^2 + T_m s + 1}. \quad (7)$$

考虑到电动机具有电磁和机械两个储能环节, 且储能环节都是分数阶的, 永磁同步电机的分数阶方程表达式为

$$U_d - E = R \left(I_d + T_l \frac{dI_d^\zeta}{dt^\zeta} \right), \quad (8)$$

$$I_d - I_{dL} = \frac{T_m}{R} \frac{dE^\vartheta}{dt^\vartheta}, \quad (9)$$

其中 ζ 和 ϑ 分别为电机电磁环节的微分阶次和机械环节的微分阶次. 通过拉氏变换, 可以得到永磁同步电机分数阶传递函数的表达式为

$$G_{\zeta, \vartheta}(s) = \frac{1/C_e}{T_m T_l s^{\zeta + \vartheta} + T_m s^\zeta + 1}. \quad (10)$$

由于分数阶微积分的物理意义尚不明确, 无法进行机理建模, 只能通过实验和数据拟合的方法获得.

2 永磁同步电动机的分数阶时域建模

2.1 实验方案

图 1 是永磁同步电动机时域辨识实验框图, 在辨识实验开始之前, 永磁同步电动机首先运行在一个稳定速度状态下, 采用电压空间矢量脉冲宽度调制技术 (SVPWM). 这种方法是从电动机的角度出发, 其目标是使交流电动机产生圆形磁场. 逆变器把直流电变成幅值和频率可调的正弦交流电装置, 是实现控制策略的执行装置.

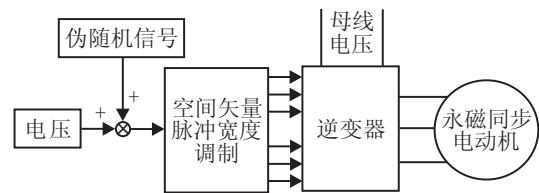


图 1 永磁同步电动机时域辨识实验框图

将伪随机信号加入到永磁同步电动机的输入端, 记录其输出响应, 并用适当的数学模型去逼近. 从提取出的分数阶模型结构可以看出, 它由稳态增益和两个分数阶微积分算子, 共 3 个参数来描述分数阶模型. 这 3 个模型参数中, 稳态增益 K 和分数阶微积分阶次 ζ 、 ϑ 可采用分数阶模型时域辨识算法得到.

2.2 分数阶时域输出误差辨识算法

永磁同步电动机的分数阶模型用两个分数阶积分器来表示, 传递函数 $G_{\zeta, \vartheta}(s)$ 可写成

$$G_{\zeta, \vartheta}(s) = \frac{K}{I_\zeta I_\vartheta + \frac{1}{T_l} I_\zeta + \frac{1}{T_m \cdot T_l}}. \quad (11)$$

其中: $I_\zeta(s)$ 和 $I_\vartheta(s)$ 是两个分数阶积分算子, 其阶次分别为

$$\zeta = 1 - (\log \alpha_1 / \log \alpha_1 \eta_1),$$

$$\vartheta = 1 - (\log \alpha_2 / \log \alpha_2 \eta_2).$$

α_1 和 η_1 满足以下关系: $\omega_i = \alpha_1 \omega'_i$, $\omega'_{i+1} = \eta_1 \omega_i$; 同理 α_2 和 η_2 也一样. 此处 ω'_i 和 ω_i 是本文所关注的频率宽度. 假设在时间 $t = MT_e$ 上得到 M 个时刻输入数据 u_m 和输出数据 y_m^* , T_e 是采样时间, y_m^* 是对象在噪声环境下测到的实际输出值. 定义 $\theta = [K, \alpha_1, \eta_1, \alpha_2, \eta_2]$, $\hat{\theta}$ 是实际参数向量的估计值. 采用输出误差辨识算法, 得到残差^[13]

$$\varepsilon_m = y_m^* - \hat{y}_m(u(t), \hat{\theta}). \quad (12)$$

$\hat{\theta}$ 的迭代算法公式为

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \{ [J''_{\theta\theta} + \lambda I]^{-1} J'_\theta \}_{\hat{\theta} = \theta_i}. \quad (13)$$

