

## 非均匀多采样率非线性系统的模糊辨识

王宏伟, 夏浩

(大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 针对非均匀多采样率非线性系统辨识问题, 提出一种基于模糊模型的辨识方法. 首先, 分析了非线性系统在输入信号非均匀周期刷新, 输出信号周期采样的情况下, 非线性系统可以通过提升技术, 利用多个局部的线性模型加权组合来描述; 然后, 提出一个基于 GK 模糊聚类和递推最小二乘的模糊辨识算法; 最后, 针对化工 pH 中和过程非线性系统, 采用非均匀采样数据建立其模糊模型, 以验证所提出方法的有效性.

**关键词:** 模糊辨识; 多率; 非均匀采样; 非线性系统

**中图分类号:** TP273

**文献标志码:** A

## Fuzzy identification for non-uniformly multi-rate sampled nonlinear systems

WANG Hong-wei, XIA Hao

(School of Control Science and Control Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China.

Correspondent: WANG Hong-wei, E-mail: wanghw@dlut.edu.cn)

**Abstract:** For the identification of non-uniformly multi-rate sampled nonlinear systems, an identification method based on the fuzzy model is proposed. First of all, nonlinear systems are described as a weighted combination representation of the multiple local linear models by using lift technology when the non-uniformly updating scheme for input signals and uniformly sampling scheme for output signals are taken in the data sampling process. On this basis, a fuzzy identification algorithm based on the GK fuzzy clustering and recursive least squared method is proposed. Finally, the fuzzy model of pH neutralization reaction process is built to demonstrate the effectiveness of the proposed method by using non-uniformly sampled data.

**Keywords:** fuzzy identification; multi-rates; non-uniformly sampling; nonlinear systems

### 0 引言

非均匀多采样率系统是化工系统、网络控制、工业控制中很重要的一类系统, 受各种复杂条件的限制, 例如时基抖动、传输延迟、数据丢失或人工采样等, 系统的输入信号和输出信号分别采用了不同非均匀采样频率. 目前, 针对非均匀多采样率系统的建模与控制的研究大都集中于线性系统.

针对离散线性系统, 文献[1-5]分别采用提升技术和辅助模型等方法, 解决了实际对象中含有白噪声和有色噪声的非均匀采样线性系统建模问题, 并讨论了算法的性能. 在此基础上, 丁峰等<sup>[6]</sup>采用分步递阶辨识方法, 利用非均匀周期采样系统的测量数据, 解决了输入信号为多变量的非均匀采样线性系统建模问题. 因此, 对于非均匀多采样率线性系统, 很多学者

给出了较好的辨识建模方法. 此外, 对于非均匀周期采样系统, 一些学者还在线性系统滤波<sup>[7]</sup>、线性系统状态估计<sup>[8]</sup>、线性系统预测控制<sup>[9]</sup>等领域给出了新的研究成果.

从大量文献来看, 对非均匀采样非线性系统的研究还缺乏有效方法. 对于非均匀采样系统, 由于实际系统往往是非线性的, 只有当被研究系统具有弱非线性时, 才可以将实际系统视为线性模型来研究和处理; 而当实际对象具有非常强的非线性时, 用一般的、常规的线性模型进行辨识建模研究, 往往会产生很大的建模误差.

非线性系统通常可以在某些工作点附近展开为局部线性系统, 当在平衡点附近线性化且该线性化系统是可测时, 非线性系统可以看作是在多个平衡点附

收稿日期: 2014-06-26; 修回日期: 2015-01-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273098).

作者简介: 王宏伟(1969—), 男, 副教授, 博士, 从事系统辨识与建模、自适应控制等研究; 夏浩(1971—), 男, 教授, 博士, 从事生产调度、混杂系统等研究.

近局部的线性模型经非线性加权的组合. 神经网络模型、模糊模型和支持向量机模型等都可以展开成类似的形式.

本文从模糊模型的角度研究非均匀多采样率非线性系统的辨识问题. 首先, 通过线性系统的连续模型-离散状态空间模型-传递函数模型之间的转化, 确定一个非均匀采样周期系统的离散模型, 由此建立非线性系统与线性系统之间的联系; 然后, 在非线性系统与线性系统之间关系的基础上, 将提升向量作为模糊模型的输入量, 建立非均匀多采样率非线性系统的模糊模型; 利用模糊聚类 and 递推最小二乘算法进行结构辨识和参数辨识; 通过定理证明了系统在持续激励下, 模型参数能够一致收敛. 最后, 利用非均匀采样数据对化工非线性 pH 中和过程进行仿真建模研究, 仿真结果表明了所提出方法的有效性.

