

输入饱和受限下的刚体飞行器姿态系统的有限时间镇定

程盈盈, 都海波, 何怡刚

(合肥工业大学 电气与自动化工程学院, 合肥 230009)

摘要: 研究存在输入饱和和受限下的飞行器姿态控制问题, 提出一种有限时间姿态镇定方案. 针对基于修改的Rodriguez参数模型的飞行器姿态控制系统, 基于齐次性理论和饱和控制器设计方法, 并充分利用系统的模型结构特征, 设计一类饱和的有限时间姿态控制器, 使得姿态可以在有限时间内被镇定到平衡点. 仿真结果验证了所设计姿态控制器的有效性.

关键词: 刚体飞行器; 姿态控制; 有限时间控制; 输入饱和

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Finite-time attitude stabilization of rigid spacecraft under input saturation

CHENG Ying-ying, DU Hai-bo, HE Yi-gang

(School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China.

Correspondent: DU Hai-bo, E-mail: haibo.du@hfut.edu.cn)

Abstract: The problem of finite-time attitude stabilization of a rigid spacecraft under input saturation is investigated. For the attitude control model described by modified rodriguez parameters, based on homogeneous system theory and saturated controller design method, a saturated finite-time attitude control law is proposed, which sufficiently uses the model structural features, so that the attitude can be stabilized to the equilibrium in a finite time. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Keywords: rigid spacecraft; attitude control; finite-time control; input saturation

0 引言

在控制界, 刚体飞行器姿态控制问题一直受到广泛的重视. 对该问题的研究既具有理论意义又具有应用前景. 一方面, 在很多领域(如卫星监测、飞行器编队飞行)都涉及到姿态控制问题; 另一方面, 飞行器是一类本质非线性系统, 如何设计高性能的控制器颇具挑战性. 通常, 姿态控制问题分为姿态镇定问题和姿态跟踪问题, 本文主要考虑姿态镇定问题.

近年来已有不少学者利用各种非线性控制理论设计了不同的非线性姿态控制律. 如文献[1]基于最优控制理论设计了一类最优的姿态控制律; 文献[2]基于无源性设计理论, 通过构造一个角速度的观测器, 设计了一类无角速度的姿态反馈控制律. 在实际中, 外部扰动总是不可避免的, 如环境因素经常会产生扰动力矩. 如何提高闭环系统抗扰动性能已引起

了很多学者的关注. 最近, 多种非线性控制方法都被用来解决姿态鲁棒控制问题, 如滑模控制方法^[3]、自适应控制方法^[4-5]、模糊控制方法^[6]等.

前述的这些姿态控制算法都只能保证闭环系统是渐近收敛的, 很明显, 如果能设计控制律使得姿态在有限时间内收敛到平衡点是十分有意义的, 即有限时间姿态镇定^[7]. 此外, 闭环系统在有限时间控制律作用下不仅在平衡点附近具有更快的收敛速度, 同时还具有更好的抗扰动性能、更高的精度^[8-13]. 但是针对姿态控制系统, 如何设计有限时间控制律却并不容易. 目前, 已有不少学者尝试解决此问题, 如文献[14]基于终端滑模控制技术^[15]和加幂积分技术^[16], 利用部分反馈线性化技术设计了一类有限时间姿态控制律; 文献[17]利用滑模控制技术和自适应控制方法, 设计了一类有限时间姿态跟踪控制律. 但是, 在这两

收稿日期: 2014-05-26; 修回日期: 2014-09-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61304007); 国家杰出青年科学基金项目(50925727); 教育部博士点基金项目(20130111120007); 安徽省自然科学基金项目(1308085QF106); 中国博士后科学基金项目(2014T70584).

作者简介: 程盈盈(1983-), 女, 博士生, 从事非线性控制的研究; 何怡刚(1966-), 男, 教授, 博士生导师, 从事电路理论及其应用等研究.

篇文献中,其有限时间控制器都利用了符号函数,这在实际应用中会带来抖动等不利影响.文献[18]通过构造一个全局的Lyapunov函数,设计了一类连续的全局有限时间姿态控制律.然而,值得指出的是,这3篇文献中有限时间控制器的设计过程中都没有考虑控制输入饱和问题.而实际控制系统中,常常要考虑控制输入受限的问题^[19],在这种情况下,若直接应用非饱和有限时间控制器,可能会影响到系统的性能,甚至导致系统的不稳定.