其中: $J'_\theta = -2 \sum_{m=1}^M \varepsilon_m \sigma_{m,\theta_i}$ 是梯度, $\sigma_{m,\theta_i} = \frac{\partial \hat{y}_m}{\partial \theta_i}$ 是

输出灵敏度函数; $J''_{\theta\theta} \approx 2 \sum_{m=1}^M \sigma_{m,\theta_i} \sigma_{m,\theta_i}^T$ 是海赛函数;

λ 是监督函数.

这种算法保证了结果的收敛鲁棒性, 无论 $\hat{\theta}$ 的初始值如何, 都能收敛到总体最优值附近. 简单说, 该算法就是基于梯度和海赛函数的计算, 其收敛性取决于灵敏度函数 σ_{m,θ_i} 的计算.

2.3 分数阶模型时域辨识结果

电动机本质上是一个低通滤波器, 设计伪随机信号, 其输入的时钟周期为 0.003 s, 序列长度为 127. 使用此伪随机信号, 可以完全激励永磁同步电动机的所有频谱, 得到建立模型的数据. 按照图 1 所示的永磁同步电动机时域辨识实验框图, 实验装置如图 2 所示, 伺服装置的驱动板是基于 TMS320F2812 的 DSP 控制单元. 用带有 JTAG 调试接口的伺服驱动装置控制永磁同步电动机, 同时连接电脑进行信号检测. 在线调试工具采用 TI 公司提供的 Code Composer Studio (CCS) 软件. 图 3 是分数阶时域辨识曲线. 其中: 设计的伪随机信号如图 3(a) 所示, 得到的电机输出响应如图 3(b) 所示.

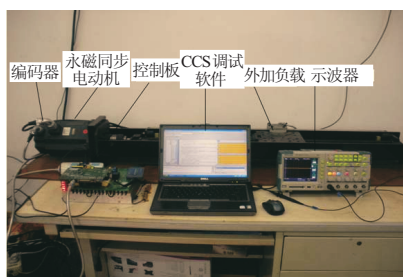
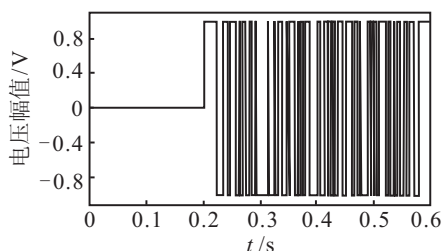
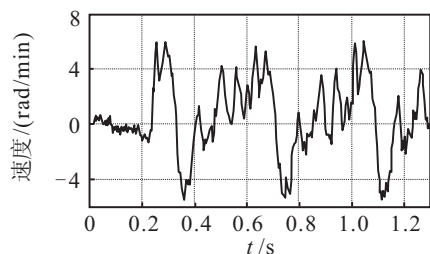


