第 30 卷 第 8 期
Vol. 30 No. 8

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 8 月
Aug. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 08-1434-07 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.1261

指标期望为随机变量情形的多指标决策方法

于 超, 樊治平

(东北大学 工商管理学院，沈阳 110004)

摘 要: 针对指标期望为随机变量情形的多指标决策问题, 提出一种决策分析方法. 该方法首先通过计算指标值相对于指标期望的损益值, 将决策矩阵转化为关于指标期望的损益矩阵; 然后运用随机占优准则, 通过判断针对每个指标两两方案之间的随机占优关系, 进而构建两两方案的随机占优关系矩阵, 并使用 PROMETHEE II 方法对方案进行排序; 最后以某研究所移动硬盘采购问题为例, 对所提出方法的实用性进行说明.

关键词: 多指标决策；指标期望；随机变量；随机占优；方案排序

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Multiple attribute decision making method with attribute aspirations in the form of random variable

YU Chao, *FAN Zhi-ping*

(School of Business Administration，Northeastern University，Shenyang 110004，China．Correspondent：YU Chao, E-mail：yuchao_neu@163.com)

Abstract: A decision analysis method is proposed to solve the multiple attribute decision making problem with attribute aspirations in the form of random variable. Firstly, the decision matrix is transformed into the matrix about gains and losses relative to the attribute aspirations by calculating the gain and loss value of each attribute value relative to the attribute aspiration. Then, the using the stochastic dominance rule, stochastic dominance relations on pairwise comparisons of alternatives for each attribute are judged, and the stochastic dominance relation matrixes on pairwise comparisons of alternatives are constructed. Furthermore, the PROMETHEE II method is used to obtain the ranking of alternatives. Finally, an example for the portable hard disk purchase problem in a research institute is used to illustrate the practicability of the proposed method.

Keywords: multiple attribute decision making；attribute aspiration；random variable；stochastic dominance；alternative ranking

0 引 言

带有指标期望的多指标决策问题是指与多个指标相关且带有指标期望信息的有限方案选择问题, 其在经济管理等领域具有广泛的实际背景[1-3]. 指标期望是指决策者或决策参与者针对指标给出的期望要求或期望水平[3-5], 例如, 某企业拟投资一个新产品开发项目, 针对“项目投资年限”指标, 若企业决策者给出的指标期望是 5 年, 则表示其希望在第 5 年收回投资资金. 在现实中, 存在一类众多决策参与者给出指标期望的多指标决策问题, 在这类决策问题中, 每位决策参与者针对各指标给出自己的期望要求. 针对同一指标而言, 不同的决策参与者会给出不同的指标期望, 来自众多决策参与者的针对同一指标的指标期望通常会呈现分布形式, 在这种情况下, 指标期望可视为随机变量. 例如, 在城市地铁票价定价问题中, 决策机构为了听取广大市民的意见, 会通过多种途径调查, 进而获取市民针对地铁票价的期望价格分布情况. 因此, 针对指标期望为随机变量情形的多指标决策问题的研究是值得关注的, 具有实际意义. 目前, 从已有文献来看, 针对指标期望为随机变量情形的多指标决策问题的研究成果所见甚少, 但可以看到一些相关研究. 文献 [6-7] 提出了一种基于期望水平的交互式决策方法, 该方法通过调整期望水平缩小可行域, 进而获得最优方案. 文献 [8] 提出了一种考虑决策者给出期望

收稿日期: 2014-08-15；**修回日期:** 2014-12-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71271051)；辽宁省高等学校创新团队支持计划项目(WT2013004).

作者简介: 于超(1987−), 女, 博士生, 从事决策理论与方法的研究；樊治平(1961−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与方法等研究.

水平的多指标决策方法, 该方法在帕累托最优方案中选择与决策者期望最接近的方案作为最佳方案. 文献 [9-10] 提出了一种考虑决策者给出期望水平的交互式决策方法, 以解决离散型的随机多指标决策问题, 该方法通过互动的方式调整决策者的期望水平, 进而得到最优方案. 文献 [11] 提出了一种考虑指标具有均衡性期望的多指标决策方法. 文献 [4] 提出了一种基于前景理论的决策分析方法, 以解决决策者给出多种类型期望的多指标决策问题.