## 1 模糊模型的建立

### 1.1 问题的描述

假设  $x(t) \in R^n, y(t) \in R^1, u(t) \in R^1$ . 考虑向量函数连续的非线性系统

$$S_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = \Gamma(x(t), u(t)), \\ y(t) = h(t). \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中的控制量满足如下关系:

$$u(t) = \begin{cases} u(kT), & kT \leq t < kT + t_1; \\ u(kT + t_1), & kT + t_1 \leq t < kT + t_2; \\ \vdots \\ u(kT + t_{p-1}), & kT + t_{p-1} \leq t < (k+1)T. \end{cases} \quad (2)$$

其中: 非均匀刷新时间间隔为  $\tau_i (\tau_i = t_i - t_{i-1}), t_i = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_i$  (设  $t_0 = 0, t_p = T$ ),  $T = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_p = t_p$  称为更新周期(帧周期). 控制量  $u$  在第  $k$  个更新周期  $[kT, kT + T) (k = 0, 1, \dots)$  以  $t = kT + t_i (i = 0, 1, \dots, p-1)$  非均匀刷新  $p$  次. 输出量  $y$  以  $T$  为周期均匀采样, 即在  $[kT, kT + T)$  内,  $y(t) = y(kT)$ . 此时,  $x(kT + T)$  是以  $x(kT)$  为初值的微分方程  $\dot{x}(t) = \Gamma(x(t), u(t))$  的解, 即

$$\begin{cases} x(kT + T) = f[x(kT), u(kT + t_i)], \\ y(kT) = h[x(kT)]. \end{cases} \quad (3)$$

为了避免系统(3)是时变的, 构造提升向量

$$\tilde{u}(kT) = \begin{bmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ \vdots \\ u_p(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT + t_1) \\ \vdots \\ u(kT + t_{p-1}) \end{bmatrix} \in R^{p \times 1}.$$

可将系统(3)转换为时不变系统, 即

$$\begin{cases} x(kT + T) = f[x(kT), \tilde{u}(kT)], \\ y(kT) = h[x(kT)]. \end{cases} \quad (4)$$

### 1.2 线性模型与非线性模型的关系

首先考虑  $S_c$  是线性系统的情况, 即

$$S_c : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $x(t) \in R^n$  是状态向量,  $u(t) \in R^1$  是控制输入变量,  $y(t) \in R^1$  是输出变量,  $A_c, B_c$  和  $C$  为适当维数的矩阵. 由 1.1 节可知, 采样数据为  $u(kT + t_i) (i = 0, 1, \dots, p-1)$  和  $y(kT)$ . 在一个帧周期  $T$  内对式(5)进行离散化, 有

$$\begin{cases} x(kT + T) = Ax(kT) + B\tilde{u}(kT), \\ y(kT) = Cx(kT). \end{cases} \quad (6)$$

其中:  $A = e^{A_c T} \in R^{n \times n}; B_{\tau_i} = \int_0^{\tau_i} e^{A_c t} dt B_c \in R^{n \times 1}, B_i = e^{A_c(T-t_i)} B_{\tau_i} \in R^{n \times 1}, B = [B_1, B_2, \dots, B_p] \in R^{n \times p}; \tilde{u}(kT) = [u(kT), u(kT + t_1), \dots, u(kT + t_{p-1})]^T \in R^{p \times 1}$ . 如果  $S_c$  可测, 则  $[(C)^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T]^T$  的秩为  $n$ .

引入后移算子  $z^{-1}$ , 满足  $z^{-1}u(kT + t_i) = u(kT + t_i - T)$ ; 或前移算子  $z$ , 满足  $zx(kT) = x(kT + T)$ . 由式(6)可得

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{z^{-n} C \text{adj}[zI_n - A] B_{i+1}}{z^{-n} \det[zI_n - A]} u(kT + t_i). \quad (7)$$

其中:  $I_n$  为  $n$  阶单位矩阵,  $\text{adj}[zI_n - A]$  为矩阵  $[zI_n - A]$  的代数余子式. 式(7)可以表示为如下有理分式的形式:

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{b_i(z)}{a(z)} u(kT + t_i).$$

其中

$$a(z) = z^{-n} \det[zI_n - A] =$$

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}, \quad a_j \in R^1;$$

$$b_0(z) = b_{00} z^0 + b_{01} z^{-1} + b_{02} z^{-2} + \dots + b_{0n} z^{-n},$$

$$b_{0j} \in R^1, \quad b_{00} = 0;$$

$$b_i(z) = b_{i1} z^{-1} + b_{i2} z^{-2} + \dots + b_{in} z^{-n},$$

$$b_{ij} \in R^1, \quad i = 1, 2, \dots, p-1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

对于非线性系统(4), 它与线性系统(6)的关系是: 非线性系统(4)可以在某些平衡点附近线性化且该线性化系统是可测的, 这时非线性系统可以看作是在多个平衡点附近局部线性模型(6)经过非线性加权的组合, 有

$$y(kT) = \sum_{l=1}^c f_l[\varphi(KT)] g_l[\varphi(kT)]. \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi(kT) = & \\ & [y(kT - T), \dots, y(kT - nT), \\ & u(kT - T), \dots, u(kT - nT), \\ & u(kT + t_1 - T), \dots, u(kT + t_1 - nT), \dots, \\ & u(kT + t_{p-1} - T), \dots, u(kT + t_{p-1} - nT)]^T, \quad (9) \end{aligned}$$

$f_l[\varphi(kT)]$  是第  $l$  个非线性加权函数,  $g_l[\varphi(kT)]$  是非线性系统在第  $l$  个平衡点处局部线性模型.