本文主要考虑从控制输入饱和的角度来设计一类饱和的有限时间控制器,使得刚体飞行器姿态系统的姿态在任何有界输入的条件下可以被有限时间镇定到平衡点.与文献[14,17-18]中所设计的有限时间控制器方法不同的是,本文的有限时间控制器设计是基于齐次性理论,即使得闭环系统具有负的齐次度.对于具有强耦合的非线性姿态控制系统,使得闭环系统具有负的齐次度并不容易,为此,本文的控制器设计充分利用了系统的模型结构特征.首先,通过合理构造Lyapunov函数,使得闭环系统是渐近稳定的,从而使得系统姿态可以在有限时间内被镇定到平衡点的一个附近邻域内;然后,在此区域内,通过证明系统的标称系统是有限时间稳定的且是齐次的,同时利用齐次压制方法可以证明整个系统是局部有限时间稳定的.由于本文在设计控制器时,充分考虑了系统的模型对称性,其控制器具有以下特点:1)可以保证闭环系统是有限时间收敛的;2)考虑了输入饱和问题,其控制输入的界可以任意小;3)结构简单,不依赖于模型的惯性矩阵参数信息.

1 预备知识

1.1 飞行器姿态模型

飞行器的姿态模型主要由运动学和动力学方程组成.本文将采用修改的Rodriguez参数(MRPs)来描述^[20].令MRPs姿态为

$$\sigma = \eta \tan \frac{\phi}{4} \in R^3, \quad -2\pi < \phi < 2\pi. \quad (1)$$

其中: η 为欧拉轴, ϕ 为欧拉角.

基于修改的Rodrigues参数MRPs,由文献[20]可得飞行器的姿态运动学和动力学方程如下:

$$\dot{\sigma} = G(\sigma)\omega, \quad J\dot{\omega} = -\omega^\times J\omega + \tau. \quad (2)$$

其中: $\sigma \in R^3$ 为飞行器的姿态, $\omega \in R^3$ 为飞行器的角速度, $J \in R^{3 \times 3}$ 为飞行器的惯性矩阵, $\tau \in R^3$ 为飞行器的控制力矩.此外,矩阵

$$G(\sigma) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 - \sigma^T \sigma}{2} \right) I_3 + \sigma^\times + \sigma \sigma^T \right],$$

其中: I_3 为 3×3 的单位矩阵,符号 $(\cdot)^\times$ 表示 3×3 的斜对称矩阵,即对于一个向量 $v = [v_1, v_2, v_3]^T$,有

$$v^\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

关于矩阵 $G(\sigma)$,有如下性质^[1]:

$$\begin{aligned} \sigma^T G(\sigma) \omega &= \left(\frac{1 + \sigma^T \sigma}{4} \right) \sigma^T \omega, \\ G(\sigma) G^T(\sigma) &= \left(\frac{1 + \sigma^T \sigma}{4} \right)^2 I_3. \end{aligned} \quad (3)$$

注1 在系统(2)中并没有考虑任何干扰项.实际上,控制输入通道一般都存在干扰项,但在设计连续有限时间控制器时,一般都不考虑.当系统存在外部干扰时,由于控制器是连续的,系统的状态在平衡点附近将会存在稳态误差,此时一般需要作相关的抗扰动性能分析^[21].在文献[8,22]中,分别对有限时间控制器作用下的一般性系统和飞行器姿态系统作了抗扰动性能分析,并从理论上解释了为什么有限时间控制可以提供更好的抗扰动性能.限于篇幅,本文只在仿真中增加了干扰项,并分析了在有限时间控制作用下系统的抗干扰性能.

1.2 相关定义和引理

定义1 为简便起见,记 $\text{sig}^\alpha(x) = \text{sign}(x)|x|^\alpha$,其中 $\alpha \geq 0, x \in \mathcal{R}$, $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数.

定义2 定义一类新的饱和函数

$$\text{sat}_\alpha(x) = \begin{cases} \text{sign}(x), & |x| > 1; \\ \text{sig}^\alpha(x), & |x| \leq 1. \end{cases}$$

其中: $0 \leq \alpha \leq 1, x \in \mathcal{R}$.如果 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 是一个向量,则

$$\text{sat}_\alpha(x) = [\text{sat}_\alpha(x_1), \text{sat}_\alpha(x_2), \dots, \text{sat}_\alpha(x_n)]^T.$$

定义3(有限时间稳定)^[8] 考虑系统

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{R}^n, \quad f(0) = 0, \quad (4)$$

其中: $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}^n$ 为开区域 \mathcal{U} 上对 x 连续的函数,且开区域 \mathcal{U} 包含原点.系统的解 $x = 0$ 为有限时间稳定的,当且仅当系统是稳定的且为有限时间收敛的.有限时间收敛是指:对于 $\forall x_0 \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{R}^n$,存在一个连续函数 $T(x): \mathcal{U}_0 \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$,使得系统(4)的解 $x(t, x_0)$ 满足:当 $t \in [0, T(x_0))$ 时,有 $x(t, x_0) \in \mathcal{U}_0 \setminus \{0\}$ 和 $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0$;当 $t > T(x_0)$ 时,有 $x(t, x_0) = 0$.

若 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 = \mathcal{R}^n$,则平衡点全局有限时间稳定.