已有研究成果对具有指标期望的多指标决策方法的研究作出了显著贡献, 但是, 针对指标期望是随机变量情形的多指标决策方法研究所见甚少. 基于此, 本文着重研究考虑指标期望为随机变量情形的多指标决策方法. 首先, 对指标值和指标期望进行规范化处理; 然后, 计算指标值相对于指标期望的损益值, 进一步运用随机占优准则, 通过判断针对每个指标两两方案比较的随机占优关系, 构建两两方案的随机占优关系矩阵, 并在此基础上, 运用 PROMETHEE II 方法得到方案的排序结果; 最后以某研究所移动硬盘采购问题为例, 对所提出方法的实用性进行说明.

1 问题描述

本文考虑一类指标期望为随机变量情形的多指标决策问题. 在这类决策问题中, 事先考虑多个指标和多个备选方案, 且备选方案针对指标的结果或指标值是已知的, 同时, 众多决策参与者对各指标均会给出自己的期望要求, 针对同一个指标而言, 不同的决策参与者会给出不同的指标期望, 众多决策参与者针对该指标给出的期望要求或期望水平将呈现分布形式 (这里可将指标期望视为随机变量).

下面给出用于描述指标期望为随机变量情形的多指标决策问题中所涉及的集和量: $M=\{1,2,\cdots,m\}$ 为备选方案 (以下简称方案) 的数量集合, m 为方案的总数. $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为指标的数量集合, n 为指标的总数. $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为 m 个备选方案的集合, A_i 为第 i 个备选方案 (以下简称方案), $i\in M$. $C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 为 n 个指标的集合, C_j 为第 j 个指标, $j\in N$, 且 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是加性独立的. $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 为指标的权重向量, w_j 为指标 C_j 的权重或重要性程度, $0\leqslant w_j\leqslant 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$. 通常, 指标权重向量可由决策者直接给出或通过 AHP 等方法确定. $X=[x_{ij}]_{m\times n}$ 为决策矩阵, x_{ij} 为方案 A_i 对应于指标 C_j 的结果或指标值, $i\in M$, $j\in N$. $\tilde{y}=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_n)$ 为指标期望向量, $\tilde{y}_j$ 为针对指标 C_j 的期望, $j\in N$. 这里考虑 $\tilde{y}_j$ 是区间 $[a_j,b_j]$ 上的一个随机变量, 当 $\tilde{y}_j$ 是连续型随机变量时, 其概率密度函数为 $f_{\tilde{y}_j}(y)$, 满足 $f_{\tilde{y}_j}(y)\geqslant 0$ 且 $\int_{a_j}^{b_j}f_{\tilde{y}_j}(y)\mathrm{d}y=1$; 当 $\tilde{y}_j$ 是离散型随机变量时, 其分布律可表示为 $P_{\tilde{y}_j}(\tilde{y}_j)=p_j^r$. 为了方便, 用脉冲函数 $\delta_{\tilde{y}_j}(y)$ 定义其概率密度函数, 即

$$f_{\tilde{y}_j}(y)=\sum_{r=1}^{q}p_j^r\delta_{\tilde{y}_j}(y-y_j^r).$$

其中: y_j^r 为离散值; q 为离散值的个数; p_j^r 为离散值的概率, 满足 $p_j^r\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{r=1}^{q}p_j^r=1$. 通常, 随机变量 $\tilde{y}_j$ 的概率分布情况可由统计数据获得.

本文要解决的问题是, 依据决策信息 A、C、w、X 和 $\tilde{y}$, 如何通过可行的决策分析方法确定最优方案或进行方案排序.

2 原理与方法

为了解决上述指标期望为随机变量情形的多指标决策问题, 本文给出一种决策分析方法. 具体描述如下.

1) 对指标值和指标期望规范化.

为了消除不同量纲对计算结果的影响, 将指标值和指标期望值分别进行规范化处理. 若记 B 为效益型指标的下标集合, C 为成本型指标的下标集合, $N=B\bigcup C$, 则指标值 x_{ij} 的规范化公式为

$$\bar{x}_{ij}=\frac{x_{ij}-x_{ij}^{\min}}{x_{ij}^{\max}-x_{ij}^{\min}},\ i\in M,\ j\in B; \tag{1}$$

$$\bar{x}_{ij}=\frac{x_{ij}^{\max}-x_{ij}}{x_{ij}^{\max}-x_{ij}^{\min}},\ i\in M,\ j\in C. \tag{2}$$

