

一类离散时间异构多智能体系统的一致平衡点分析

孙一杰^{1a,2}, 张国良^{1a}, 张胜修^{1a}, 曾 静^{1b}

(1. 第二炮兵工程大学 a. 控制工程系, b. 理学院, 西安 710025; 2. 中国人民解放军 96211 部队, 云南 红河 654300)

摘要: 针对包含一阶二阶智能体的异构系统, 提出一种线性一致性协议. 利用图论和矩阵分析方法分析系统获得一致性的充分条件和一致平衡点, 并证明仅网络中的根节点对平衡点起作用. 在此基础上, 分析平衡点的取值范围, 通过参数优化可以使系统收敛到该范围内任意给定的期望值. 最后, 通过仿真分析表明了理论分析的正确性.

关键词: 异构多智能体; 离散时间; 一致性; 平衡点

中图分类号: TP242

文献标志码: A

Consensus equilibrium point analysis for a class of discrete-time heterogeneous multi-agent systems

SUN Yi-jie^{1a,2}, ZHANG Guo-liang^{1a}, ZHANG Sheng-xiu^{1a}, ZENG Jing^{1b}

(1a. Department of Control Engineering, 1b. College of Science, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China; 2. The United 96211, People's Liberation Army, Honghe 654300, China. Correspondent: SUN Yi-jie, E-mail: syjlxh@126.com)

Abstract: A linear consensus protocol for heterogeneous multi-agent systems composed of first-order and second-order agents is proposed. Based on the graph theory and the matrix theory, the sufficient conditions for achieving consensus and consensus equilibrium point are obtained respectively. It is proved that only the initial conditions of the root vertices contribute to the equilibrium point. The convergence interval is deduced. Then, the system can converge to arbitrary expected value in this interval by setting the parameters. Simulation analysis shows the correctness of the proposed theorems.

Keywords: heterogeneous multi-agent systems; discrete-time; consensus; equilibrium point

0 引言

近年来, 群系统的分布式协调控制已成为控制工程、生物学、物理学等学科广泛关注的一个重要问题. 该理论在队形控制、群集、分布式传感器网络等领域应用广泛, 以上许多协同控制任务都可以统一到多智能体系统的信息一致性问题这一理论框架内. 一致性的基本思想是, 每一个智能体基于邻居信息更新自身信息, 以至于所有个体的最终信息收敛到一个共同的值. 到目前为止, 研究人员通过采用图论、矩阵论、频域分析、李亚普诺夫稳定性等方法对一致性问题进行了研究, 获得了许多一阶、二阶和高阶多智能体系统的一致性标准^[1-8].

以上研究结果主要针对同构系统, 网络中所有个体都具有相同的动力学模型和行为, 在工程实际中由于约束不同, 个体间的动力学模型和行为存在差异.

基于以上考虑, 研究者对包含不同模型的异构系统一致性进行了研究. Zheng等^[9]研究了无向拓扑情况下的一阶二阶混合异构多智能体一致性问题, 采用图论和李亚普诺夫稳定性理论分析了系统获得一致性的条件. Tian等^[10]研究了具有未知时延的异构多智能体的高阶一致性问题, 得到了该系统获得高阶一致性的充分必要条件. Yang等^[11]研究了混合阶多智能体系统时延条件下的一致性问题. Yin等^[12]研究了分数阶异构多智能体系统的一致性问题, 分析了系统获得一致性的充分条件. Li等^[13]研究了异构不确定多智能体系统的分布式鲁棒一致性问题. Kim等^[14]研究了随机通信故障条件下, 有领导追随和无领导追随两种情况中异构多智能体系统的一致性问题. Liu等^[15]研究了离散时间有界通信时延的异构多智能体一致性问题.

收稿日期: 2014-06-17; **修回日期:** 2014-09-29.

基金项目: 陕西省自然科学基金项目(2012K06-45).

作者简介: 孙一杰(1986—), 男, 博士生, 从事多智能体协调控制、一致性的研究; 张国良(1970—), 男, 教授, 博士生导师, 从事机器人导航、控制等研究.