定义4^[23-25] 令 $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ 为一向量函数.若对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n, r_i > 0$,使得 $f(x)$ 满足

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则称 $f(x)$ 关于 (r_1, r_2, \dots, r_n) 具有齐次度 k , (r_1, r_2, \dots, r_n) 称为扩张,其中 $k > -\min\{r_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

定义5^[23-25] 对于系统(4),如果向量函数 $f(x)$

是齐次的,则称该系统为齐次系统.

基于齐次性理论给出有限时间稳定性的判据.

引理 1^[26] 考虑系统

$$\dot{x} = f(x) + \hat{f}(x), f(0) = 0, x \in \mathcal{R}^m, \quad (5)$$

如果 $x = 0$ 是系统 $\dot{x} = f(x)$ 的渐近稳定平衡点,并且对于 $\forall x \neq 0$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{f}_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_m} x_m)}{\varepsilon^{r_i+k}} = 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

则 $x = 0$ 是系统 (5) 的一个局部有限时间平衡点. 其中 $f(x)$ 是连续的齐次向量空间且针对扩张 (r_1, r_2, \dots, r_m) 具有齐次度 $k < 0$, 函数 $\hat{f}(x)$ 满足 $\hat{f}(0) = 0$.

引理 2^[16] 若 $x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R}, \gamma, c, d$ 为正实数, 则有如下不等式成立:

$$|x|^c |y|^d \leq \frac{c}{c+d} \gamma |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \gamma^{-c/d} |y|^{c+d}.$$

2 输入饱和下的飞行器姿态系统的有限时间控制器设计

本节主要针对具体的飞行器姿态控制系统设计饱和的有限时间控制器,使得姿态可以在有限时间内被镇定到平衡点.

根据文献 [27], 飞行器姿态系统方程 (2) 可以写成如下拉格朗日形式:

$$M(\sigma)\ddot{\sigma} + C(\sigma, \dot{\sigma})\dot{\sigma} = G^{-T}(\sigma)\tau. \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} M(\sigma) &= G^{-T}(\sigma)JG^{-1}(\sigma), \\ C(\sigma, \dot{\sigma}) &= -G^{-T}(\sigma)(JG^{-1}(\sigma)\dot{\sigma}) \times G^{-1}(\sigma) - \\ &\quad G^{-T}(\sigma)JG^{-1}(\sigma) \times \dot{G}(\sigma)G^{-1}(\sigma). \end{aligned}$$

引理 3 矩阵 $M(\sigma)$ 是对称正定的且矩阵 $\dot{M}(\sigma) - 2C(\sigma, \dot{\sigma})$ 是斜对称的.

下面给出饱和有限时间控制器设计方法.

定理 1 对于姿态控制系统 (2), 如果控制器 τ 设计为

$$\tau = -\frac{G^T(\sigma)}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{1+\alpha_1}\right)^2} [k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\sigma) + k_2 \text{sat}_{\alpha_2}(\dot{\sigma})], \quad (8)$$

则系统 (2) 的状态将在有限时间内被镇定到原点, 即在有限时间内实现 $\sigma \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$. 其中: $k_1 > 0, k_2 > 0, 0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 = 2\alpha_1/(1 + \alpha_1)$.

证明 为便于表述, 定义变量 $x_1 = \sigma, x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\sigma}$, 系统 (7) 可以写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}(x_1)C(x_1, x_2)x_2 + M^{-1}(x_1)G^{-T}(x_1)\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

将控制律 (8) 代入系统 (9), 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}(x_1)C(x_1, x_2)x_2 - \\ &\quad M^{-1}(x_1) \frac{[k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) + k_2 \text{sat}_{\alpha_2}(x_2)]}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |x_{1,i}|^{1+\alpha_1}\right)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

下面将证明系统 (10) 是有限时间稳定的.

Step 1 全局渐近稳定性. 取如下的 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= \frac{k_1}{1 + \alpha_1} \arctan \left(\sum_{i=1}^3 |x_{1,i}|^{1+\alpha_1} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} x_2^T M(x_1)x_2. \end{aligned} \quad (11)$$

由文献 [28] 可知

$$\frac{d|x_{1,i}|^{\alpha_1+1}}{dt} = (\alpha_1 + 1) \text{sig}^{\alpha_1}(x_{1,i})\dot{x}_{1,i},$$

则沿着系统 (10), 函数 V 的导数是

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \\ &\quad \frac{k_1 \sum_{i=1}^3 \text{sig}^{\alpha_1}(x_{1,i})x_{2,i}}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |x_{1,i}|^{1+\alpha_1}\right)^2} + \frac{1}{2} x_2^T (\dot{M}(x_1) - \\ &\quad 2C(x_1, x_2))x_2 - x_2^T \frac{[k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) + k_2 \text{sat}_{\alpha_2}(x_2)]}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |x_{1,i}|^{1+\alpha_1}\right)^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