图 2 实验装置



(a) 输入永磁同步电动机的伪随机信号



(b) 永磁同步电动机输出响应

图 3 分数阶时域辨识曲线

辨识的分数阶次灵敏度函数如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta_K} = \dot{\sigma}_{x,\theta_K} = A(\theta) \sigma_{x,\theta_K}, \\ \frac{\partial y_k}{\partial \theta_K} = C^T(\theta) \sigma_{x,\theta_K} + \left[\frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta_K} \right]^T x; \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta_{\alpha_1}} = \dot{\sigma}_{x,\theta_{\alpha_1}} = A(\theta) \sigma_{x,\theta_{\alpha_1}} + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_{\alpha_1}} x, \\ \sigma_{y,\theta_{\alpha_1}} = C^T(\theta) \sigma_{x,\theta_{\alpha_1}}; \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta_{\eta_1}} = \dot{\sigma}_{x,\theta_{\eta_1}} = A(\theta) \sigma_{x,\theta_{\eta_1}} + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_{\eta_1}} x, \\ \sigma_{y,\theta_{\eta_1}} = C^T(\theta) \sigma_{x,\theta_{\eta_1}}; \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta_{\alpha_2}} = \dot{\sigma}_{x,\theta_{\alpha_2}} = \\ A(\theta) \sigma_{x,\theta_{\alpha_2}} + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_{\alpha_2}} x + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta_{\alpha_2}} u, \\ \sigma_{y,\theta_{\alpha_2}} = C^T(\theta) \sigma_{x,\theta_{\alpha_2}}; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta_{\eta_2}} = \dot{\sigma}_{x,\theta_{\eta_2}} = A(\theta) \sigma_{x,\theta_{\eta_2}} + \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_{\eta_2}} x, \\ \sigma_{y,\theta_{\eta_2}} = C^T(\theta) \sigma_{x,\theta_{\eta_2}}. \end{cases} \quad (18)$$

灵敏度函数计算利用 Matlab 仿真中的 lsim 指令, 给定频率范围 $[10^{-4} \text{ rad/s}, 10^4 \text{ rad/s}]$, 由式 (14)~(18) 得到 (10) 中的参数, 从而得到永磁同步电动机分数阶模型

$$G_{\zeta,\vartheta}(s) = \frac{6.82}{0.00002655s^{1.7452} + 0.0059s^{0.92} + 1}. \quad (19)$$

3 永磁同步电动机的分数阶频域建模

3.1 实验方案

频域辨识实验框图如图 1 所示, 在永磁同步电动机的输入端只施加正弦波电压激励信号, 用 CCS 软件同时记录对象的输入和输出, 每次用一个不同频率的正弦波测试, 重复多次. 由于电动机本质上是一个低通滤波器, 在 $[0.01 \text{ Hz}, 100 \text{ Hz}]$ 这个区间选取 10 个频率点 (Hz), 如 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 80, 100, 绘出永磁同步电动机的对数频率特性曲线.

3.2 分数阶频域 Levy 辨识算法

要对一般的分数阶系统进行辨识是很困难的, 目前还存在如何确定阶数以及其阶数的物理意义解析的问题, 因而对分数阶系统辨识的研究还很少, 不过借用 Hartley 等^[14]提出的连续分布阶的概念, 可将一般的分数阶系统转化为公因子阶分数系统. 因此, 永磁同步电机分数阶传递函数的表达式 (10) 可写成

$$G_{\zeta,\vartheta}(s) = \frac{b_0}{a_2 s^{2q} + a_1 s^q + 1}. \quad (20)$$

假设用线性系统描述一个对象并用传递函数 \hat{G} 表示, 对应的频率响应为 $\hat{G}(j\omega)$, 则本文的模型可用如下传递函数表示:

$$\hat{G}(s) = \frac{b_0 + b_1 s^q + b_2 s^{2q} + \dots + b_m s^{mq}}{a_0 + a_1 s^q + a_2 s^{2q} + \dots + a_n s^{nq}} = \frac{\left(\sum_{u=0}^m b_u s^{uq} \right)}{\left(\sum_{p=0}^n a_p s^{pq} \right)}. \quad (21)$$

其中: m 和 n 是分子和分母预先指定的阶次, q 是分数

阶微分阶次. 不失一般性, 设定 $a_0 = 1$, 则式 (21) 的频率响应可表示为

$$\hat{G}(j\omega) = \left(\sum_{u=0}^m b_u(j\omega)^{uq} \right) / \left(1 + \sum_{p=1}^n a_p(j\omega)^{pq} \right) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}, \quad (22)$$

其中 N 和 D 是复数. 在某个频率 ω 上, 模型和对象的误差表示为

$$\epsilon(j\omega) = G(j\omega) - N(j\omega)/D(j\omega). \quad (23)$$

采用 Levy 算法来最小化均方差的平方, 即

$$E(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon(j\omega)D(j\omega) = G(j\omega)D(j\omega) - N(j\omega). \quad (24)$$

