

非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型及其应用

郭欢^{1,2}, 肖新平¹, Jeffrey Forrest³

(1. 武汉理工大学理学院, 武汉 430063; 2. 江汉大学数学与计算机科学学院, 武汉 430056; 3. 宾州州立 SR 大学数学系, PA 16057)

摘要: GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型是灰色 GM(1, 1) 模型的推广. 在灰色 GM(1, 1) 模型和等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型的基础上提出非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型, 并对模型进行求解. 讨论了 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型的曲线形状、发展系数以及幂指数间的关系, 研究了非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型的参数空间. 将平均相对误差看成幂指数的函数, 根据序列形状判断幂指数的范围, 并利用粒子群算法求解幂指数. 实际应用验证了所提出模型的有效性.

关键词: 灰色 GM(1, 1) 模型; 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型; 粒子群算法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Non-equidistance GM(1, 1, t^α) model with time power and its application

GUO Huan^{1,2}, XIAO Xin-ping¹, Jeffrey Forrest³

(1. School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China; 2. School of Mathematics and Computer Science, Jiangnan University, Wuhan 430056, China; 3. Mathematic Department, Slippery Rock University of Pennsylvania, Slippery Rock 16057, USA. Correspondent: GUO Huan, E-mail: guohuan.2007@163.com)

Abstract: The GM(1, 1, t^α) model with time power is a generalization of the grey GM(1, 1) model. Based on the grey GM(1, 1) model and the equidistance GM(1, 1, t^α) model with time power, the non-equidistance GM(1, 1, t^α) model with time power is proposed. The relationship of the model's curve, power's exponent and development coefficient is discussed, and the parameter space of non-equidistance GM(1, 1, t^α) model with time power is studied. The average relative error is seen as a function of power's exponent. The numeric area of power's exponent can be got according to the shape of raw data. The particle swarm optimization(PSO) algorithm is used to solve the power's exponent. The practical application illustrates the effectiveness of the proposed model.

Keywords: grey GM(1, 1) model; non-equidistance GM(1, 1, t^α) model with time power; particle swarm optimization

0 引言

准确的预测是进行科学决策的前提. 邓聚龙^[1]提出的灰色预测模型主要针对现实世界中存在的灰色不确定信息系统, 通过构建具有差分、微分、指数兼容等性质的灰色预测模型来寻找系统的发展趋势. GM(1, 1) 模型是灰色系统的核心模型, 对具有灰指数的序列建模具有较高的精度. 目前, 灰色预测模型已经在工业、农业、交通、经济等多个领域得到广泛应用^[2-3]. 随着 GM(1, 1) 模型应用范围的不断拓展, 对 GM(1, 1) 模型的理论研究也越来越深入.

对模型特性的研究是改进建模方法的基础, 刘思峰等^[4]指出 GM(1, 1) 模型适用于发展系数 $a \in$

$(-2, 2)$ 的范围; Li^[5]研究了数乘变换对系数的影响; 王文平等^[6]研究了非线性项 GM(1, 1) 模型的混沌特性, 合理解释了 GM(1, 1) 模型的禁区现象. 针对非等间距序列, Dend 等^[7]提出了非等间隔 GM(1, 1) 模型; 戴文战等^[8]基于灰色模型的指数特性和积分定义提出了一种重构非等间距序列的 GM(1, 1) 模型背景值的方法. 针对 GM(1, 1) 模型在优化和拓展的方面, 谢乃明等^[9]从 GM(1, 1) 模拟齐次指数序列精度出发, 分别提出了无偏 GM(1, 1) 模型和离散灰色模型; 崔杰等^[10]针对具有近似非齐次指数律特征的序列构建了新的灰色预测模型; Xiao 等^[11]针对灰模型的建模机理提出了一些特殊模型的广义模型形式.

收稿日期: 2014-04-29; **修回日期:** 2014-07-03.

基金项目: 教育部人文社科基金项目(11YJC630155).