### 1.3 模糊模型

对于非线性系统, 在进行非均匀采样后, 通过式 (8) 可以得到其模糊模型描述的形式, 即

$$\begin{aligned} R^l: & \text{ if } \varphi(kT) \text{ 属于 } F_l \text{ (} F_l \text{ 的隶属函数为 } \mu_l[\varphi(kT)] \text{)}, \\ & \text{ then } y(kT) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{b_{li}(z)}{a_l(z)} u(kT + t_i), \\ & \quad l = 1, 2, \dots, c. \quad (10) \end{aligned}$$

其中:  $F_l$  为第  $l$  条规则下的模糊集合;  $\mu_l[\varphi(kT)]$  为  $F_l$  模糊集合的隶属度函数;  $c$  为模糊规则的总数;  $\varphi(kT)$  为第  $kT$  时刻采样样本且与式 (9) 相同;  $a_l(z)$  和  $b_{li}(z)$  满足

$$\begin{aligned} a_l(z) &= 1 + a_{l1}z^{-1} + a_{l2}z^{-2} + \dots + a_{ln}z^{-n}, \\ b_{li}(z) &= b_{li1}z^{-1} + b_{li2}z^{-2} + \dots + b_{lin}z^{-n}, \\ b_{lij} &\in R^1, \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \\ j &= 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, c. \end{aligned}$$

对于式 (10), 模糊模型后件可表示为如下模型:

$$\begin{aligned} R^l: & \text{ if } \varphi(kT) \text{ 属于 } F_l, \\ & \text{ then } y(kT) = -a_{l1}y(kT - T) - \dots - \\ & \quad a_{ln}y(kT - nT) + \\ & \quad \sum_{i=0}^{p-1} b_{li}(z)u(kT + t_i). \quad (11) \end{aligned}$$

因此, 模糊模型总输出为

$$\begin{aligned} y(kT) = & \\ & \sum_{l=1}^c \mu_l[\varphi(kT)] \left[ -a_{l1}y(kT - T) - \dots - \right. \\ & \left. a_{ln}y(kT - nT) + \sum_{i=0}^{p-1} b_{li}(z)u(kT + t_i) \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

**注 1** 从局部来看, 式 (12) 中的每一个多项式表达式中都含有每一条模糊规则后件离散模型, 它刻画了非线性系统的局部区域动态过程, 相当于非线性系统在第  $l$  个规则的某个平衡点附近展开的线性的离散模型.

**注 2** 从整体来看, 通过模糊隶属函数加权连接后, 把各个局部线性的离散模型连接起来, 得到整体的非线性模型, 它描述了整个系统的全部区域动态

演化过程. 因此, 式 (12) 刻画了整个非线性系统的动态变化过程.

## 2 模糊模型的结构辨识和参数辨识

### 2.1 基于 GK 模糊聚类的结构辨识

GK 模糊聚类算法是通过优化如下目标函数获得隶属度矩阵  $U = [\mu_l(kT)]_{N \times c}$  和聚类中心  $\bar{\varphi} = [\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_c]$ :

$$\min J(\varphi, \bar{\varphi}, U) = \sum_{l=1}^c \sum_{k=1}^N \mu_l^2(kT) d^2(\varphi(kT), \bar{\varphi}_l). \quad (13)$$

其中:  $\mu_l(kT)$  为  $\mu_l[\varphi(kT)]$  的简写形式, 表示在第  $kT$  时刻  $\varphi(kT)$  在第  $l$  类的隶属度;  $d(\varphi(kT), \bar{\varphi}_l)$  为采样样本  $\varphi(kT)$  与聚类中心  $\bar{\varphi}_l$  之间的距离. 文献 [10] 给出了详细算法.

### 2.2 模糊模型的参数辨识

首先, 定义参数向量为

$$\begin{aligned} \theta_1 &= [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, b_{101}, b_{102}, \dots, b_{10n}, \dots, \\ & \quad b_{1p-11}, b_{1p-12}, \dots, b_{1p-1n}]^T \in R^{n_0}; \\ \theta_2 &= [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, b_{201}, b_{202}, \dots, b_{20n}, \dots, \\ & \quad b_{2p-11}, b_{2p-12}, \dots, b_{2p-1n}]^T \in R^{n_0}; \\ & \quad \vdots \\ \theta_c &= [a_{c1}, a_{c2}, \dots, a_{cn}, b_{c01}, b_{c02}, \dots, b_{c0n}, \dots, \\ & \quad b_{cp-11}, b_{cp-12}, \dots, b_{cp-1n}]^T \in R^{n_0}; \\ n_0 &= (p+1) \times n. \end{aligned}$$

模糊模型的输入向量为

$$\begin{aligned} \psi(kT) &= [\psi_1^T(kT), \psi_2^T(kT), \dots, \psi_c^T(kT)]^T, \\ \psi_1(kT) &= \\ & [-\mu_1(kT)y(kT - T), \dots, -\mu_1(kT) \times \\ & y(kT - nT), \mu_1(kT)u(kT - T), \dots, \\ & \mu_1(kT)u(kT - nT), \dots, \mu_1(kT)u(kT + \\ & t_{p-1} - T), \dots, \mu_1(kT)u(kT + t_{p-1} - nT)]^T, \\ \psi_2(kT) &= \\ & [-\mu_2(kT)y(kT - T), \dots, -\mu_2(kT) \times \\ & y(kT - nT), \mu_2(kT)u(kT - T), \dots, \\ & \mu_2(kT)u(kT - nT), \dots, \mu_2(kT)u(kT + \\ & t_{p-1} - T), \dots, \mu_2(kT)u(kT + t_{p-1} - nT)]^T, \\ & \quad \vdots \\ \psi_c(kT) &= \\ & [-\mu_c(kT)y(kT - T), \dots, -\mu_c(kT) \times \\ & y(kT - nT), \mu_c(kT)u(kT - T), \dots, \end{aligned}$$

$$\mu_c(kT)u(kT - nT), \dots, \mu_c(kT)u(kT + t_{p-1} - T), \dots, \mu_c(kT)u(kT + t_{p-1} - nT)]^T.$$