指标期望值 $\tilde{y}_j$ 的规范化公式为

$$\widehat{y}_j=\frac{\tilde{y}_j-x_{ij}^{\min}}{x_{ij}^{\max}-x_{ij}^{\min}},\ j\in B; \tag{3}$$

$$\widehat{y}_j=\frac{x_{ij}^{\max}-\tilde{y}_j}{x_{ij}^{\max}-x_{ij}^{\min}},\ j\in C. \tag{4}$$

其中

$$x_{ij}^{\max}=\max\{b_j,x_{ij}|i\in M\},$$
$$x_{ij}^{\min}=\min\{a_j,x_{ij}|i\in M\}.$$

由式 (1) ~ (4) 可知, $0\leqslant\bar{x}_{ij},\widehat{y}_j\leqslant 1$.

由概率知识可知[12], 规范化处理后得到的 $\widehat{y}_j$ 仍为随机变量, 若记随机变量 $\tilde{y}_j$ 的概率密度函数为 $f_{\tilde{y}_j}(y)$, 则有

$$f_{\widehat{y}_j}(y)=\begin{cases}(x_{ij}^{\max}-x_{ij}^{\min})f_{\tilde{y}_j}(y(x_{ij}^{\max}-x_{ij}^{\min})+x_{ij}^{\min}),\\ \quad 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$i\in M,\ j\in B. \tag{5}$$

$$f_{\widehat{y}_j}(y)=\begin{cases}(x_{ij}^{\max}-x_{ij}^{\min})f_{\tilde{y}_j}(x_{ij}^{\max}-y(x_{ij}^{\max}-x_{ij}^{\min})),\\ \quad 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$
$$i\in M,\ j\in C. \tag{6}$$

2) 计算指标值相对于指标期望的损益值, 构建各方案针对各指标值的损益矩阵.

通常, 指标值与期望值之间的差异可认为是“收益”或“损失”. 当指标值超出期望值时, 认为是收益; 当指标值未达到期望值时, 认为是损失. 记 $\widehat{z}_{ij}$ 为方案 A_i 针对指标 C_j 的指标值 $\bar{x}_{ij}$ 与期望值 $\widehat{y}_j$ 相比的损益值: 当 $\widehat{z}_{ij}>0$ 时, 表示收益; 当 $\widehat{z}_{ij}<0$ 时, 表示损失; 当 $\widehat{z}_{ij}=0$ 时, 表示既无收益, 也无损失. 损益值为

$$\widehat{z}_{ij}=\bar{x}_{ij}-\widehat{y}_j,\ i\in M,\ j\in N. \tag{7}$$

由概率知识可知[12], 损益值 $\widehat{z}_{ij}$ 仍是一个随机变量, 若记随机变量 $\widehat{z}_{ij}$ 的概率密度函数为 $f_{\widehat{z}_{ij}}(z)$, 则有

$$f_{\widehat{z}_{ij}}(z)=\begin{cases}f_{\widehat{y}_j}(\bar{x}_{ij}-z),\ -1\leqslant z\leqslant 1;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$
$$i\in M,\ j\in N. \tag{8}$$

由 $f_{\widehat{z}_{ij}}(z)$ 可得到随机变量 $\widehat{z}_{ij}$ 的数学期望 $u_{\widehat{z}_{ij}}$. 当 $\widehat{z}_{ij}$ 为连续型随机变量时, 其累积分布函数为

$$F_{\widehat{z}_{ij}}(z)=\int_{-\infty}^{z}f_{\widehat{z}_{ij}}(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0,\ z<-1;\\ \displaystyle\int_{-1}^{z}f_{\widehat{z}_{ij}}(t)\mathrm{d}t,\ -1\leqslant z<1;\\ 1,\ z\geqslant 1.\end{cases}$$
$$i\in M,\ j\in N. \tag{9}$$

其数学期望为

$$u_{\widehat{z}_{ij}}=\int_{-1}^{1}zf_{\widehat{z}_{ij}}(z)\mathrm{d}z,\ i\in M,\ j\in N. \tag{10}$$

当 $\widehat{z}_{ij}$ 为离散型随机变量时, 其累积分布函数可以表示为

$$F_{\widehat{z}_{ij}}(z)=\sum_{z_{ij}^r\leqslant z}f_{\widehat{z}_{ij}}(z),\ i\in M,\ j\in N. \tag{11}$$