作者简介: 郭欢(1984—), 女, 博士, 从事系统控制与优化的研究; 肖新平(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事运筹与管理、预测理论与技术、不确定系统分析与决策等研究.

这些研究成果在很大程度上推进了 GM(1, 1) 模型的发展, 但是随着应用领域的不断扩大, 传统 GM(1, 1) 模型及其改进模型往往不能满足实际应用中出现的新问题. 许多系统的发展过程表现为匀速发展, 加速变化到最终平衡, 简单地用指数规律来描述也许不能正确反映系统的本质规律. 目前对广泛意义下指数特征序列的研究很少, 对非等间隔序列的研究更少. 钱吴永等^[12]对含有时间幂次项的灰色 GM(1, 1, t^α) 模型的建模过程及 α 特殊取值下的适用范围进行了研究, 但是没有给出幂指数与发展系数的关系以及确定方法.

本文在现有研究的基础上, 针对含时间幂函数项特征行为的非等间隔序列, 建立非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型, 并对模型进行求解; 分析 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型的曲线形状与发展系数及幂指数间的关系; 研究非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型的参数空间, 并以平均相对误差最小为目标函数, 建立非线性优化模型, 利用粒子群算法求解幂指数. 应用实例表明了所提出模型的有效性.

1 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型

定义 1 设 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ 为原始数据序列; $X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n))$ 为一次累加生成序列, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$; $Z^{(1)} = (z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(n))$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k-1) + 0.5x^{(1)}(k)$, 则称

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = bk^\alpha \tag{1}$$

为等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型^[12]. 特别地, 当 α = 0 时为灰色等间隔 GM(1, 1) 模型.

定义 2 设 $X^{(0)} = (x^{(0)}(t_1), x^{(0)}(t_2), \dots, x^{(0)}(t_n))$ 为原始数据序列, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \neq \text{const}, i = 2, 3, \dots, n, \Delta t_1 = 1$; $X^{(1)} = (x^{(1)}(t_1), x^{(1)}(t_2), \dots, x^{(1)}(t_n))$ 为一次累加生成序列, $x^{(1)}(t_k) = \sum_{i=1}^k \Delta t_i x^{(0)}(t_i)$; $Z^{(1)} = (z^{(1)}(t_1), z^{(1)}(t_2), \dots, z^{(1)}(t_n))$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列, $z^{(1)}(t_k) = 0.5x^{(1)}(t_{k-1}) + 0.5x^{(1)}(t_k)$, 则

$$x^{(0)}(t_k) + az^{(1)}(t_k) = bt_k^\alpha \tag{2}$$

为非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型. 特别地, 当 α = 0 时为灰色非等间隔 GM(1, 1) 模型.

定义 3 称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = bt^\alpha \tag{3}$$

为 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的白化方程.

1.1 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的解

定理 1 1) GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型白化方程

的通解为

$$x^{(1)}(t) = be^{-at} \int e^{at} t^\alpha dt + c, \tag{4}$$

其中 c 为任意常数.

2) 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的时间相应式为

$$x^{(1)}(t_k) = be^{-at_k} \sum_{i=1}^k e^{at_i} t_i^\alpha + \tilde{c}, \tag{5}$$

其中 \tilde{c} 为依赖初值的常数.

证明 1) GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的白化方程可用常数变量法求解, 令 $Q(t) = bt^\alpha$, 假设 $Q(t) = 0$, 有

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = -ax^{(1)}. \tag{6}$$

式(6)的通解为

$$x^{(1)} = c \cdot e^{-at},$$

其中 c 为任意常数. 由于 $Q(t) = bt^\alpha$, 令

$$x^{(1)} = c(t) \cdot e^{-at}, \tag{7}$$

两边求导得到

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \frac{dc(t)}{dt} \cdot e^{-at} - ac(t)e^{-at}. \tag{8}$$

将式(7)和(8)代入(3)得到

$$\frac{dc(t)}{dt} = e^{at} \cdot bt^\alpha. \tag{9}$$

对式(9)积分, 并代入(7)有

$$x^{(1)}(t) = be^{-at} \int e^{at} t^\alpha dt + c.$$

结论证得.