因 $|E|^2 = EE^*$, 故 $E^*(j\omega) = G^*(j\omega)D^*(j\omega) - N^*(j\omega)$. 对式 (22) 中的系数 a_p ($p = 1, 2, \dots, n$) 和 b_u ($u = 0, 1, \dots, m$) 分别求微分, 令等式为零, 可得

$$\frac{\partial E}{\partial a_p} E^* + E \frac{\partial E^*}{\partial a_p} = 0, \quad a_p = a_1, a_2, \dots, a_n; \quad (25)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b_u} E^* + E \frac{\partial E^*}{\partial b_u} = 0, \quad b_u = b_0, b_1, \dots, b_m. \quad (26)$$

为了简便, 定义 $A(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |G(\omega)|$, $\varphi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \arg[G(\omega)]$, 则有 $G(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, $G^*(\omega) = A(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}$. 由此可得

$$\begin{aligned} & A \sum_{i=0}^n \left\{ a_i \cos \left[q(p-i) \frac{\pi}{2} \right] \omega^{iq} \right\} - \\ & \sum_{i=0}^m \left\{ b_i \cos \left[\varphi + q(p-i) \frac{\pi}{2} \right] \omega^{iq} \right\} = 0, \\ & \quad p = 1, 2, \dots, n; \\ & A \sum_{i=0}^n \left\{ a_i \cos \left[\varphi + q(i-u) \frac{\pi}{2} \right] \omega^{iq} \right\} - \\ & \sum_{i=0}^m \left\{ b_i \cos \left[q(u-i) \frac{\pi}{2} \right] \omega^{iq} \right\} = 0, \\ & \quad u = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (27)$$

由于噪声和不确定性, 对象的频率特性需要用多个点描述, 以避免辨识得到的模型不准确. 本文选择 f 个频率数据, 并将得到的每个频率数据相加. 另外, 为了减小模型在高频数据拟合好但在低频段拟合差的问题, 在每个频率点采用独立的加权数. 定义 $w(\omega_p) = w_p$, 对于每个频率点 ω_p , 式 (27) 改写为

$$\begin{aligned} & \sum_{g=1}^f \left(A_g \sum_{i=0}^n \left\{ a_i \cos \left[q(p-i) \frac{\pi}{2} \right] \omega_g^{iq} w_g \right\} - \right. \\ & \left. \sum_{i=0}^m \left\{ b_i \cos \left[\varphi_g + q(p-i) \frac{\pi}{2} \right] \omega_g^{iq} w_g \right\} \right) = 0, \\ & \quad p = 1, 2, \dots, n; \\ & \sum_{g=1}^f \left(A_g \sum_{i=0}^n \left\{ a_i \cos \left[\varphi_g + q(i-u) \frac{\pi}{2} \right] \omega_g^{iq} w_g \right\} - \right. \\ & \left. \sum_{i=0}^m \left\{ b_i \cos \left[q(u-i) \frac{\pi}{2} \right] \omega_g^{iq} w_g \right\} \right) = 0, \\ & \quad u = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (28)$$

采用的加权函数表达式为^[15]

$$w_g = \begin{cases} (\omega_2 - \omega_1)/(2\omega_1^2), & g = 1; \\ (\omega_{g+1} - \omega_{g-1})/(2\omega_g^2), & 1 < g < f; \\ (\omega_g - \omega_{g-1})/(2\omega_g^2), & g = f. \end{cases} \quad (29)$$

均方差指标为

$$J = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^f [G(j\omega) - \hat{G}(j\omega)]^2. \quad (30)$$

3.3 分数阶模型频域辨识结果

如图4所示, 图的上半部分是输入正弦电压, 其频率为 10 Hz, 幅值的标幺值为 0.1, 实际值为 12 V; 下半部分是电动机的输出转速, 实际值为 78 rad/min. 为了减小随机误差, 对每个频率点重复做 10 次实验, 去掉最大值和最小值, 其余数值取平均值. 由 Bode 图的幅频特性计算公式得 $A_6 = 20 \log_{10}(78/12) = 16.26$, 相频特性 $\varphi_6 = -16.3^\circ$. 表 1 是频率在 [0.01 Hz, 100 Hz] 范围内 10 个频率点的辨识数据.