其数学期望为

$$u_{\widehat{z}_{ij}}=\sum_{r=1}^{q}z_{ij}^r p_j^r=\sum_{r=1}^{q}(\bar{x}_{ij}-y_j^r)p_j^r,$$
$$i\in M,\ j\in N. \tag{12}$$

特别地, 当随机变量 $\widehat{z}_{ij}$ 服从正态分布时, 记 $\widehat{z}_{ij}\sim N(\mu,\sigma^2)$, 此时 $\widehat{z}_{ij}$ 的概率密度函数为

$$f_{\widehat{z}_{ij}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
$$-\infty<z<\infty,\ i\in M,\ j\in N. \tag{13}$$

其累积分布函数可以表示为

$$F_{\widehat{z}_{ij}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{z}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,$$
$$i\in M,\ j\in N. \tag{14}$$

数学期望为 μ.

3) 构建两两方案的随机占优关系矩阵.

由文献 [13] 可知, 两两方案针对某指标取值的优劣关系可通过指标取值对应的分布函数的随机占优关系进行判断. 在考虑指标期望为随机变量情形的多指标决策问题中, 方案针对指标的损益值是一个随机变量, 针对某一指标, 通过判断两两方案损益值对应的分布函数的随机占优关系, 可确定两两方案针对该指标的随机占优关系. 令 $H^j=[h_{is}^j]_{m\times m}$ 表示针对指标 C_j 的两两方案比较的随机占有关系矩阵, 其中 h_{is}^j 为针对指标 C_j 的方案 A_i 与方案 A_s 比较的随机占优关系, 则依据随机占优准则[14], h_{is}^j 可以表示为

$$h_{is}^j=\begin{cases}\mathrm{SD},\ F_{\widehat{z}_{ij}}(z)\ \mathrm{SD}\ F_{\widehat{z}_{sj}}(z);\\ -,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$
$$i,s\in M,\ i\neq s,\ j\in N. \tag{15}$$

其中 $F_{\widehat{z}_{ij}}(z)$ SD $F_{\widehat{z}_{sj}}(z)$ 表示 $F_{\widehat{z}_{ij}}(z)$ 随机占优于 $F_{\widehat{z}_{sj}}(z)$, 即针对指标 C_j 方案 A_i 随机占优于方案 A_s, 记为“$h_{is}^j=\mathrm{SD}$”. 若方案 A_i 与方案 A_s 比较不存在随机占优关系, 则记为“$h_{is}^j=-$”.

PROMETHEE II (preference ranking organization method for enrichment evaluations II) 方法[15-16]是一种建立在级别优先关系上的用于完备序排列的方法, 该方法运用优序度函数描述针对某个指标的有序方案对中两个方案之间的占优程度, 进而通过判断两两方案之间的优劣程度建立两两方案比较的总体优序度矩阵, 并依据总体优序度矩阵, 通过计算每个方案的“出流”、“入流”和排序值, 对所有方案进行排序. 这里, 采用 PROMETHEE II 方法解决本文需要关注的方案排序问题. 基于计算得到的随机占优关系矩阵 $H^j=[h_{is}^j]_{m\times m}$, 依据 PROMETHEE II 方法[15-16]对方案进行排序, 下面给出具体的计算过程.

对于指标 C_j, 任意两个方案 A_i 与 A_s 之间存在以下 3 种关系:

① 方案 A_i 严格占优于方案 A_s. 当方案 A_i 严格占优于方案 A_s 时, $F_{\widehat{z}_{ij}}(z)$ SD $F_{\widehat{z}_{sj}}(z)$ 且 $u_{\widehat{z}_{ij}}\geqslant u_{\widehat{z}_{sj}}+\varepsilon_j$.

② 方案 A_i 弱占优于方案 A_s. 当方案 A_i 弱占优于方案 A_s 时, $F_{\widehat{z}_{ij}}(z)$ SD $F_{\widehat{z}_{sj}}(z)$ 且 $u_{\widehat{z}_{sj}}<u_{\widehat{z}_{ij}}<u_{\widehat{z}_{sj}}+\varepsilon_j$.

③ 方案 A_i 不占优于方案 A_s. 当方案 A_i 不占优于方案 A_s 时, 不存在 $F_{\widehat{z}_{ij}}(z)$ SD $F_{\widehat{z}_{sj}}(z)$.