2) 对式(4)进行离散化处理得到

$$x^{(1)}(t) = be^{-at} \sum_t e^{at} t^\alpha + \tilde{c},$$

其中 \tilde{c} 是依赖初值的常数. 当 $t = t_k$ 时, 即可得到非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的时间响应式为

$$x^{(1)}(t_k) = be^{-at_k} \sum_{i=1}^k e^{at_i} t_i^\alpha + \tilde{c}.$$

序列还原值为

$$x^{(0)}(t_1) = \hat{x}^{(1)}(t_1);$$

$$x^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{x}^{(1)}(t_k) - \hat{x}^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k}, k = 2, 3, \dots, n.$$

定理得证. □

推论 1 1) 当 α = 0 时, 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的响应序列为

$$x^{(1)}(t_k) = \left(x^{(1)}(t_1) - \frac{b}{a}\right)e^{-at_k} + \frac{b}{a};$$

2) 当 α = 1 时, 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的响应序列为

$$x^{(1)}(t_k) = \left(x^{(1)}(t_1) - \frac{b}{a} + \frac{b}{a^2}\right)e^{-at_k} + \frac{b}{a}t_k - \frac{b}{a^2};$$

3) 当 α = 2 时, 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的响应序列为

$$x^{(1)}(t_k) =$$

$$\left(x^{(1)}(t_1) - \frac{b}{a} + \frac{2b}{a^2} - \frac{2b}{a^3}\right)e^{-at_k} + \frac{b}{a}t_k^2 - \frac{2b}{a^2}t_k + \frac{2b}{a^3}.$$

推论 2 1) 当 $\alpha = 0$ 时, 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型适合近似具有 $x(t) \approx ce^{-at}$ 规律的序列建模; 2) 当 $\alpha = 1$ 时, 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型适合近似具有 $x(t) \approx ce^{-at} + b$ 规律的序列建模; 3) 当 $\alpha = 2$ 时, 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型适合具有 $x(t) \approx ce^{-at} + bt + d$ 规律的序列建模.

1.2 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型解的分析

由推论 2 可知, 当 α 取不同值时, 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型适合不同规律的序列建模, 有必要对非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型的性质进行分析.

定理 2 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂时间项模型时 间响应函数 $x^{(1)}(t_k) = be^{-at_k} \sum_{i=1}^k e^{at_i} t_i^\alpha + \tilde{c}$ 有下列性质:

1) 当 $a > 0$ 时, 若 $\alpha < 0, t \rightarrow \infty$, 则 $x^{(1)}(t_k) \rightarrow C$, C 为有限定值;

2) 当 $a = 0$ 时, 若 $\alpha < -1, t \rightarrow \infty$, 则 $x^{(1)}(t_k) \rightarrow C, C$ 为有限定值.

证明 1) 由函数项级数的相关知识, 令 $y(n) = e^{an}n^\alpha$. 当 $a > 0$ 时, 若 $\alpha < 0$, 则有

$$y(n) \leq e^{an},$$

$$x^{(1)}(t_k) =$$

$$be^{-at_k} \sum_{i=1}^k e^{at_i} t_i^\alpha + \tilde{c} \leq$$

$$be^{-at_k} \sum_{n=1}^{t_k} e^{an} n^\alpha + \tilde{c} \leq$$

$$be^{-at_k} \sum_{n=1}^{t_k} e^{an} + \tilde{c} =$$

$$be^{-at_k} \frac{e^a(1 - e^{at_k})}{1 - e^a} + \tilde{c}.$$

由极限知识 $\lim_{t_k \rightarrow \infty} e^{-at_k} \frac{e^a(1 - e^{at_k})}{1 - e^a} + \tilde{c}$ 的存在, 有 $\lim_{t_k \rightarrow \infty} x^{(1)}(t_k) \rightarrow C$, 且 C 为有限定值.