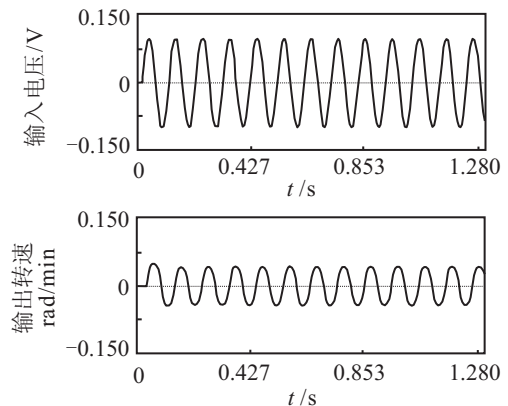


图 4 输入频率 10 Hz, 幅值 12 V 的电压, 电机输出响应

表 1 辨识所用的 10 个频率点

频率/Hz	0.1	0.5	1	2	5
增益/dB	16.62	16.63	16.63	16.55	16.47
相位/deg	-0.23	-0.95	-1.83	-3.4	-7.95
频率/Hz	10	20	50	80	100
增益/dB	16.26	15.96	13.48	9.5	6.91
相位/deg	-16.3	-29.2	-68.9	-95.6	-107

本文选择 $f = 10$ 并定义分数阶阶次 q 在区间 $(0, 1]$ 内间隔 0.01 取值, 因此 $q = 0.01, 0.02, 0.03, \dots$,

1. 根据方程 (28), a_1, a_2, b_0 可由以下方程式计算:

$$\begin{aligned} & \sum_{g=1}^{10} \left(A_g \sum_{i=0}^2 \left\{ a_i \cos \left((1-i) \frac{q\pi}{2} \right) \omega_g^{iq} w_g \right\} - \right. \\ & \left. b_0 \cos \left[\varphi_g + \frac{q\pi}{2} \right] w_g \right) = 0, \\ & \sum_{g=1}^{10} \left(A_g \sum_{i=0}^2 \left\{ a_i \cos \left((2-i) \frac{q\pi}{2} \right) \omega_g^{iq} w_g \right\} - \right. \\ & \left. b_0 \cos[\varphi_g + q\pi] w_g \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{g=1}^{10} \left(A_g \sum_{i=0}^2 \left\{ a_i \cos \left(\varphi_g + \frac{iq\pi}{2} \right) \omega_g^{iq} w_g \right\} - b_0 w_g \right) = 0. \quad (31)$$

当 $q = 0.89$ 时, 最小均方差的值 $J = 9.4 \times 10^{-4}$. 由方程组 (31) 可以得到参数 $a_1 = 0.0064$, $a_2 = 0.000028$, $b_0 = 6.77$, 从而得到永磁同步电动机分数阶模型辨识结果为

$$G_{\zeta, \vartheta}(s) = \frac{6.77}{0.000028s^{1.78} + 0.0064s^{0.89} + 1}. \quad (32)$$

为了表明本文方法的有效性, 将两种方法得到的结果进行对比. 图5是两个模型的Bode图对比. 可以看出, 模型的误差是在频率大于50Hz时出现的, 而这段频率对于电机而言基本上是用不到的. 因此, 对永磁同步电动机进行分数阶时域和频域建模是有效的.