ε_j 表示关于指标 C_j 的偏好阀值, 与两两方案的期望差值有关, 取针对指标 C_j 两两方案期望差值的平均值为偏好阀值 ε_j[17], 计算公式为

$$\varepsilon_j=\frac{1}{m(m-1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1,\ s\neq i}^{m}d_{is}^{j},\ j\in N,\tag{16}$$

其中 d_{is}^{j} 为针对指标 C_j 两两方案期望的绝对差值, 即

$$d_{is}^{j}=|u_{\widehat{z}_{ij}}-u_{\widehat{z}_{sj}}|,\ i,s\in M,\ i\neq s,\ j\in N.\tag{17}$$

基于两两方案之间的随机占优关系和 ε_j 值, 构造针对指标 C_j 的有序方案对 (A_i,A_s) 的优序度函数为

$$g_j(A_i,A_s)=\begin{cases}1,\ F_{\widehat{z}_{ij}}(z)\ \mathrm{SD}\ F_{\widehat{z}_{sj}}(z),\\ \quad u_{\widehat{z}_{ij}}\geqslant u_{\widehat{z}_{sj}}+\varepsilon_j;\\ \dfrac{u_{\widehat{z}_{ij}}-u_{\widehat{z}_{sj}}}{\varepsilon_j},F_{\widehat{z}_{ij}}(z)\ \mathrm{SD}\ F_{\widehat{z}_{sj}}(z),\\ \quad u_{\widehat{z}_{sj}}<u_{\widehat{z}_{ij}}<u_{\widehat{z}_{sj}}+\varepsilon_j;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$i,s\in M,\ i\neq s,\ j\in N.\tag{18}$$

其中 $g_j(A_i,A_s)\in[0,1]$. $g_j(A_i,A_s)$ 的值越接近 0, 表明方案 A_i 占优于方案 A_s 的程度越小; $g_j(A_i,A_s)=0$, 表明方案 A_i 不占优于方案 A_s; $g_j(A_i,A_s)$ 的值越接近 1, 表明方案 A_i 占优于方案 A_s 的程度越大; $g_j(A_i,A_s)=1$, 表明方案 A_i 严格占优于方案 A_s.

根据简单加权方法, 可建立两两方案比较的总体优序度矩阵

$$G=[g(A_i,A_s)]_{m\times m},$$

其中 $g(A_i,A_s)$ 为有序方案对 (A_i,A_s) 的总体优序度, 其计算公式为

$$g(A_i,A_s)=\sum_{j=1}^{n}w_jg_j(A_i,A_s),$$

$$i,s\in M,\ i\neq s.\tag{19}$$

$g(A_i,A_s)$ 可被视为方案 A_i 优于方案 A_s 的可信度, $g(A_i,A_s)\in[0,1]$, 且 $g(A_i,A_s)$ 越大, 表示方案 A_i 占优于方案 A_s 的程度越大.

4) 依据总体优序度矩阵 G, 令 o_i^+ 和 o_i^- 分别表示方案 A_i 的“出流”和“入流”, 其计算公式分别为

$$o_i^+=\sum_{s=1,\ \neq i}^{m}g(A_i,A_s),\ i\in M;\tag{20}$$

$$o_i^-=\sum_{s=1,\ s\neq i}^{m}g(A_s,A_i),\ i\in M.\tag{21}$$

其中: o_i^+ 为方案 A_i 优于其他所有方案的总可信度, o_i^+ 值越大, 表示方案 A_i 越优; o_i^- 为方案 A_i 劣于其他所有方案的总可信度, o_i^- 值越小, 表示方案 A_i 越优.

由 o_i^+ 和 o_i^- 可计算方案 A_i 的排序值为

$$o_i=o_i^+-o_i^-,\ i\in M.\tag{22}$$

可见, o_i 的值越大, 方案 A_i 越优. 按照计算得到的 o_i 值的大小对所有方案排序, 可得到所有方案的优劣排序结果.

综上, 给出考虑指标期望为随机变量情形的多指标决策方法的具体计算步骤.

Step 1: 利用式 (1) ∼ (4) 对指标值 x_{ij} 和指标期望值 $\tilde{y}_j$ 进行规范化, $i\in M,j\in N$.

Step 2: 利用式 (7) ∼ (14) 计算方案 A_i 针对指标 C_j 的损益值 $\widehat{z}_{ij},i\in M,j\in N$.

Step 3: 运用随机占优准则, 建立随机占优关系矩阵 $H^j=[h_{is}^j]_{m\times m},i,s\in M$ 且 $i\neq s,j\in N$.