由引理 3 可知 $x_2^T (\dot{M}(x_1) - 2C(x_1, x_2))x_2 = 0$, 因此式 (12) 变为

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -k_2 \frac{\sum_{i=1}^3 x_{2,i} \text{sat}_{\alpha_2}(x_{2,i})}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |x_{1,i}|^{1+\alpha_1}\right)^2} \leq 0. \quad (13)$$

记不变集 $\Omega = \{(x_1, x_2) | \dot{V} \equiv 0\}$, 由式 (13) 可知 $\dot{V} \equiv 0$ 意味着 $x_2 \equiv 0$, 亦即 $\dot{x}_2 \equiv 0$. 进一步, 根据式 (10), 并注意到矩阵 $M(x_1)$ 是正定矩阵, 可以得到 $x_1 \equiv 0$.

根据 LaSalle 不变集原理, 可以得出: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow 0$, 即系统 (10) 是渐近稳定的.

Step 2 局部有限时间稳定性. 此步的证明主要基于引理 1. 由 Step 1 中的结果可知, 闭环系统 (10) 为全局渐近稳定的. 由文献 [21] 中的渐近稳定性定义可知, 该系统的状态将会在有限时间内进入区域 $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : \|x_1\| \leq 1, \|x_2\| \leq 1\}$. 一旦 $(x_1, x_2) \in \Omega_1$, 即 $|x_{1,i}| \leq 1, |x_{2,i}| \leq 1, i = 1, 2, 3$, 则系统 (10) 可以重新写成

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}(0)[k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(x_2)] + \hat{f}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x_1, x_2) = & -M^{-1}(x_1)C(x_1, x_2)x_2 - \\ & - \left[\frac{M^{-1}(x_1)}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |x_{1,i}|^{1+\alpha_1} \right)^2} - M^{-1}(0) \right] \times \\ & [k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(x_2)]. \end{aligned} \quad (15)$$

首先, 证明系统(14)的标称系统, 即系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -M^{-1}(0)[k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(x_2)] \end{aligned} \quad (16)$$

是渐近稳定和齐次的; 然后证明非线性函数 $\widehat{f}(x_1, x_2)$ 满足引理 1 中的条件.

对于系统(16), 取如下的 Lyapunov 函数:

$$W(x_1, x_2) = \frac{k_1}{1 + \alpha_1} \sum_{i=1}^3 |x_{1,i}|^{1+\alpha_1} + x_2^T M(0)x_2. \quad (17)$$

沿着系统(16), 函数 $V(x_1, x_2)$ 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{W}(x_1, x_2) = & k_1 \sum_{i=1}^3 \text{sig}^{\alpha_1}(x_{1,i})x_{2,i} - \\ & x_2^T [k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(x_2)] = \\ & -k_2 \sum_{i=1}^3 |x_{2,i}|^{1+\alpha_2} \leq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

与 Step 1 中的证明类似, 可以证得当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow 0$, 因此, 系统(16)是渐近稳定的. 此外, 注意到 $0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 = 2\alpha_1/(1 + \alpha_1)$, 根据齐次性定义 4, 可知系统(16)关于扩张 $(r_1, r_1, r_1, r_2, r_2, r_2)$ 的齐次度为 $k = (\alpha_1 - 1)/2 < 0$, 其中 $r_1 = 1, r_2 = (1 + \alpha_1)/2$.

下面将证明对于任意的 $(x_1, x_2) \neq 0$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\varepsilon^{r_1}x_1, \varepsilon^{r_2}x_2)}{\varepsilon^{r_2+k}} = 0.$$

因为函数

$$g(x_1) = \frac{M^{-1}(x_1)}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |x_{1,i}|^{1+\alpha_1} \right)^2}$$

是关于 x_1 一阶可导的, 根据均值不等式可得

$$\begin{aligned} g(\varepsilon^{r_1}x_1) - g(0) = & \frac{M^{-1}(\varepsilon^{r_1}x_1)}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\varepsilon^{r_1}x_{1,i}|^{1+\alpha_1} \right)^2} - M^{-1}(0) = \mathcal{O}(\varepsilon^{r_1}x_1), \end{aligned} \quad (19)$$

其中符号 \mathcal{O} 表示等价无穷小. 根据文献[29], 该符号具体定义为: 如果存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$ 使得当 $|h| < \delta$

时, 有 $|f(h)| < M|g(h)|$, 则称函数 $f(h)$ 和函数 $g(h)$ 在 $h \rightarrow 0$ 情况下是等阶的, 并记作 $f(h) = \mathcal{O}(g(h))$.