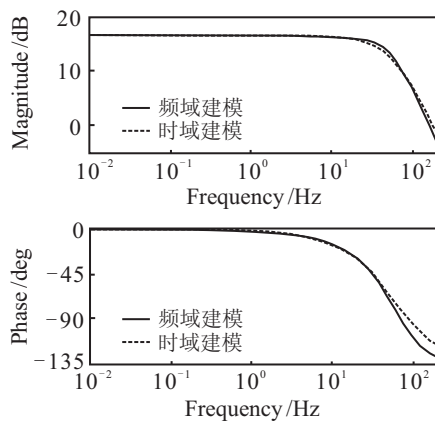


图5 对比时域和频域建模的分数阶模型Bode图

4 结论

本文对永磁同步电动机进行了分数阶时域和频域建模, 得到了两个分数阶模型, 它们的系数误差均在3%的范围内. 通过对比两个模型的Bode图, 验证了本文所得结果的可靠性.

参考文献(References)

- [1] Gutierrez R E, Rosario J M, Machado J T. Fractional order calculus: Basic concepts and engineering applications[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, 96(12): 1207-1223.
- [2] Gollee H, Mamma A, Loram I D. Frequency-domain identification of the human controller[J]. *Biological Cybernetics*, 2012, 106(6): 359-372.
- [3] Schafer I, Kruger K. Modelling of coils using fractional derivatives[J]. *J of Magnetism and Magnetic Materials*, 2006, 307(1): 91-98.
- [4] Tenreiro Machado J A, Jesus S, Alexandra Galhano, et al. Fractional order electromagnetics[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(10): 2637-2644.
- [5] Petras I. A note on the fractional-order Chua's system[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2008, 38(1): 140-147.
- [6] Jesus I S, Machado J A. Development of fractional order capacitors based on electrolyte processes[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 56(1/2): 45-55.
- [7] 胡建辉, 邹继斌. 具有不确定参数永磁同步电动机的自适应反步控制[J]. *控制与决策*, 2006, 21(11): 1264-1269. (Hu J H, Zou J B. Adaptive backstepping control of permanent magnet synchronous motors with parameter uncertainties[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(11): 1264-1269.)
- [8] 张碧陶, 皮佑国. 永磁同步电机伺服系统模糊分数阶滑模控制[J]. *控制与决策*, 2012, 27(12): 1776-1780. (Zhang B T, Pi Y G. Fractional order fuzzy sliding mode control for permanent magnet synchronous motor servo drive[J]. *Control and Decision*, 2012, 27(12): 1776-1780.)
- [9] 王瑞萍, 史步海, 皮佑国. 基于分数阶控制器的PMSM恒速控制[J]. *华南理工大学学报: 自然科学版*, 2012, 40(3): 119-125. (Wang R P, Shi B H, Pi Y G. Constant velocity control of PMSM based on fractional-order controller[J]. *J of South China University of Technology: Natural Science Edition*, 2012, 40(3): 119-125.)
- [10] Luo Y, Chen Y Q. Fractional order [proportional derivative] controller for a class of fractional order systems[J]. *Automatic*, 2009, 45(10): 2446-2450.
- [11] 高远, 范健文, 罗文广, 等. 分数阶永磁同步电机的混沌运动及其控制研究[J]. *武汉理工大学学报*, 2012, 34(7): 134-140. (Gao Y, Fan J W, Luo W G, et al. Chaos in the fractional order permanent magnet synchronous motor and its control[J]. *J of Wuhan University of Science and Technology*, 2012, 34(7): 134-140.)
- [12] 陈伯时. 电力拖动自动控制系统——运动控制系统[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003: 32-40. (Chen B S. *Electric power drag automatic control system—Motion control system*[M]. Beijing: China Machine Press, 2003: 32-40.)
- [13] Thierry P, Jean-claude T. Identification of fractional systems using an output-error technique[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 38(1-4): 133-154.
- [14] Hartley T T, Lorenzo C F. Fractional-order system identification based on continuous order-distributions[J]. *Signal Process*, 2003, 83(11): 2287-2300.
- [15] Vinagre B M. Modelado Y control de dinamicos caracterizados por ecuaciones integro-diferenciales de orden fractional[D]. Madrid: Universidad Nacional de Educacion a distancia, Universitat of Extremadura, 2001: 55-57.