对于一阶二阶智能体组成的离散时间异构系统,当前研究都是仅分析出系统获得一致性的条件,没有给出系统的一致平衡点,但在实际中往往需要智能体状态收敛到一个期望值.比如,在传感器网络分布式信息融合中的一致性滤波算法便要求网络中所有节点去跟踪测量信息的平均值^[6],即同构系统中研究较多的平均一致性.但是异构系统由于个体间状态存在差异,难以直接设计控制算法以达到平均一致性.鉴于此,本文采用图论和矩阵分析的方法对离散时间异构多智能体系统的一致性进行研究,分析了系统获得一致性的充分条件和一致平衡点的表达式,证明了仅有网络中的根节点对平衡点起作用.进一步给出了收敛区间,对系统参数进行优化,使系统收敛到该区间内任意给定的期望值.

1 问题描述

1.1 预备知识

令 I_n 为 $n \times n$ 的单位矩阵; $\mathbf{1}_n$ 为所有元素均为1的 n 维列向量; $\mathbf{0}_n$ 为所有元素均为0的 n 维列向量; 非负向量为所有元素都非负的向量; 非负矩阵为所有元素都非负的矩阵; 随机矩阵为行和为1的非负矩阵; SIA 矩阵为满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \mathbf{1}\mathbf{y}^T$ 的一个随机矩阵 P .

设 $G = (V, E, A)$ 为一个加权有向图, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为节点集, 节点索引在有限集 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ 内. $E = V \times V$ 为边集, 集合中元素表示节点间的有向通信连接. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 为加权有向图的邻接矩阵, 且 $a_{ij} \geq 0, i, j \in I$. 如果 $(v_j, v_i) \in E$, 则 $a_{ij} > 0$; 如果 $(v_j, v_i) \notin E$, 则 $a_{ij} = 0$; 且对于所有的 $i \in I, a_{ii} = 0$. 图 G 中的边为有序节点对 (v_j, v_i) , 节点 v_i 和 v_j 分别为终止节点和起始节点, 表示节点 v_i 能够接收到节点 v_j 的信息. 节点 v_i 的邻居集表示为 $N_i = \{v_j | (v_j, v_i) \in E\}$. 两个不同节点 v_i 和 v_j 之间的路径表示为不同边的序列形式. 图拉普拉斯矩阵定义为 $L = D - A = [l_{ij}] \in R^{n \times n}, D = \text{diag}\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}, i = 1, 2, \dots, n\right\}$ 为度矩阵. 有向生成树定义为一个加权有向图 G 中有一个节点称为根节点, 从根节点出发通过一条路径可以到达图中其他任一节点.

本文研究的异构多智能体系统包含 n 个智能体, 前 m ($m < n$) 个为二阶模型, $(n - m)$ 个为一阶模型. 每个二阶个体的邻居集为 $N_i = N_i^s \cup N_i^{sf}$, 表示二阶邻居与一阶邻居的并集. 每个一阶个体的邻居集为 $N_l = N_l^f \cup N_l^{fs}$, 表示一阶邻居与二阶邻居的并集. 系统的拉普拉斯矩阵可以表示为

$$L = \begin{bmatrix} L_s + D_{sf} & -A_{sf} \\ -A_{fs} & L_f + D_{fs} \end{bmatrix}.$$

其中: L_s 为 m 个二阶个体间的拉普拉斯矩阵, $D_{sf} = \text{diag}\left\{\sum_{j \in N_i^{sf}} a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m\right\}$; L_f 为 $(n - m)$ 个一阶个体间的拉普拉斯矩阵, $D_{fs} = \text{diag}\left\{\sum_{j \in N_l^{fs}} a_{lj}, l = m + 1, m + 2, \dots, n\right\}$; A_{sf} 为二阶个体与一阶个体的邻接关系, A_{fs} 为一阶个体与二阶个体的邻接关系.

1.2 离散时间异构多智能体系统

离散时间异构多智能体系统模型描述如下:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + Tv_i(k) + T^2u_i(k)/2; \\ v_i(k+1) = v_i(k) + Tu_i(k), i = 1, 2, \dots, m; \\ x_l(k+1) = x_l(k) + Tu_l(k), \\ l = m + 1, m + 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

其中: x_i, v_i, u_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 分别为二阶智能体的位置、速度和控制输入; x_l, u_l 为一阶智能体的位置和控制输入; $0 < T < T_{\max}$ 为采样时间间隔, 下文分析将给出上界.