Step 4: 利用式 (16) ∼ (22) 计算方案 A_i 的排序值 $o_i,i\in M$.

Step 5: 依据排序值 $o_i\ (i\in M)$ 从大到小进行排序, 得到方案的排序结果或选择最优方案.

3 算例分析

本节通过一个算例表明所提出方法的潜在应用. SA 研究所拟为每位教师配备一个移动硬盘, 以便于学院教师的教学科研工作. 为了降低成本, 学院决定集体采购. 经过对市面上销售的多款移动硬盘进行了解与比较, 学院选定 4 款移动硬盘作为备选方案. A_1: WDBPCK5000ABK; A_2: HDTB107AK3AA; A_3: HX-M101TCB/G; A_4: STBX1000301. 考虑的评价指标有 6 个, C_1: 存储容量 (单位 GB); C_2: 重量 (单位 kg); C_3: 数据传输率 (单位 MB/s); C_4: 价格 (单位元). 指标 C_1 和 C_3 为效益型指标, 指标 C_2 和 C_4 为成本型指标. 决策者给出的指标权重向量为 $w=(0.4,0.1,0.3,0.2)$, 决策矩阵如表 1 所示.

表 1 决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	500	0.21	750	385
A_2	750	0.147	600	399
A_3	1 024	0.151	480	538
A_4	1 024	0.27	150	499

为了使采购的移动硬盘能够最大程度地满足每位老师的要求, 在采购前, 学院通过问卷调查的方式征求了 130 位教师的购买意愿. 事先对每个指标设定了标度, 即 4 个指标的标度集合分别为

$$D_1=\{500,750,1\,000\},$$

$$D_2=\{0.1,0.15,0.2,0.25,0.3\},$$

$$D_3=\{100,300,500,700\},$$

$$D_4=\{300,400,500,600\}.$$

表 2 通过问卷调查统计分析得到的每个指标的期望分布情况

	C_1			C_2					C_3				C_4			
	指标 1	指标 2	指标 3	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 5	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4	指标 1	指标 2	指标 3	指标 4
标度	500	750	1 000	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	100	300	500	700	300	400	500	600
人数	24	39	67	33	66	23	7	1	9	31	63	27	41	47	29	13
百分比/%	18	30	52	25	51	18	5	1	7	24	48	21	32	36	22	10

让每位教师按照预先设定的标度给出自己的指标期望值, 进而通过统计分析得到针对每个指标的期望分布情况, 如表 2 所示.

由统计结果可知, 各指标期望是离散型随机变量, 下面分别给出各指标期望对应的分布律和累积分布函数. $\tilde{y}_1$ 的分布律和累积分布函数分别为

$$P_{\tilde{y}_1}(\tilde{y}_1)=\begin{cases}0.18,\ \tilde{y}_1=500;\\0.3,\ \tilde{y}_1=750;\\0.52,\ \tilde{y}_1=1\,000;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$F_{\tilde{y}_1}(\tilde{y}_1)=\begin{cases}0,\ \tilde{y}_1<500;\\0.18,\ 500\leqslant\tilde{y}_1<750;\\0.48,\ 750\leqslant\tilde{y}_1<1\,000;\\1,\ \tilde{y}_1\geqslant 1\,000.\end{cases}$$

$\tilde{y}_2$ 的分布律和累积分布函数分别为

$$P_{\tilde{y}_2}(\tilde{y}_2)=\begin{cases}0.25,\ \tilde{y}_2=0.1;\\0.51,\ \tilde{y}_2=0.15;\\0.18,\ \tilde{y}_2=0.2;\\0.05,\ \tilde{y}_2=0.25;\\0.01,\ \tilde{y}_2=0.3;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$F_{\tilde{y}_2}(\tilde{y}_2)=\begin{cases}0,\ \tilde{y}_2<0.1;\\0.25,\ 0.1\leqslant\tilde{y}_2<0.15;\\0.76,\ 0.15\leqslant\tilde{y}_2<0.2;\\0.94,\ 0.2\leqslant\tilde{y}_2<0.25;\\0.99,\ 0.25\leqslant\tilde{y}_2<0.3;\\1,\ \tilde{y}_2\geqslant 0.3.\end{cases}$$