式(12)可以写成线性回归形式. 由于系统总是含有噪声, 模糊模型最后输出可以表示为

$$y(kT) = \psi^T(kT)\theta + v(kT). \quad (14)$$

其中:  $\theta = [\theta_1^T, \theta_2^T, \dots, \theta_c^T]^T \in R^{cn_0 \times 1}$ ,  $v(kT)$  是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的白噪声.

通过 GK 模糊聚类得到聚类中心和隶属度函数. 模糊模型的后件参数可以采用递推最小二乘方法来确定, 算法如下:

$$\hat{\theta}(kT) = \hat{\theta}(kT - T) + L(kT) \times [y(kT) - \psi^T(kT)\hat{\theta}(kT - T)], \quad (15)$$

$$L(kT) = P(kT)\psi(kT) = \frac{P(kT - T)\psi(kT)}{1 + \psi^T(kT)P(kT - T)\psi(kT)}, \quad (16)$$

$$P^{-1}(kT) = P^{-1}(kT - T) + \psi(kT)\psi^T(kT). \quad (17)$$

其中:  $\hat{\theta}(kT)$  为第  $kT$  时刻的估计值;  $P(kT)$  为输入协方差对称方阵, 维数为  $cn_0 \times cn_0$ ; 初始值  $P(0) = \rho I_{cn_0}$ ,  $\rho$  取很大的数,  $I_{cn_0}$  为  $cn_0 \times cn_0$  维单位矩阵.

本文提出的模糊辨识算法步骤如下.

**Step 1:** 初始设置规则数  $c$ , 聚类中心  $\bar{\varphi}_l$  ( $l = 1, 2, \dots, c$ ), 后件参数向量初始值  $\theta(0)$ , 确定采样样本  $\varphi(kT)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ );

**Step 2:** 通过 GK 聚类算法对采样样本  $\varphi(kT)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) 进行模糊聚类, 得到  $c$  个聚类中心向量  $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_c$ , 以及每个输入样本  $\varphi(kT)$  在各类里的隶属度值  $\mu_l(kT)$  ( $l = 1, 2, \dots, c, k = 1, 2, \dots, N$ );

**Step 3:** 形成模糊模型的输入向量  $\psi(kT)$ , 由算法(15)~(17)确定参数向量  $\hat{\theta}(kT)$ ;

**Step 4:** 令  $k = k + 1$ , 如果  $k \leq N$ , 则返回 Step 3, 否则转 Step 5;

**Step 5:** 返回 Step 2, 重复计算, 直到获得满意的结果.

### 2.3 性能分析

为了说明算法的性能, 对一些记号进行说明:  $\lambda_{\max}[X]$  和  $\lambda_{\min}[X]$  分别表示矩阵  $X$  的最大和最小特征值;  $|X|$  表示矩阵  $X$  的行列式;  $\|X\|^2 = \text{tr}[XX^T]$  表示矩阵  $X$  的迹;  $f(t) = o(g(t))$  表示  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/g(t) = 0$ ;  $f(t) = O(g(t))$  表示当  $t$  足够大时,  $f(t) \leq \delta_1 g(t)$ <sup>[11-12]</sup>.

为了说明所提出算法的性能, 给出如下变量的定义:

$$r(kT) = \text{tr}[P^{-1}(kT)].$$

由于  $r(kT) \leq cn_0 \lambda_{\max}[P^{-1}(kT)]$ ,  $\ln |P^{-1}(kT)| \leq$

$cn_0 \ln r(kT)$ , 可知

$$r(kT) = O(\lambda_{\max}[P^{-1}(kT)]),$$

$$\ln |P^{-1}(kT)| = O(\ln r(kT)). \quad (18)$$

为了说明算法(15)~(17)的收敛性, 给出如下引理.

**引理 1**<sup>[12]</sup> 设函数  $f(t) \geq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f$ ,  $g(t) \geq 0$ , 级数  $\sum_{t=1}^{\infty} g(t)$  发散, 级数  $\sum_{t=1}^{\infty} f(t)g(t)$  收敛, 即  $\sum_{t=1}^{\infty} g(t) = \infty$ ,  $\sum_{t=1}^{\infty} f(t)g(t) < \infty$ , 则有  $f = 0$ .