对于任意的 $(x_1, x_2) \neq 0$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\varepsilon^{r_1}x_1, \varepsilon^{r_2}x_2)}{\varepsilon^{r_2+k}} = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{M^{-1}(\varepsilon^{r_1}x_1)C(\varepsilon^{r_1}x_1, \varepsilon^{r_2}x_2)\varepsilon^{r_2}x_2 - \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left([g(\varepsilon^{r_1}x_1) - g(0)] \times \right. \\ & \left. \frac{[k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\varepsilon^{r_1}x_1) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(\varepsilon^{r_2}x_2)]}{\varepsilon^{r_2+k}} \right) = \\ & -M^{-1}(0)C(0, 0)x_2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} - [k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) + \\ & k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(x_2)] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon^{r_1}x_1)\varepsilon^{\alpha_1-r_2-k}. \end{aligned} \quad (20)$$

注意到 $k = (\alpha_1 - 1)/2 < 0, r_1 = 1, r_2 = (1 + \alpha_1)/2$, 由式(20)可得

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\widehat{f}(\varepsilon^{r_1}x_1, \varepsilon^{r_2}x_2)}{\varepsilon^{r_2+k}} = & 0 - [k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) + k_2 \text{sig}^{\alpha_2}(x_2)] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon^{r_1}x_1) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

由引理 1 可知, 系统(10)是局部有限时间稳定的. 综合 Step 1 和 Step 2 的结果, 可知系统(10)是有限时间稳定的, 即在有限时间内 $x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0$. 由于 $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\sigma} = G(\sigma)\omega$ 和矩阵 $G(\sigma)$ 是非奇异的, σ 和 ω 会在有限时间内收敛到 0, 从而定理 1 得证. \square

下面分析所设计的控制器(8)的有界性.

定理 2 对于有限时间姿态控制器(8), 有下面的结论:

$$|\tau_i| \leq \frac{9}{4}k_1 + \sqrt{3}k_2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (22)$$

证明 控制器(8)可以分为两部分, 即

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 + \tau_2, \\ \tau_1 &= -\frac{G^T(\sigma)}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{1+\alpha_1} \right)^2} k_1 \text{sig}^{\alpha_1}(\sigma), \\ \tau_2 &= -\frac{G^T(\sigma)}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{1+\alpha_1} \right)^2} k_2 \text{sat}_{\alpha_2}(\dot{\sigma}). \end{aligned} \quad (23)$$

首先分析 τ_1 的有界性. 基于式(3), 通过计算有 $\tau_1^T \tau_1 =$

$$\begin{aligned} k_1^2 \text{sig}^{\alpha_1}(\sigma)^T \frac{G(\sigma)G^T(\sigma)}{\left[1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{1+\alpha_1} \right)^2 \right]^2} \text{sig}^{\alpha_1}(\sigma) = \\ k_1^2 \frac{\left(\frac{1 + \sigma^T \sigma}{4} \right)^2 \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{2\alpha_1} \right)}{\left[1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{1+\alpha_1} \right)^2 \right]^2} \leq \end{aligned}$$

$$k_1^2 \frac{\left(\frac{1+\sigma^T\sigma}{4}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{\alpha_1}\right)^2}{\left[1 + \sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{2+2\alpha_1}\right]^2}. \quad (24)$$

进一步计算可得

$$\begin{aligned} (1 + \sigma^T\sigma) \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{\alpha_1}\right) = & |\sigma_1|^{\alpha_1} + |\sigma_2|^{\alpha_1} + |\sigma_3|^{\alpha_1} + |\sigma_1|^{2+\alpha_1} + \\ & |\sigma_1|^2 |\sigma_2|^{\alpha_1} + |\sigma_1|^2 |\sigma_3|^{\alpha_1} + |\sigma_2|^{2+\alpha_1} + |\sigma_2|^2 |\sigma_1|^{\alpha_1} + \\ & |\sigma_2|^2 |\sigma_3|^{\alpha_1} + |\sigma_3|^{2+\alpha_1} + |\sigma_3|^2 |\sigma_1|^{\alpha_1} + |\sigma_3|^2 |\sigma_2|^{\alpha_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

基于引理 2, 有

$$|\sigma_1|^2 |\sigma_2|^{\alpha_1} + |\sigma_2|^2 |\sigma_1|^{\alpha_1} \leq |\sigma_1|^{2+\alpha_1} + |\sigma_2|^{2+\alpha_1}. \quad (26)$$

通过类似的推导, 对式 (25) 可以估计为

$$\begin{aligned} (1 + \sigma^T\sigma) \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{\alpha_1}\right) = & |\sigma_1|^{\alpha_1} + |\sigma_2|^{\alpha_1} + |\sigma_3|^{\alpha_1} + \\ & 3|\sigma_1|^{2+\alpha_1} + 3|\sigma_2|^{2+\alpha_1} + 3|\sigma_3|^{2+\alpha_1}. \end{aligned} \quad (27)$$

由于

$$|\sigma_i|^{\alpha_1} + |\sigma_i|^{2+\alpha_1} \leq 1 + |\sigma_i|^{2+2\alpha_1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (28)$$