2) 当 $a = 0$ 时, 有 $x^{(1)}(t_k) = \sum_{i=1}^k t_i^\alpha + \tilde{c}$, 则

$$x^{(1)}(t_k) = b \sum_{i=1}^k t_i^\alpha + \tilde{c} \leq b \sum_{n=1}^{t_k} n^\alpha + \tilde{c},$$

其中 $\sum_{n=1}^{t_k} n^\alpha$ 为 p 级数. 已知当 $p > 1$ 时, p 级数收敛, 即当 $\alpha < -1$ 时, $\lim_{t_k \rightarrow \infty} x^{(1)}(t_k) \rightarrow C$, 且 C 为有限定值. 定理得证. \square

1.3 非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型参数辨识

定理 3 令

$$C = \sum_{i=2}^n z^{(1)}(t_i) t_i^r,$$

$$E = \sum_{i=2}^n (z^{(1)}(t_i))^2,$$

$$F = \sum_{i=2}^n (t_i^r)^2,$$

$$G = \sum_{i=2}^n z^{(1)}(t_i) x^{(0)}(t_i),$$

$$H = \sum_{i=2}^n x^{(0)}(t_i) t_i^r,$$

则

$$a = \frac{CH - FG}{EF - C^2}, \quad b = \frac{EH - CG}{EF - C^2}.$$

证明 令

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(t_2) & t_2^r \\ -z^{(1)}(t_3) & t_3^r \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(t_n) & t_n^r \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(t_2) \\ x^{(0)}(t_3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(t_n) \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

转化为矩阵形式, 表示为

$$Y = BP.$$

设 a, b 为一组估计值, 代入得观察值和估计值的残差为

$$e = Y - BP,$$

误差平方和为

$$s = e'e = (Y - BP)'(Y - BP).$$

根据极值原理, 为使 s 最小, 需有 $\frac{\partial s}{\partial P} = 0$. 根据矩阵求导法则, 有

$$\frac{\partial s}{\partial P} = \frac{\partial e'e}{\partial P} = \frac{\partial(Y - BP)'(Y - BP)}{\partial P} = \frac{\partial(Y'Y - Y'BP - P'B'Y + P'B'BP)}{\partial P} = \frac{\partial(Y'Y - 2Y'BP + P'B'BP)}{\partial P} = -2(Y'B)' + 2B'B'P = 0.$$

整理上式可得

$$P = (B'B)^{-1}B'Y,$$

更进一步有

B'B =

$$\begin{bmatrix} -z^{(1)}(t_2) & \cdots & -z^{(1)}(t_n) \\ t_2^r & \cdots & t_n^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z^{(1)}(t_2) & t_2^r \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(t_n) & t_n^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=2}^n (z^{(1)}(t_i))^2 & -\sum_{i=2}^n z^{(1)}(t_i)t_i^r \\ -\sum_{i=2}^n z^{(1)}(t_i)t_i^r & \sum_{i=2}^n (t_i^r)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & -C \\ -C & F \end{bmatrix},$$

故

$$(B'B)^{-1} = \frac{1}{|B'B|} \begin{bmatrix} F & C \\ C & E \end{bmatrix} = \frac{1}{EF - C^2} \begin{bmatrix} F & C \\ C & E \end{bmatrix},$$

B'Y =

$$\begin{bmatrix} -z^{(1)}(t_2) & \cdots & -z^{(1)}(t_n) \\ t_2^r & \cdots & t_n^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(0)}(t_2) \\ \vdots \\ x^{(0)}(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=2}^n z^{(1)}(t_i)x^{(0)}(t_i) \\ \sum_{i=2}^n x^{(0)}(t_i)t_i^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G \\ H \end{bmatrix}.$$