对系统(1)采用如下线性一致性协议:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)) - k_1v_i(k), \\ & i = 1, 2, \dots, m; \\ u_l &= k_2 \sum_{j=1}^n a_{lj}(x_j(k) - x_l(k)), \\ & l = m + 1, m + 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $k_1, k_2 > 0$ 为控制参数.

设

$$\mathbf{x}_s = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T, \mathbf{v}_s = [v_1, v_2, \dots, v_m]^T, \\ \mathbf{x}_f = [x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n]^T, \mathbf{y} = [x_s^T, v_s^T, x_f^T]^T.$$

系统初始条件可以表示为

$$\mathbf{y}(0) = [x_s^T(0), v_s^T(0), x_f^T(0)]^T.$$

系统(1)在协议(2)下, 写成矩阵的形式为

$$\mathbf{y}(k+1) = \Gamma\mathbf{y}(k). \quad (3)$$

其中

$$\Gamma = \begin{bmatrix} I_m - \frac{T^2}{2}(L_s + D_{sf}) & TI_m - \frac{T^2}{2}k_1I_m \\ -T(L_s + D_{sf}) & I_m - Tk_1I_m \\ Tk_2A_{fs} & 0 \\ \frac{T^2}{2}A_{sf} & \\ \leftarrow TA_{sf} & \\ I_{n-m} - Tk_2(L_f + D_{fs}) \end{bmatrix}.$$

定义 1 若异构系统(1)在任意初始条件下满足如下条件:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x_j(k)\| = 0, i, j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_i(k) - v_j(k)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

则称系统达到了一致性。

注 1 为方便分析, 假设所有个体状态为标量, 采用 Kronecker 直积工具, 根据相应的性质, 本文结论同样适用于状态为向量的情况。

2 一致性分析

引理 1^[2] 当且仅当随机矩阵相关图包含生成树时, 矩阵特征值 $\lambda = 1$ 的代数重复度为 1, 且对于正对角元随机矩阵的每一个非 1 特征值均有 $|\lambda| < 1$ 。

引理 2^[3] 系统通信拓扑图对应的拉普拉斯矩阵仅有一个 0 特征值的充分必要条件是通信拓扑包含生成树。

引理 3 通信拓扑包含生成树, 且控制参数 k_1 、 k_2 和采样时间间隔 T 满足如下条件:

$$0 < T < \sqrt{\frac{2}{3 \max\{d_i, i = 1, 2, \dots, m\}}},$$

$$\frac{2}{3T} + T \max\{d_i, i = 1, 2, \dots, m\} < k_1 < \frac{4}{3T},$$

$$0 < k_2 < \frac{1}{T \max\{d_l, l = m + 1, m + 2, \dots, n\}},$$

其中 $d_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为拉普拉斯矩阵的对角元素。则矩阵 Γ 仅具有一个 1 特征值, 且非 1 特征值均具有属性 $|\lambda| < 1$ 。

证明 对矩阵 Γ 进行非奇异变换, 有

$$\bar{\Gamma} = Q\Gamma Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{Tk_1}{2}I_m - \frac{T^2}{2}\bar{L}_s & \left(1 - \frac{Tk_1}{2}\right)I_m & & \\ \left(\frac{3Tk_1}{2} - 1\right)I_m - \frac{3T^2}{2}\bar{L}_s & \left(2 - \frac{3Tk_1}{2}\right)I_m & & \\ Tk_2A_{fs} & & 0 & \\ \frac{T^2}{2}A_{sf} & & & \\ \leftarrow \frac{3T^2}{2}A_{sf} & & & \\ I_{n-m} - Tk_2\bar{L}_f & & & \end{bmatrix} \rightarrow$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ I_m & TI_m & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-m} \end{bmatrix},$$

I 为单位矩阵。满足引理 3 的条件有

$$\begin{cases} 1 - \frac{Tk_1}{2} > 0, \quad \frac{Tk_1}{2} - \frac{T^2}{2}d_i > 0, \\ \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ 2 - \frac{3Tk_1}{2} > 0, \quad \frac{3Tk_1}{2} - 1 - \frac{3T^2}{2}d_i > 0, \\ \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ 1 - Tk_2d_l > 0, \quad l = m + 1, m + 2, \dots, n. \end{cases}$$