从而

$$|\sigma_i|^{\alpha_1} + 3|\sigma_i|^{2+\alpha_1} \leq 3(1 + |\sigma_i|^{2+2\alpha_1}), \quad i = 1, 2, 3,$$

这意味着

$$(1 + \sigma^T\sigma) \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{\alpha_1}\right) \leq 9 \left(1 + \sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{2+2\alpha_1}\right). \quad (29)$$

将不等式 (29) 代人 (24), 可得

$$\tau_1^T \tau_1 \leq k_1^2 \left(\frac{9}{4}\right)^2, \quad (30)$$

即

$$|\tau_{1,i}| \leq \sqrt{\tau_1^T \tau_1} \leq \frac{9}{4} k_1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (31)$$

下面分析 τ_2 的有界性. 首先

$$\begin{aligned} \tau_2^T \tau_2 = & k_2 \text{sat}_{\alpha_2}(\dot{\sigma})^T \frac{G(\sigma)G^T(\sigma)}{\left[1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{1+\alpha_1}\right)^2\right]^2} k_2 \text{sat}_{\alpha_2}(\dot{\sigma}) = \\ & k_2^2 \frac{\left(\frac{1+\sigma^T\sigma}{4}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^3 \text{sat}_{\alpha_2}^2(\dot{\sigma})\right)}{\left[1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{1+\alpha_1}\right)^2\right]^2} \leq \\ & k_2^2 \frac{3\left(\frac{1+\sigma^T\sigma}{4}\right)^2}{\left[1 + \sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{2+2\alpha_1}\right]^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

因 $0 < \alpha_1 < 1$, 所以

$$|\sigma_i|^2 \leq 1 + |\sigma_i|^{2+2\alpha_1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (33)$$

从而

$$\frac{1 + \sigma^T\sigma}{4} \leq 1 + \sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^{2+2\alpha_1}. \quad (34)$$

将不等式 (34) 代入 (32), 可以得到

$$\tau_2^T \tau_2 \leq 3k_2^2, \quad (35)$$

即

$$|\tau_{2,i}| \leq \sqrt{\tau_2^T \tau_2} \leq \sqrt{3}k_2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (36)$$

综合式 (31) 和 (36) 可得

$$|\tau_i| \leq |\tau_{1,i}| + |\tau_{2,i}| \leq \frac{9}{4}k_1 + \sqrt{3}k_2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (37)$$

定理 2 得证. \square

基于定理 2, 通过合理选取控制增益 k_1 和 k_2 使得控制器 τ 的界可以任意小.

注 2 值得指出的是, 在文献 [14,17-18] 中, 有限时间控制技术已经被采用, 但与之不同的是, 此处的有限时间控制器设计主要基于齐次性理论^[30]. 通过充分利用飞行器姿态系统的斜对称特性, 所设计的控制器与存在的控制器相比具有更简单的结构. 此外, 本节中所设计的有限时间控制器还具有以下特点: 1) 文献 [14,17-18] 中的有限时间控制器需要精确知道惯性矩阵 J 的信息, 但本文中的控制器 (8) 并不需要; 2) 文献 [14,17-18] 中并没有考虑输入饱和问题, 而本文在设计有限时间控制的同时考虑了该问题. 因此, 本文的有限时间控制器可以满足任何的控制输入有界的要求, 即可以通过小的控制量也能实现有限时间姿态镇定.

注 3 在定理 1 中, 若令 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, 则饱和有限时间控制器 (8) 将变为饱和的渐近稳定控制器, 即

$$\tau = - \frac{G^T(\sigma)}{1 + \left(\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|^2\right)^2} [k_1 \text{sig}(\sigma) + k_2 \text{sat}(\dot{\sigma})]. \quad (38)$$

其中: $k_1 > 0, k_2 > 0$. 在此控制器作用下, 系统 (2) 的状态将会被渐近镇定到平衡点, 即 $\sigma \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow \infty$.

3 数值仿真

考虑系统 (2) 的有限时间姿态镇定问题, 其惯性矩阵和初始值为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.63 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad \sigma(0) = [1.5, -2, 3]^T,$$

$$\omega(0) = [0.25, 0.2, -0.1]^T.$$

与文献 [14,17-18] 不同, 此处假设控制输入是有界的.

为比较系统在饱和有限时间控制器 (8) 和饱和渐近稳定控制器 (38) 作用下的动态性能 (如收敛速

度、抗扰动性能), 控制力矩的幅值不超过 $0.2 \text{ N} \cdot \text{m}$. 在此约束条件下, 有限时间控制器 (8) 的增益选取为 $k_1 = 0.7, k_2 = 0.7, \alpha_1 = 1/4$, 渐近稳定控制器 (38) 的增益选取为 $k_1 = 0.7, k_2 = 0.7$.