**引理 2** 设  $D \in R^{m \times n}$ ,  $E \in R^{n \times m}$ , 则等式  $|I_m + EF| = |I_n + FE|$  成立.

**引理 3** 下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi^T(iT)P(iT)\psi(iT)}{[\ln |P^{-1}(iT)|]^s} < \infty, \text{ a.s. }, s > 1. \quad (19)$$

**定理 1** (鞅收敛定理)<sup>[12]</sup> 设  $\{T(t)\}$ ,  $\{\alpha(t)\}$ ,  $\{\beta(t)\}$  均为非负的、随机的、时间变量序列, 它们是递增的  $\sigma$  代数序列  $F_t$  ( $F_t$  是可测的), 且满足下式:

$$E[T(t+1)|F_t] \leq T(t) - \alpha(t) + \beta(t). \quad (20)$$

若  $\sum_{t=1}^{\infty} \beta(t) < \infty$ , a.s., 则  $T(t)$  几乎必然 (a.s.) 地收敛于一有限的随机变量  $T_0$ , 即  $T(t) \rightarrow T_0$ ,  $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha(t) < \infty$ , a.s..

引理 1 和定理 1 的证明见文献[12], 此处略. 引理 2 和引理 3 的证明限于篇幅此处略.

**定理 2** 对于式(14), 假设  $v(kT)$  是定义在概率空间  $(\Omega, F, P)$  上的鞅差序列, 并且适用于递增  $\sigma$  代数序列  $\{F_{kT}, k \in N\}$ ,  $F_{kT}$  是由  $kT$  时刻观测生成的, 且有

$$(A1) \ E[v(kT)|F_{kT-T}] = 0, \text{ a.s.};$$

$$(A2) \ E[v^2(kT)|F_{kT-T}] = \sigma_v^2(kT) \leq \bar{\sigma}_v^2 < \infty, \text{ a.s.}$$

对于隶属度函数  $\mu_l(kT)$  满足  $0 \leq \mu_l^2(kT) \leq 1$  ( $l = 1, 2, \dots, c, k = 1, 2, \dots$ ),  $\varphi(kT)$  和  $\psi(kT)$  满足如下持续激励条件(条件数有界):

$$(A3) \ c_1 I_{n_0} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varphi(iT)\varphi^T(iT) \leq c_2 k^{c_0} I_{n_0},$$

$$c_0 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0;$$

$$(A4) \ c_3 I_{cn_0} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \psi(iT)\psi^T(iT) \leq c_2 k^{c_0} I_{cn_0},$$

$$c_3 > 0.$$

其中:  $I_{n_0}$  是维数为  $n_0 \times n_0$  的单位矩阵,  $I_{cn_0}$  是维数为  $cn_0 \times cn_0$  的单位矩阵,  $c$  是规则数. 则算法(15)~(17)给出的参数估计误差满足

$$\|\hat{\theta}(kT) - \theta\|^2 = O\left(\frac{[\ln k]^s}{k}\right) \rightarrow 0, \text{ a.s.}, s > 1. \quad (21)$$

其中:  $\hat{\theta}(kT)$  为  $kT$  时刻参数估计值,  $\theta$  为参数真值.

**证明** 定义参数估计误差为  $\tilde{\theta}(kT) = \hat{\theta}(kT) - \theta$ , 利用式 (14) 和 (15), 可得

$$\tilde{\theta}(kT) = \tilde{\theta}(kT - T) + P(kT)\psi(kT)[v(kT) - \tilde{y}(kT)], \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{y}(kT) &= \psi^T(kT)\tilde{\theta}(kT - T) = \\ &= \psi^T(kT)\hat{\theta}(kT - T) - \psi^T(kT)\theta. \end{aligned}$$

定义非负定函数

$$S(kT) = \tilde{\theta}^T(kT)P^{-1}(kT)\tilde{\theta}(kT). \quad (23)$$

利用式 (17) 和 (23),  $\text{tr}[AB] = \text{tr}[BA]$ ,  $\text{tr}[A^T] = \text{tr}[A]$ , 可以得到下式:

$$\begin{aligned} S(kT) &= \\ &= \{\tilde{\theta}(kT - T) + P(kT)\psi(kT)[v(kT) - \\ &= \tilde{y}(kT)]\}^T P^{-1}(kT) \{\tilde{\theta}(kT - T) + P(kT) \times \\ &= \psi(kT)[v(kT) - \tilde{y}(kT)]\} = \\ &= S(kT - T) - [1 - \psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)] \times \\ &= \tilde{y}^2(kT) + 2[1 - \psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)] \times \\ &= \tilde{y}(kT)v(kT) + \psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)v^2(kT). \quad (24) \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \psi^T(kT)P(kT)\psi(kT) &= \\ &= \frac{\psi^T(kT)P(kT - T)\psi(kT)}{1 + \psi^T(kT)P(kT - T)\psi(kT)} \leq 1, \quad (25) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S(kT) &\leq \\ &= S(kT - T) + 2[1 - \psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)] \times \\ &= \tilde{y}(kT)v(kT) + \psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)v^2(kT). \quad (26) \end{aligned}$$

又因  $\tilde{y}(kT)$ 、 $\psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)$  与  $v(kT)$  均不相关, 故  $F_{kT-T}$  是可测的. 对式 (26) 两边都取关于  $F_{kT-T}$  的条件数学期望, 利用 (A1) 和 (A2) 两个条件得到

$$\begin{aligned} E[S(kT)|F_{kT-T}] &\leq \\ &= S(kT - T) + \psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)\bar{\sigma}_v^2. \quad (27) \end{aligned}$$