可以看出, 若满足引理 3 的条件, 则矩阵 $\bar{\Gamma}$ 为非负矩

阵且具有正的对角元, 同样容易验证矩阵的行和均为 1, $\bar{\Gamma}$ 为非负随机矩阵。以矩阵 $\bar{\Gamma}$ 为邻接矩阵包含 $(n + m)$ 个智能体的图表示为 \bar{G} , 则矩阵 $A = I - \bar{\Gamma}$ 为对应的拉普拉斯矩阵。对矩阵 A 作初等行列变换, 有

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3}I_m & 0 & 0 \\ \left(\frac{k_1}{T} - \frac{2}{3T^2}\right)I_m & L_s + D_{sf} & -A_{sf} \\ 0 & -A_{fs} & L_f + D_{fs} \end{bmatrix},$$

则 $\text{rank}(A) = m + \text{rank}(L)$ 。 L 为系统的拉普拉斯矩阵, 因为通信拓扑包含生成树, 所以 $\text{rank}(A) = m + n - 1$, 矩阵 A 仅有一个 0 特征值。根据引理 2 可以得出图 \bar{G} 也包含生成树。由引理 1 可知, 矩阵 $\bar{\Gamma}$ 仅具有一个 1 特征值, 且非 1 特征值都具有属性 $|\lambda| < 1$ 。 Q 为非奇异变换, 则矩阵 Γ 和 $\bar{\Gamma}$ 具有相同的特征值属性。 \square

定理 1 系统 (1) 在协议 (2) 下获得一致性的充分条件是: 1) 通信拓扑包含生成树; 2) 控制参数和采样时间满足引理 3 的条件。

证明 满足条件 1) 和条件 2), 由引理 3 可知矩阵 Γ 仅有一个 1 特征值, 且非 1 特征值均满足 $|\lambda| < 1$ 。矩阵 Γ 的 Jordan 规范型表示为

$$\Gamma = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n+m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times (n+m-1)} \\ 0_{(n+m-1) \times 1} & J' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n+m}^T \end{bmatrix}.$$

其中: $\mathbf{w}_j \in R^{n+m} (j = 1, 2, \dots, m + n)$ 为矩阵 Γ 的右特征向量和广义右特征向量; $\mathbf{e}_j^T \in R^{n+m} (j = 1, 2, \dots, m + n)$ 为矩阵 Γ 的左特征向量和广义左特征向量; J' 为矩阵 Γ 非 1 特征值对应的 Jordan 块。

不失一般性, 选择 $\mathbf{w}_1 = [\mathbf{1}_m^T, \mathbf{0}_m^T, \mathbf{1}_{n-m}^T]^T$ 。可以验证, \mathbf{w}_1 为矩阵 Γ 特征值 1 对应的一个特征向量。根据矩阵 Γ 的特征值属性, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (J')^k = \mathbf{0}_{(n+m-1) \times (n+m-1)}.$$

又因为 $P^{-1}P = I$, 满足

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{w}_1 = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma^k \mathbf{y}(0) = \mathbf{w}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{y}(0),$$

从而有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s(k) \\ \mathbf{v}_s(k) \\ \mathbf{x}_f(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_m \mathbf{e}_1^T \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{0}_m \\ \mathbf{I}_m \mathbf{e}_1^T \mathbf{y}(0) \end{bmatrix},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{y}(0), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_i(k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

分析结果满足定义 1 的要求, 系统 (3) 获得一致性。 \square

定理 2 系统 (3) 满足定理 1 的条件, 系统获得一致性, 且一致平衡点为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \alpha \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0) + \alpha \frac{2 - Tk_1}{2k_1} \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) + \alpha \frac{1}{k_1 k_2} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_i(k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

其中: $\mathbf{c}_1^T \in R^m, \mathbf{c}_2^T \in R^{n-m}, \mathbf{c}^T = [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T] \in R^n$ 为系统拉普拉斯矩阵 L 的特征值 0 相关的一个非负的左特征向量; $\alpha = 1/[\mathbf{c}_1^T \mathbf{1}_m + (1/(k_1 k_2)) \mathbf{c}_2^T \mathbf{1}_{n-m}]$.