当不存在外部干扰时, 闭环系统的响应曲线如图 1 和图 2 所示, 其收敛时间见表 1. 其中收敛时间为在此时间后有 $|\sigma_i| < 10^{-3}, |\omega_i| < 10^{-3} \text{ degree/s}, i = 1, 2, 3$; 稳态误差为状态 $\sigma_i, \omega_i (i = 1, 2, 3)$ 最终进入的区域. 很明显, 有限时间控制器可以提供更快的收敛速度.

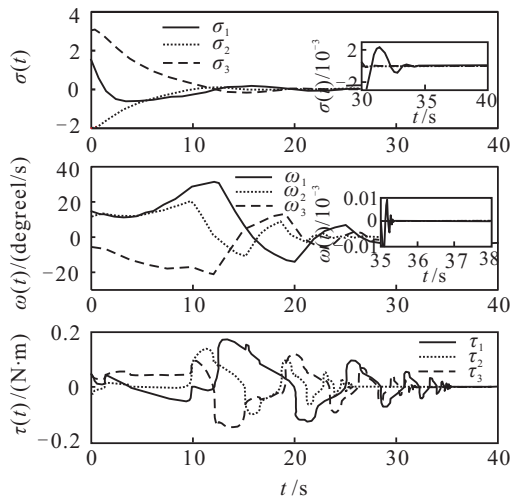


图 1 无扰动时系统在控制器 (8) 作用下的响应曲线

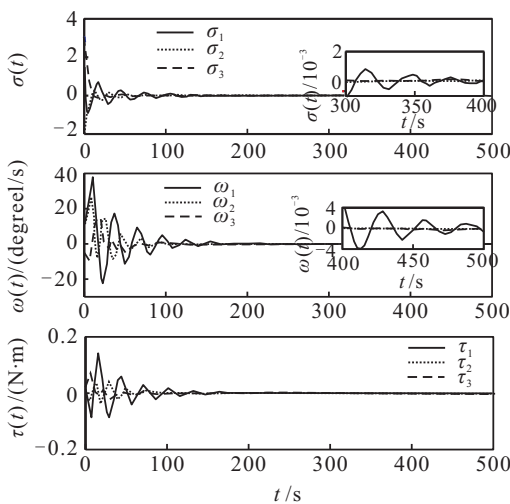


图 2 无扰动时系统在控制器 (38) 作用下的响应曲线

表 1 闭环系统在控制器 (8) 和 (38) 作用下的收敛时间和抗扰动性能比较

	收敛时间/s	稳态误差
渐近稳定控制器 (38) 作用	462.5	2
有限时间控制器 (8) 作用	35.3	0.6
改进的百分比/%	92.37	70

下面考虑存在外部干扰的情况, 在控制输入通道加入以下扰动:

$$d_1(t) = 0.03\sin t, d_2(t) = 0.035\cos(1.5t),$$

$$d_3(t) = 0.01\sin(2t + 1).$$

在两种控制器作用下, 闭环系统的响应曲线如图 3 和图 4 所示, 稳态误差比较见表 1. 很明显, 有限时间控制器可以使得闭环系统具有更好的抗干扰性能.

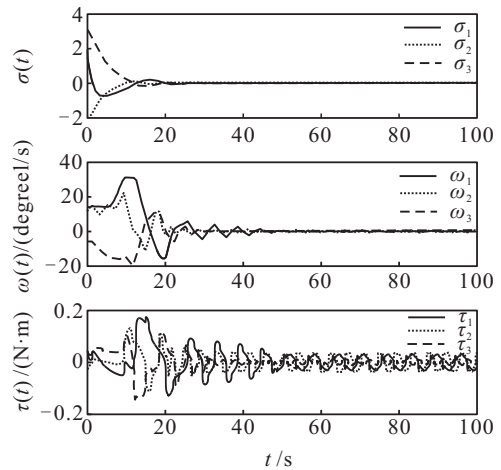


图 3 有扰动时系统在控制器 (8) 作用下的响应曲线

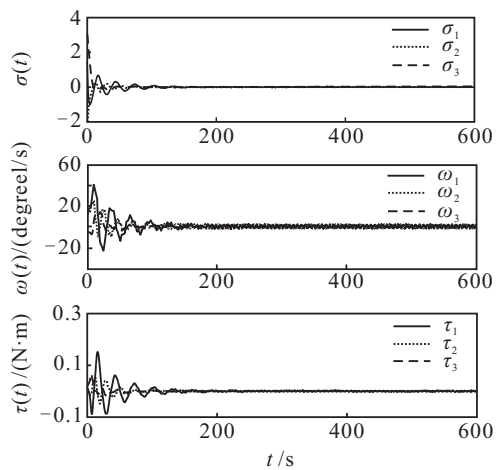


图 4 有扰动时系统在控制器 (38) 作用下的响应曲线

4 结 论

本文利用齐次系统理论、饱和控制器设计方法和姿态系统矩阵的物理特性, 设计了一类饱和的非光滑姿态控制律, 使得姿态可以在有限时间内被镇定到平衡点. 本文主要贡献包括: 1) 解决了刚体飞行器姿态系统在输入饱和和受限下的有限时间姿态镇定问题; 2) 所设计的控制器不需要姿态系统的任何惯性矩阵信息.