式 (27) 右边第 2 项从  $k = 1$  到  $k = \infty$  的和有界, 所以不能使用定理 1, 为此进行如下处理. 令

$$V(kT) = \frac{S(kT)}{[\ln |P^{-1}(kT)|]^s}, \quad s > 1. \quad (28)$$

因  $\ln |P^{-1}(kT)|$  是非降的, 故有

$$\begin{aligned} E[V(kT)|F_{kT-T}] &\leq \\ &= \frac{S(kT - T)}{[\ln |P^{-1}(kT)|]^s} + \frac{\psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)}{[\ln |P^{-1}(kT)|]^s} \bar{\sigma}_v^2 \leq \\ &= V(kT - T) + \frac{\psi^T(kT)P(kT)\psi(kT)}{[\ln |P^{-1}(kT)|]^s} \bar{\sigma}_v^2. \quad (29) \end{aligned}$$

采用引理 3, 式 (29) 右边第 2 项从  $k = 1$  到  $k = \infty$  的和有界, 并由定理 1 可知,  $V(kT)$  几乎肯定 (a.s.) 收敛于一有界随机变量  $V_0$ , 即

$$V(kT) = \frac{S(kT)}{[\ln |P^{-1}(kT)|]^s} \rightarrow V_0, \text{ a.s.}, \quad (30)$$

或者

$$S(kT) = O([\ln |P^{-1}(kT)|]^s), \text{ a.s.} \quad (31)$$

由  $S(kT)$  的定义有

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(kT)\|^2 &\leq \frac{\text{tr}[\tilde{\theta}^T(kT)P^{-1}(kT)\tilde{\theta}(kT)]}{\lambda_{\min}[P^{-1}(kT)]} = \\ &= S(kT)/\lambda_{\min}[P^{-1}(kT)], \quad (32) \end{aligned}$$

由式 (31), (32) 和 (18), 可得

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(kT)\|^2 &= O\left(\frac{[\ln |P^{-1}(kT)|]^s}{\lambda_{\min}[P^{-1}(kT)]}\right) = \\ &= O\left(\frac{[\ln r(kT)]^s}{\lambda_{\min}[P^{-1}(kT)]}\right), \text{ a.s.}, s > 1. \quad (33) \end{aligned}$$

对 (A3) 取迹, 可得

$$c_1 n_0 k \leq \sum_{i=1}^k \|\varphi(iT)\|^2 \leq c_2 n_0 k^{c_0+1}.$$

对于  $\psi(kT)$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \|\psi(iT)\|^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^k [\mu_1^2(iT) + \mu_2^2(iT) + \dots + \mu_c^2(iT)] \times \|\varphi(iT)\|^2. \quad (34) \end{aligned}$$

由于  $0 \leq \mu_l^2(iT) \leq 1, l = 1, 2, \dots, c, i = 1, 2, \dots$ , 利用 (A3), 式 (34) 满足下面不等式:

$$\sum_{i=1}^k \|\psi(iT)\|^2 \leq \sum_{i=1}^k c \|\varphi(iT)\|^2 \leq c_2 c n_0 k^{c_0+1}. \quad (35)$$

另取  $\mu_{\min}^2(iT) = \min\{\mu_1^2(iT), \mu_2^2(iT), \dots, \mu_c^2(iT)\}$ , 则有  $\mu_l^2(iT) \geq \mu_{\min}^2(iT), l = 1, 2, \dots, c$ . 对于式 (34), 有

$$\sum_{i=1}^k c \mu_{\min}^2(iT) \|\varphi(iT)\|^2 \leq \sum_{i=1}^k \|\psi(iT)\|^2. \quad (36)$$

对于任一个样本  $\varphi(kT)$ , 如果其隶属函数的值都取  $\mu_{\min}^2(kT) \geq \alpha$ , 则有

$$\alpha c_1 n_0 k \leq \alpha \sum_{i=1}^k \|\varphi(iT)\|^2 \leq \sum_{i=1}^k \|\psi(iT)\|^2, \quad (37)$$

其中  $\alpha c_1 = c_3$ . 从而有

$$c_3 c n_0 k \leq \sum_{i=1}^k \|\psi(iT)\|^2 \leq c_2 c n_0 k^{c_0+1}. \quad (38)$$

不等式 (38) 等价于 (A4).

由 (A4) 和  $P^{-1}(kT)$  的定义可知

$$c_3 k I_{c n_0} \leq P^{-1}(kT) \leq c c_2 k^{c_0+1} I_{c n_0}, \text{ a.s.},$$

易得  $\lambda_{\min}[P^{-1}(kT)] \geq c_3 k, r(kT) = \text{tr}[P^{-1}(kT)] \leq c^2 n_0 c_2 k^{c_0+1}$ , 从而有

$$\ln r(kT) \leq \ln c^2 n_0 c_2 + (c_0 + 1) \ln k,$$

因此  $\ln r(kT) = O(\ln k)$ .

由于  $(\ln k)^s = o(k)$ , 由式 (33) 可知

$$\|\hat{\theta}(kT) - \theta\|^2 = O\left(\frac{[\ln r(kT)]^s}{\lambda_{\min}[P^{-1}(kT)]}\right) = O\left(\frac{[\ln k]^s}{k}\right) \rightarrow 0, \text{ a.s.} \quad \square$$

### 3 仿真实例

为了验证本文方法的有效性, 对化工非线性对象 pH 的中和过程进行研究. pH 控制系统的中和反应过程如图 1 所示<sup>[13]</sup>.