证明 根据定理 1 的分析, 选择 $\mathbf{w}_1 = [\mathbf{1}_m^T, \mathbf{0}_m^T, \mathbf{1}_{n-m}^T]^T$, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = \mathbf{e}_1^T \mathbf{y}(0), \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_i(k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

系统最终获得的是静态一致性. 位置信息的一致平衡点为左特征向量 \mathbf{e}_1^T 和初始状态的内积, 且满足 $\mathbf{e}_1^T \mathbf{w}_1 = 1$. 系统的一致平衡点取决于矩阵 Γ 特征值 1 对应的左特征向量, 通信拓扑包含生成树, 矩阵 L 仅有一个 0 特征值, 对应一个非负的左特征向量 $\mathbf{c}^T = [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T] \in R^n$, 使得 $\mathbf{c}^T L = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1^T (L_s + D_{sf}) - \mathbf{c}_2^T A_{fs} &= 0, \\ -\mathbf{c}_1^T A_{sf} + \mathbf{c}_2^T (L_f + D_{fs}) &= 0. \end{aligned}$$

可以验证

$$\mathbf{e}_1^T = \left[\alpha \mathbf{c}_1^T, \alpha \frac{2 - Tk_1}{2k_1} \mathbf{c}_1^T, \alpha \frac{1}{k_1 k_2} \mathbf{c}_2^T \right]$$

为矩阵 Γ 特征值 1 对应的一个左特征向量, 由控制参数和采样时间的取值可知, $Tk_1 < 2$, 则向量 \mathbf{e}_1^T 同样为非负向量, 有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) &= \mathbf{e}_1^T \mathbf{y}(0) = \\ \alpha \left[\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0) + \frac{2 - Tk_1}{2k_1} \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) + \frac{1}{k_1 k_2} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0) \right], \\ i &= 1, 2, \dots, n; \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_i(k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

又因为 $\mathbf{e}_1^T \mathbf{w}_1 = 1$, 有 $\alpha = 1/[\mathbf{c}_1^T \mathbf{1}_m + (1/(k_1 k_2)) \mathbf{c}_2^T \mathbf{1}_{n-m}]$. \square

引理 4^[17] 令 $A \in M_n$ 是具有相同行和 $\mu > 0$ 的非负矩阵, 若其对应的有向图包含生成树, 可以为根节点的顶点构成一个回路, 则矩阵对应于特征值 μ 的左特征向量 $\mathbf{y} \geq 0$, 仅对于回路中顶点的分量为正, 其余为零.

定理 3 异构系统 (1) 在协议 (2) 下获得一致性时仅网络中的根节点对平衡点起作用.

证明 由定理 2 可知, 系统的一致平衡点为二阶个体的速度趋于 0, 所有个体的位置信息收敛于

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) &= \\ \alpha \left[\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0) + \frac{2 - Tk_1}{2k_1} \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) + \frac{1}{k_1 k_2} \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0) \right] &= \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{x}_s(0) + \alpha \frac{2 - Tk_1}{2k_1} \mathbf{v}_s(0) \\ \alpha \frac{1}{k_1 k_2} \mathbf{x}_f(0) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

可以看出, 系统平衡点为二阶个体初始值 $\alpha x_i(0) + \alpha[(2 - Tk_1)/2k_1]v_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 和一阶个体初始值 $\alpha(1/k_1 k_2)x_l(0)$ ($l = m + 1, m + 2, \dots, n$) 的加权和, 每个个体的权值取决于对应左特征分量的值.

定义矩阵 $H = \mu I_n - L, \mu \geq \max\{l_{ii}, i = 1, 2, \dots, n\}$, 矩阵 H 具有引理 4 的矩阵 A 属性. 设 $\mathbf{c}^T \geq 0$ 为矩阵 L 对应于特征值 0 的左特征向量, 可以验证 \mathbf{c}^T 同样为矩阵 H 对应于特征值 μ 的左特征向量. 系统通信拓扑包含生成树, 则矩阵 H 对应的图也包含生成树. 由引理 4 可知, \mathbf{c}^T 仅对于回路中顶点的分量为正, 其余为零.