所以

$$P = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{EF - C^2} \begin{bmatrix} F & C \\ C & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -G \\ H \end{bmatrix} = \frac{1}{EF - C^2} \begin{bmatrix} CH - FG \\ EH - CG \end{bmatrix}.$$

结论成立. □

在参数辨识中的一项重要工作是确定幂指数 α, 这里首先通过构造平均相对误差函数

$$f(\alpha) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(t_i) - x^{(0)}(t_i)}{x^{(0)}(t_i)} \right|,$$

再根据一次累加序列的曲线形状简单判断 α 的取值范围, 并作为约束条件; 然后用粒子群算法^[13]求解以平均相对误差最小为目标函数的非线性优化问题.

2 应用举例

地基沉降是一个动态非线性问题, 深入研究地

基沉降的规律对准确预测沉降量是非常有价值的. 但地基沉降是一个受多因素影响、随时空变异的复杂动态系统, 其信息呈现出不完备性. 根据极限承载力的作用特点, 在实际工程中对地基沉降的测量并不是等时间间隔的, 而是非等间隔地进行测量, 且获得的实测数据有限. 根据工程力学的研究成果, 地基沉降过程是一个从匀速到加速最终稳定的动态演化过程, 且地基沉降过程表现的规律近似部分指数部分线性. 传统方法的预测效果往往不尽如意, 而非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型所描述系统的演化过程与此比较相符. 本文以某采用桩箱基础的高层建筑为例, 从基础完工监测点布设开始, 到工程完工交付使用, 沉降观测见表 1 和图 1.

表 1 某高层建筑物沉降观测数据

观测时点	观测值/mm
1	3.2
3	7.8
5	14.8
7	24.9
8	28.3
9	31.2

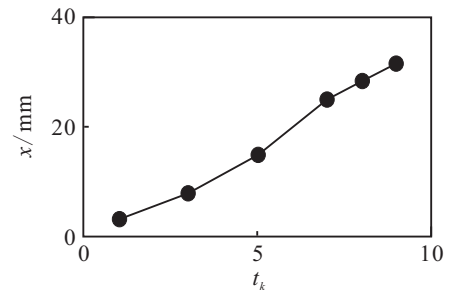


图 1 沉降曲线图

从图 1 可以看出, 原始序列为非等间隔且趋于某定值的序列. 取 X⁽⁰⁾ = (3.2, 7.8, 14.8, 24.9, 28.3, 31.2), 根据图 1 可以判断 a > 0, α < 0. 取 -5 < α < 0 为约束条件, 粒子数 P_{num} = 20, 循环次数为 100, w_{ini} = 0.9, w_{end} = 0.4. 寻找最优的 α, 同时可得 a, b 的值. 以 x⁰(1) 为初始条件进行建模, 为了比较预测效果, 同时用 GM(1, 1) 模型和 GM(1, 1, t²) 模型对序列进行建模, 结果见表 2.

表 2 结果对比

观测时点	观测值	GM(1, 1) 模型		GM(1, 1, t ²) 模型		GM(1, 1, t ^α) 模型	
		a = -0.1753, b = 8.3427	相对误差/%	a = 0.4546, b = 1.2031	相对误差/%	a = 0.0855, b = 1.7294, α = -1.4744	相对误差/%
1	3.2	3.2000	0.0000	3.2000	0.0000	3.2000	0.0000
3	7.8	10.2714	31.6851	5.8273	25.2913	7.7964	0.0462
5	14.8	14.2340	3.8241	14.8030	0.0200	14.6815	0.8007
7	24.9	21.1949	14.8801	25.6299	2.9315	24.2040	2.7952
8	28.3	28.0417	0.9127	25.9248	8.3928	27.4950	2.8445
9	31.2	33.2580	6.5960	32.8534	5.2993	31.9873	2.5234
平均相对误差/%		9.6497		6.9892		1.5017	

从表 2 可以看出,对于实际问题中的地基沉降问题,用非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型建模,利用粒子群算法寻找最优的幂指数,当 $\alpha = -1.4744$ 时,建模精度比 GM(1, 1) 模型和 GM(1, 1, t^2) 模型的精度要高很多,这说明采用粒子群算法确定幂指数是可行的.同时也说明了 $\alpha = -1.4744$ 时的非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型更符合序列的变化趋势.