参考文献(References)

[1] Tsiotras P. Stabilization and optimality results for the attitude control problem[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 1996, 19(4): 772-779.

[2] Lizarralde F, Wen J T. Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(3): 468-472.

- [3] Xia Y, Zhu Z, Fu M, et al. Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances[J]. *IEEE Trans on Industrial Electronics*, 2011, 58(2): 647-659.
- [4] Costic B T, Dawson D M, de Queiroz M S, et al. Quaternion-based adaptive attitude tracking controller without velocity measurements[J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(6): 1214-1222.
- [5] Chen Z, Huang J. Attitude tracking and disturbance rejection of rigid spacecraft by adaptive control[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2009, 54(3): 600-605.
- [6] Cheng C, Shu S. Application of fuzzy controllers for spacecraft attitude control[J]. *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, 45(2): 761-765.
- [7] 丁世宏, 李世华. 有限时间控制问题综述[J]. *控制与决策*, 2011, 26(2): 161-169.
(Ding S H, Li S H. A survey for finite-time control problems[J]. *Control and Decision*, 2011, 26(2): 161-169.)
- [8] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM J on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751-766.
- [9] 李世华, 丁世宏, 田玉平. 一类二阶非线性系统的有限时间状态反馈镇定方法[J]. *自动化学报*, 2007, 33(1): 101-104.
(Li S H, Ding S H, Tian Y P. A finite-time state feedback stabilization method for a class of second order nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(1): 101-104.)
- [10] Ding S H, Li S H, Li Q. Disturbance analysis for continuous finite-time control systems[J]. *J of Control Theory and Applications*, 2009, 7(3): 271-276.
- [11] Li S, Du H, Lin X. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics[J]. *Automatica*, 2011, 47(8): 1706-1712.
- [12] Du H, Qian C, Yang S, et al. Recursive design of finite-time convergent observers for a class of time-varying nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 601-609.
- [13] 都海波, 李世华, 何怡刚, 等. 多枚倾斜转弯导弹的滚转通道之分布式有限时间姿态协调控制[J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(8): 956-963.
(Du H B, Li S H, He Y G, et al. Distributed finite-time attitude cooperative control for roll channels of multiple bank-to-turn missiles[J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(8): 956-963.)
- [14] Ding S, Li S. Stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with external disturbances using finite-time control techniques[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2009, 13(4/5): 256-265.
- [15] Feng Y, Yu X, Man Z. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators[J]. *Automatica*, 2002, 38(9): 2159-2167.
- [16] Qian C, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1061-1079.
- [17] Zhu Z, Xia Y, Fu M. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(6): 686-702.
- [18] Li S, Ding S, Li Q. Global set stabilisation of the spacecraft attitude using finite-time control technique[J]. *Int J of Control*, 2009, 82(5): 822-836.
- [19] 丁世宏, 李世华. 输入饱和下的非线性积分系统的全局有限时间镇定[J]. *自动化学报*, 2011, 37(10): 1222-1231.
(Ding S H, Li S H. Global finite-time stabilization of nonlinear integrator systems subject to input saturation[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2011, 37(10): 1222-1231.)
- [20] Shuster M D. A survey of attitude representations[J]. *J of the Astronautical Sciences*, 1993, 41(4): 439-517.
- [21] Khalil H K. *Nonlinear systems*[M]. 3rd ed. NJ: Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
- [22] Du H, Li S, Qian C. Finite-time attitude tracking control of spacecraft with application to attitude synchronization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2011, 56(11): 2711-2717.
- [23] Hermes H. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls[J]. *Differential Equations, Stability and Control*, 1991, 109: 249-260.
- [24] Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field[J]. *Systems and Control Letters*, 1992, 19(6): 467-473.
- [25] Qian C. A homogeneous domination approach for global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems[C]. *Proc of 2005 American Control Conf. Portland*, 2005: 4708-4715.
- [26] Hong Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2002, 46(2): 231-236.
- [27] Slotine J E, Di Benedetto M D. Hamiltonian adaptive control of spacecraft[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1990, 35(7): 848-852.
- [28] Yu S, Yu X, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957-1964.
- [29] Yu X, Wang B, Galias Z, et al. Discretization effect on equivalent control-based multi-input sliding-mode control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1563-1569.
- [30] Bhat S P, Bernstein D S. Geometric homogeneity with application to finite-time stability[J]. *Mathematics of Control Signals Systems*, 2005: 17(2): 101-127.