根据以上分析可知, 异构系统 (1) 仅网络中的根节点对平衡点起作用. \square

3 一致平衡点收敛分析

已得到系统获得一致性的条件和系统的一致平衡点, 当通信拓扑确定即可得出系统的拉普拉斯矩阵, 求解出一个 0 特征值对应的非负左特征向量. 采样时间间隔 T 在范围内取值, 在系统初始状态确定的情况下, 式 (5) 可以表示为以 k_1, k_2 为自变量的二元函数. 令 $\mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_s(0) = a, \mathbf{c}_1^T \mathbf{v}_s(0) = b, \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_f(0) = c, \mathbf{c}_1^T \mathbf{1}_m = C_1, \mathbf{c}_2^T \mathbf{1}_{n-m} = C_2$ 均为常值, 则函数表示为

$$f(k_1, k_2) = \frac{2ak_1 k_2 + (2k_2 - Tk_1 k_2)b + 2c}{2(k_1 k_2 C_1 + C_2)}. \quad (6)$$

函数的定义域为

$$\left\{ k_1, k_2 \left| \frac{2}{3}T + T \max\{d_i, i = 1, 2, \dots, m\} < k_1 < \frac{4}{3}T, \right. \right. \\ \left. \left. 0 < k_2 < \frac{1}{[T \max\{d_l, l = m + 1, m + 2, \dots, n\}]} \right\}.$$

定义域为开区间, 求收敛区间需在闭区间内, 设

$$K_{1 \min} = \frac{2}{3}T + T \max\{d_i, i = 1, 2, \dots, m\} + \delta,$$

$$K_{1 \max} = \frac{4}{3}T - \delta, \quad K_{2 \min} = \delta,$$

$$K_{2 \max} = \frac{1}{[T \max\{d_l, l = m + 1, m + 2, \dots, n\}]} - \delta,$$

δ 为一较小正实数. 因为通信拓扑包含生成树, 且向量 \mathbf{c}^T 为非负向量, 所以函数在区域 $\{k_1, k_2 | K_{1 \min} \leq k_1 \leq K_{1 \max}, K_{2 \min} \leq k_2 \leq K_{2 \max}\}$ 内连续, 且为有界闭区域. 若初等连续函数在有界闭区间内必存在极大、极小值, 则可以求出收敛区间. 可见, 每一个采样时间间隔 T 的取值确定一个一致性平衡点函数, 同时确定一个函数的定义域, 可以求出平衡点的取值范围, 通过参数优化便可以使系统一致平衡点为该范围内任意给定的期望值. 在期望值给定的条件下, 设定合适步长, 通过调整参数 k_1 和 k_2 , 可以使收敛值以一定

精度向期望值逼近. 当二者误差小于一个较小的给定值时, 输出参数 k_1 和 k_2 值, 最后将其反馈到控制协议 (2) 便可使系统收敛到该期望值. 基本流程如图 1 所示.

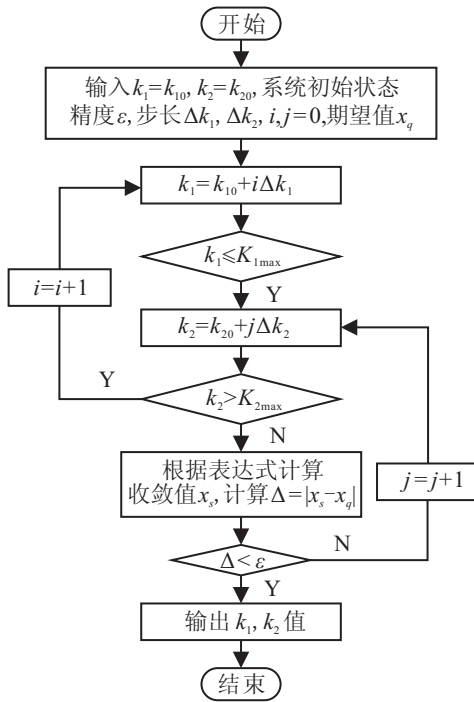


图 1 系统参数优化流程

图 1 实现了对收敛区间的遍历式搜索. 参数搜索的初始值从 $(K_{1\min}, K_{2\min})$ 开始, 参数 ε 至少应选取为期望值精度的十分之一, 以保证系统的搜索精度. 搜索步长 $\Delta k_1, \Delta k_2$ 决定了对收敛值的遍历精度, 因此只要搜索步长选取足够小, 便能以较高的精度实现对收敛区间的遍历, 图 1 的参数优化流程必然会收敛.