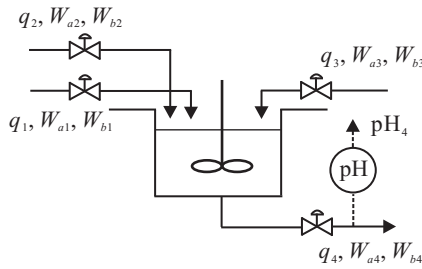


图 1 pH 中和反应过程

图 1 中, 酸液、缓冲液、碱液在反应池内发生中和反应, 其用量分别为: 酸流 0.03 mol/L HNO<sub>3</sub>; 缓冲液 0.03 mol/L NaHCO<sub>3</sub>; 碱液 0.03 mol/L NaOH; 碱液化学液 0.05 × 10<sup>-3</sup> mol/L NaHCO<sub>3</sub>. q<sub>1</sub>、q<sub>2</sub>、q<sub>3</sub> 分别是酸液、缓冲液、碱液化学液剂的流量; q<sub>4</sub> 是输出液的流量; pH<sub>4</sub> 是输出液 pH 的测量值; W<sub>a1</sub>、W<sub>a2</sub>、W<sub>a3</sub> 和 W<sub>a4</sub> 分别是这些化学液剂的电荷平衡因子; W<sub>b1</sub>、W<sub>b2</sub>、W<sub>b3</sub> 和 W<sub>b4</sub> 分别是化学液剂的物料平衡因子.

定义反应平衡因子如下<sup>[13]</sup>:

$$W_a = [H^+] - [OH^-] - [HCO_3^-] - 2[CO_3^{2-}],$$

$$W_b = [H_2CO_3] + [HCO_3^-] + [CO_3^{2-}].$$

系统的正常操作参数如表 1 所示.

表 1 系统的正常操作参数

参数	设置值
A/cm <sup>2</sup>	207
H/cm	14.0
C <sub>0</sub> /(ml · cm <sup>-1</sup> · s)	8.75
q <sub>1</sub> /(ml · s <sup>-1</sup> )	16.6
q <sub>2</sub> /(ml · s <sup>-1</sup> )	0.55
q <sub>3</sub> /(ml · s <sup>-1</sup> )	16.2
W <sub>a1</sub> /(mol · l <sup>-1</sup> )	3 × 10 <sup>-3</sup>
W <sub>a2</sub> /(mol · l <sup>-1</sup> )	-3 × 10 <sup>-2</sup>
W <sub>a3</sub> /(mol · l <sup>-1</sup> )	-3.06 × 10 <sup>-3</sup>
W <sub>b1</sub>	0
W <sub>b2</sub> /(mol · l <sup>-1</sup> )	3 × 10 <sup>-2</sup>
W <sub>b3</sub> /(mol · l <sup>-1</sup> )	5 × 10 <sup>-5</sup>
pK <sub>1</sub>	6.35
pK <sub>2</sub>	10.25
τ	0.5
pH <sub>4</sub>	7

用碱流 q<sub>3</sub> 作为控制量 u, p = 2, t<sub>1</sub> = τ<sub>1</sub> = 1 min, τ<sub>2</sub> = 1.5 min, T = τ<sub>1</sub> + τ<sub>2</sub> = 2.5 min. 输出液 pH 测量值作为输出量 y. 选 y(kT - T)、y(kT - 2T)、u(kT - T)、u(kT - 2T)、u(kT + t<sub>1</sub> - T) 和 u(kT + t<sub>1</sub> - 2T) 构成向量 φ(kT). 取模糊模型的规则数 c = 6. 模糊模型具体形式如下:

R<sup>l</sup>: if φ(kT) 属于 F<sub>l</sub>, then

$$y(kT) = -a_{l1}y(kT - T) - a_{l2}y(kT - 2T) + b_{l01}u(kT - T) + b_{l02}u(kT - 2T) + b_{l11}u(kT + t_1 - T) + b_{l12}u(kT + t_1 - 2T),$$

$$l = 1, 2, \dots, 6.$$

对采集到的 60 个数据样本进行模糊聚类, 采用本文方法建立 pH 控制系统的中和反应过程的模糊模型. 仿真结果如下: 表 2 给出了后件参数的估计辨识结果; 图 2 给出了模糊模型的输出和实际输出结果的比较; 图 3 为误差比较曲线, 均方差为 0.125. 显然, 模糊模型能够很好地反映 pH 控制系统的中和反应非线性非均匀采样过程, 具有计算简便, 建模方便、高效的特点.