3 结 论

在工程实际中,近似指数型曲线的建模问题广泛存在,在以往的研究中常常采用 GM(1, 1) 模型进行建模.本文通过对 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型方程求解,分析模型在不同幂指数下的曲线性质,发现任一幂指数下的 GM(1, 1, t^α) 模型都有一定的局限性,并不适合对所有的近似指数曲线进行建模,而是需要根据数据序列的变化趋势,建立符合自身特征的模型.同时,本文在等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型的基础上,提出了非等间隔 GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型,对其参数空间进行研究,建立了以平均相对误差最小为非线性优化模型,并用粒子群算法求解.总之,GM(1, 1, t^α) 幂次时间项模型是对传统 GM(1, 1) 模型的推广,而非等间隔幂次时间项模型又使 GM(1, 1, t^α) 模型得到了进一步的发展,更多的理论支撑尚有待深入研究.

参考文献(References)

- [1] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 98-100.
(Deng J L. Grey prediction and grey decision[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science Thechnology, 2002: 98-100.)
- [2] Sifeng Liu, Jeffery Forrest. Grey information: Theory and practical applications[M]. London: Springer-Verlag, 2006: 16-18.
- [3] Guo Huan, Xiao Xiping. Intelligent traffic signal dynamic optimization design based on grey theory[J]. The J of Grey System, 2012, 24(2): 107-118.
- [4] 刘思峰, 邓聚龙. GM(1,1)模型的适用范围[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(5): 121-124.
(Liu S F, Deng J L. The range suitable for GM(1,1)[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2000, 20(5): 121-124.)
- [5] Li Xican. On parameters in grey model GM(1, 1)[J]. The J of Grey System, 1998, 10(2): 155-162.
- [6] 王文平, 邓聚龙. 灰色系统中 GM(1,1) 模型的混沌特性研究[J]. 系统工程, 1997, 15(2): 13-15.
(Wang W P, Deng J L. Study of the chaotic characteristics of GM(1,1) model in grey system theory[J]. Systems Engineering, 1997, 15(2): 13-15.)
- [7] Deng Julong. A novel GM(1,1) model for non-equigap series[J]. The J of Grey System, 1997, (2): 111-115.
- [8] 戴文战, 李俊峰. 非等间距 GM(1,1) 模型建模研究[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(9): 89-93.
(Dai W Z, Li J F. Modeling research on non-equidistance GM(1,1) model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2005, 25(9): 89-93.)
- [9] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1, 1) 模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-98.
(Xie N M, Liu S F. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-98.)
- [10] 崔杰, 党耀国, 刘思峰. 一种新的灰色预测模型及其建模机理[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1702-1706.
(Cui J, Dang Y G, Liu S F. Novel grey forecasting model and its modeling mechanism[J]. Control and Decision, 2009, 24(11): 1702-1706.)
- [11] Xiping Xiao, Huan Guo, Shuhua Mao. The modeling mechanism, extension and optimization of grey GM(1,1) model[J]. Applied Mathematical Modeling, 2014, 38(6): 1896-1910.
- [12] 钱吴永, 党耀国, 刘思峰. 含时间幂次项的灰色 GM(1, 1, t^α) 模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(10): 2247-2252.
(Qian W Y, Dang Y G, Liu sifeng. Grey GM(1, 1, t^α) model with time power and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(10): 2247-2252.)
- [13] Liu H, Zhang Qishan, Yao Ligang. Multi-objective particle swarm optimization algorithm based on grey relational analysis with entropy weight[J]. The J of Grey System, 2010, 22(3): 265-274.

(责任编辑: 齐 霖)