4 仿真算例

在理论分析的基础上, 通过仿真实验对所得出的理论结果进行验证.

例 1 考虑由 5 个智能体组成的异构智能体系统, 其中 1、2、3 为二阶, 4、5 为一阶. 通信拓扑包含生成树, 如图 2 所示.

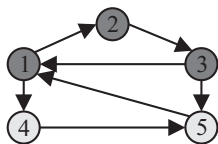


图 2 智能体交互拓扑图

如果 $(e_j, e_i) \in \mathcal{E}$, 则 $a_{ij} = 1, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 图的拉普拉斯矩阵可以表示为

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

根据引理 1, 采样时间间隔 T 的取值范围为 $0 < T < 0.5774$, 取 $T = 0.3$, 则参数的取值范围为

$$2.82 < k_1 < 4.450 < k_2 < 1.67.$$

令 $k_1 = 3, k_2 = 1.2$, 初始状态为

$$\mathbf{x}(0) = [2, 1.6, 1, 1.5, 2.3]^T, \mathbf{v}(0) = [1, 1.5, 2]^T.$$

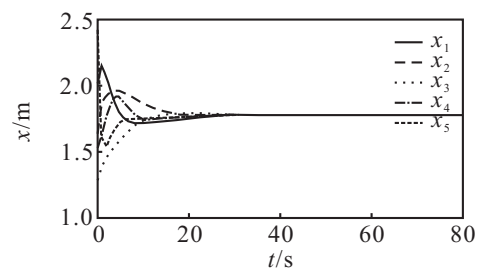
对定理 1 和定理 2 的结论进行验证, 可以计算出拉普拉斯矩阵 0 特征值对应的一个非负的左特征向量为

$$\mathbf{c}^T = [0.4082, 0.6124, 0.6124, 0.2041, 0.2041].$$

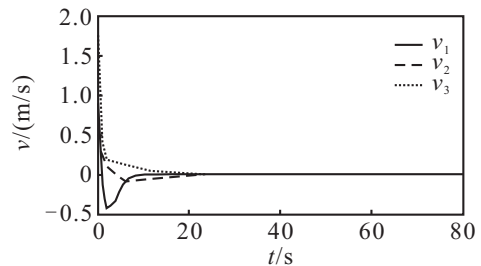
由图 2 可见, 网络中每一个节点均为根节点, 左特征向量对应的每一个分量也为正. 根据式 (4) 计算出系统的一致平衡点的值为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = 1.7769, \lim_{k \rightarrow \infty} v_i(k) = 0,$$

系统仿真结果如图 3 所示.



(a) 智能体位置信息



(b) 二阶智能体速度信息

图 3 智能体的状态信息 (例 1)

由图 3 可见, 满足定理 2 条件的系统可以获得一致性, 且一致平衡点的值与本文得出的结论一致.

例 2 对一致平衡点的优化配置进行仿真验证. 智能体的通信拓扑和初始条件同例 1, 取 $T = 0.2$, 则式 (6) 改写为

$$f(k_1, k_2) = \frac{4.3070k_1k_2 + 5.1032k_2 + 1.6328}{3.266k_1k_2 + 0.8164}.$$

取 $\delta = 0.0002, 3.7335 \leq k_1 \leq 6.6665, 0.0002 \leq k_2 \leq 2.4998$. 在该取值范围内利用 Matlab 优化工具可以求出一致平衡点的收敛区间为 $[1.5597, 1.9992]$, 初始状态平均值为 $\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i(0)/5 = 1.72$, 可见, 该值在系统的收敛区间内. 选取 $\varepsilon = 0.001, \Delta k_1 = \Delta k_2 = 0.0001$, 采用图 1 的优化流程可以求出系统获得平均一致性时的参数取值为 $k_1 = 4.2385, k_2 = 0.5052$. 仿真结果如图 4 所示.