表 2 后件参数的辨识结果

规则	a <sub>l1</sub>	a <sub>l2</sub>	a <sub>l01</sub>	a <sub>l02</sub>	a <sub>l11</sub>	a <sub>l12</sub>
1	-1.2979	0.2551	-0.0349	0.0503	-0.1062	0.0525
2	0.0054	-0.5483	-0.0388	0.5863	0.0632	-0.3837
3	-1.5699	0.3750	-0.9029	-0.7101	2.6917	-0.9837
4	2.1291	-3.0922	0.3021	0.0012	-0.1809	-0.1220
5	0.7595	-1.2418	-0.0985	-0.2468	-0.0920	0.7009
6	-0.9666	0.0285	0.1988	-0.0391	-0.6340	0.5123

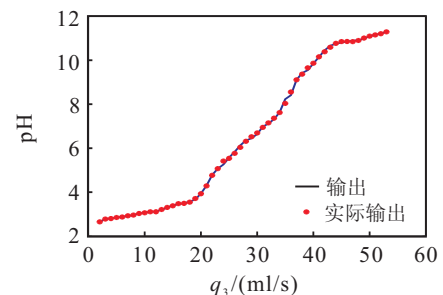


图 2 模糊模型的输出与实际输出结果的比较

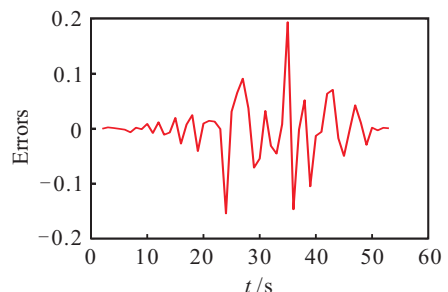


图 3 误差比较曲线

## 4 结 论

针对非均匀多采样率非线性系统难以建模的问题,本文提出了基于模糊模型的建模辨识方法.其基本思想是,将非线性系统在某些工作点附近展开为局部线性系统,当在平衡点附近线性化且该线性化系统是可测时,非线性系统可以看作是在多个平衡点附近局部的线性模型经过非线性加权的组合.根据这一思想,将模糊模型看作是将每条规则的后件线性离散模型,经过隶属度函数加权后对非均匀多采样率非线性系统的描述.本文中,通过定理和引理证明了建模算法的收敛性、有效性.本文所提出的方法不仅适用于单输入单输出系统,也适用于多输入多输出系统.当把多输入变量和多输出变量作为模糊聚类的输入量时,将模型扩展为多输入输出模型,就能实现多变量的非线性系统的建模.在后续研究中,将对多变量非均匀多采样率非线性系统进行研究.

### 参考文献(References)

- [1] Sheng J, Chen T, Shah S L. Generalized predictive control for nonuniformly sampled systems[J]. *J of Process Control*, 2002, 12(8): 875-885.
- [2] 刘艳君, 谢莉, 丁锋. 非均匀采样数据系统的 AM-RLS 辨识方法及仿真研究[J]. *系统仿真学报*, 2009, 21(19): 6186-6189.  
(Liu Y J, Xie L, Ding F. AM-RLS Identification and simulation studies for non-uniformly sample-data systems[J]. *J of System Simulation*, 2009, 21(19): 6186-6189.)
- [3] 谢莉, 丁锋. 非均匀采样数据系统的一种辨识方法[J]. *控制工程*, 2008, 15(4): 402-405.  
(Xie L, Ding F. An identification method for non-uniformly sample-data systems[J]. *Control Engineering of China*, 2008, 15(4): 402-405.)
- [4] Xie L, Liu Y J, Yang H Z, et al. Modelling and identification for non-uniformly periodically sampled-data systems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2010, 4(5): 784-794.
- [5] Feng Ding, Li Qiu, Tongwen Chen. Reconstruction of continuous-time systems from their non-uniformly sampled discrete-time systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 324-332.
- [6] 丁锋, 陈通文, 萧德云. 非均匀周期采样多率系统的一种辨识方法[J]. *电子学报*, 2004, 32(9): 1414-1420.  
(Ding F, Chen T W, Xiao D Y. An identification of non-uniformly periodically sampled multirate systems[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(9): 1414-1420.)
- [7] Jiang Hongxia, Wang Jinhai. Studies of non-uniformly multirate system filtering[C]. *Proc of Conf on Systems Simulation Technology and Applications*. Hefei: Scientific Technology University Press, 2007: 423-427.
- [8] 蒋红霞, 丁锋. 一类非均匀采样数据系统的状态估计[J]. *科学技术与工程*, 2008, 8(2): 513-514.  
(Jiang H X, Ding F. State estimation for a class of non-uniformly sampled systems[J]. *Science Technology and Engineering*, 2008, 8(2): 513-514.)
- [9] Sheng J, Chen T, Shah S L. Generalized predictive control for non-uniformly sampled systems[J]. *J of Process Control*, 2002, 12(8): 875-885.
- [10] Cao S G, Rees N W, Feng G. Analysis and design for a class of complex control systems[J]. *Automatica, Part I: Fuzzy Modeling and Identification*, 1997, 33(6): 1017-1028.
- [11] Ding F, Liu G, Liu X P. Partially coupled stochastic gradient identification methods for non-uniformly sampled systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(8): 1976-1981.
- [12] Goodwin G C, Sin K S. *Adaptive filtering prediction and control*[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1984: 133-161.
- [13] 张智焕, 王树青. 基于多模型 pH 非线性过程的预测控制[J]. *浙江大学学报*, 2002, 36(1): 29-31.  
(Zhang Z H, Wang S Q. Predictive control of pH nonlinear process based on multiple model[J]. *J of Zhejiang University*, 2002, 36(1): 29-31.)

(责任编辑: 李君玲)