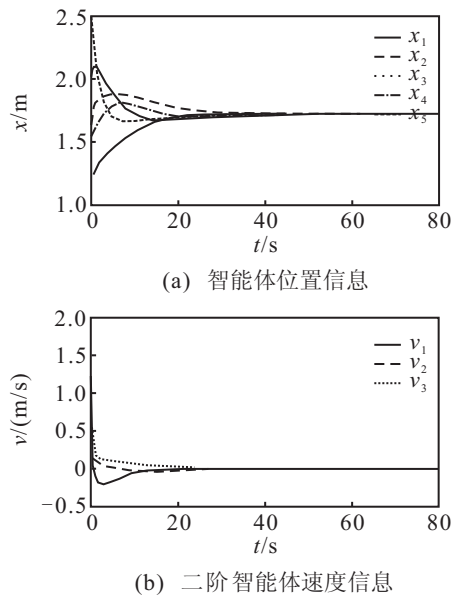


图 4 智能体的状态信息(例 2)

由图 4 可见,在优化出来的参数下,系统获得了平均一致性,仿真结果与理论分析一致。

5 结 论

本文对一阶、二阶智能体组成的异构系统的一致性进行研究,提出了一种线性一致性协议.基于图论和矩阵论分析方法得到了系统获得一致性的充分条件和一致平衡点,证明了仅网络中的根节点对一致平衡点起作用;进一步,对一致平衡点进行分析,确定出系统的收敛区间,通过参数优化可以使系统收敛到该区间内任意给定的期望值;最后通过仿真实例对系统的一致性条件和一致平衡点值进行验证,并通过参数优化实现了该类系统的平均一致性.本文未考虑通信时延的问题,下一步将开展此类研究.

参考文献(References)

- [1] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [2] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [3] Ren W, Beard R W, Main T W. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems[C]. Lecture Notes in Control and Information Sciences. New York: Springer, 2005, 309: 171-188.
- [4] Lou Y C, Hong Y G. Target containment control of multi-agent systems with random switching interconnection topologies[J]. Automatica, 2012, 48(5): 879-885.
- [5] Sun F L, Guan Z H, Zhan X S, et al. Consensus of second-order and high-order discrete-time multi-agent systems with random networks[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13(5): 1979-1990.
- [6] Wen G H, Duan Z S, Yu W W, et al. Consensus of second-order multi-agent systems with delayed nonlinear dynamics and intermittent communications[J]. Int J of Control, 2013, 86(2): 322-331.
- [7] Yang W, Wang X F, Shi H B. Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay[J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(3): 269-276.
- [8] Su Y F, Huang J. Two consensus problems for discrete-time multi-agent systems with switching network topology[J]. Automatica, 2012, 48(9): 1988-1997.
- [9] Zheng Y, Zhu Y, Wang L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems[J]. IET Control Theory and Application, 2011, 5(16): 1881-1888.
- [10] Tian Y P, Zhang Y. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1205-1212.
- [11] Yang H Y, Guo L, Zhu X L, et al. Consensus of compound-order multi-agent systems with communication delays[J]. Central European J of Physics, 2013, 11(6): 806-812.
- [12] Yin X X, Yue D, Hu S L. Consensus of fractional-order heterogeneous multi-agent systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 2(7): 314-322.
- [13] Li Z K, Duan Z S, Lewis F L. Distributed robust consensus of heterogeneous uncertain multi-agent systems[C]. The 32nd Chinese Control Conf. Xi'an: IEEE, 2013: 7150-7155.
- [14] Kim J M, Park J B, Choi Y H. Leaderless and leader-following consensus for heterogeneous multi-agent systems with random link failures[J]. IET Control Theory and Applications, 2014, 8(1): 51-60.
- [15] Liu C L, Liu F. Stationary consensus of heterogeneous multi-agent systems with bounded communication delays[J]. Automatica, 2011, 47(9): 2130-2133.
- [16] Olfati-Saber R, Shamma J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion[C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville: IEEE, 2005, 12: 6697-6703.
- [17] 李俊兵, 严卫生, 房新鹏. 离散时间多智能体系统信息一致性的平衡点[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(4): 513-519.

(Li J B, Yan W S, Fang X P. Equilibrium of consensus problem for discrete-time multi-agent systems[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(4): 513-519.)

(责任编辑: 郑晓蕾)