$\tilde{y}_3$ 的分布律和累积分布函数分别为

$$P_{\tilde{y}_3}(\tilde{y}_3)=\begin{cases}0.07,\ \tilde{y}_3=100;\\0.24,\ \tilde{y}_3=300;\\0.48,\ \tilde{y}_3=500;\\0.21,\ \tilde{y}_3=700;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$F_{\tilde{y}_3}(\tilde{y}_3)=\begin{cases}0,\ \tilde{y}_3<100;\\0.07,\ 100\leqslant\tilde{y}_3<300;\\0.31,\ 300\leqslant\tilde{y}_3<500;\\0.79,\ 500\leqslant\tilde{y}_3<700;\\1,\ \tilde{y}_3\geqslant 700.\end{cases}$$

$\tilde{y}_4$ 的分布律和累积分布函数分别为

$$P_{\tilde{y}_4}(\tilde{y}_4)=\begin{cases}0.32,\ \tilde{y}_4=300;\\0.36,\ \tilde{y}_4=400;\\0.22,\ \tilde{y}_4=500;\\0.1,\ \tilde{y}_4=600;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$F_{\tilde{y}_4}(\tilde{y}_4)=\begin{cases}0,\ \tilde{y}_4<300;\\0.32,\ 300\leqslant\tilde{y}_4<400;\\0.68,\ 400\leqslant\tilde{y}_4<500;\\0.9,\ 500\leqslant\tilde{y}_4<600;\\1,\ \tilde{y}_4\geqslant 600.\end{cases}$$

由式 (1) 和 (2) 对决策矩阵进行规范化, 计算结果如表 3 所示.

表 3 规范化的决策矩阵

A_i	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	0	0.45	1	0.72
A_2	0.48	0.77	0.77	0.67
A_3	1	0.75	0.58	0.21
A_4	1	0.15	0.08	0.34

根据式 (3) 和 (4), 对指标期望值进行规范化处理后, 各指标期望的分布律和累积分布函数如下:

$$P_{\widehat{y}_1}(\widehat{y}_1)=\begin{cases}0.18,\ \widehat{y}_1=0;\\0.3,\ \widehat{y}_1=0.48;\\0.52,\ \widehat{y}_1=0.95;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$F_{\widehat{y}_1}(\widehat{y}_1)=\begin{cases}0,\ \widehat{y}_1<0;\\0.18,\ 0\leqslant\widehat{y}_1<0.48;\\0.48,\ 0.48\leqslant\widehat{y}_1<0.95;\\1,\ \widehat{y}_1\geqslant 0.95.\end{cases}$$

$$P_{\widehat{y}_2}(\widehat{y}_2)=\begin{cases}0.01,\ \widehat{y}_2=0;\\0.05,\ \widehat{y}_2=0.25;\\0.18,\ \widehat{y}_2=0.5;\\0.51,\ \widehat{y}_2=0.75;\\0.25,\ \widehat{y}_2=1;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$F_{\widehat{y}_2}(\widehat{y}_2)=\begin{cases}0,\ \widehat{y}_2<0;\\0.01,\ 0\leqslant\widehat{y}_2<0.25;\\0.06,\ 0.25\leqslant\widehat{y}_2<0.5;\\0.24,\ 0.5\leqslant\widehat{y}_2<0.75;\\0.75,\ 0.75\leqslant\widehat{y}_2<1;\\1,\ \widehat{y}_2\geqslant1.\end{cases}$$

$$P_{\widehat{y}_3}(\widehat{y}_3)=\begin{cases}0.07,\ \widehat{y}_3=0;\\0.24,\ \widehat{y}_3=0.31;\\0.48,\ \widehat{y}_3=0.62;\\0.21,\ \widehat{y}_3=0.92;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$F_{\widehat{y}_3}(\widehat{y}_3)=\begin{cases}0,\ \widehat{y}_3<0;\\0.07,\ 0\leqslant\widehat{y}_3<0.31;\\0.31,\ 0.31\leqslant\widehat{y}_3<0.62;\\0.79,\ 0.62\leqslant\widehat{y}_3<0.92;\\1,\ \widehat{y}_3\geqslant0.92.\end{cases}$$

$$P_{\widehat{y}_4}(\widehat{y}_4)=\begin{cases}0.1,\ \widehat{y}_4=0;\\0.22,\ \widehat{y}_4=0.33;\\0.36,\ \widehat{y}_4=0.67;\\0.32,\ \widehat{y}_4=1;\\0,\ \text{otherwise}.\end{cases}$$

$$F_{\widehat{y}_4}(\widehat{y}_4)=\begin{cases}0,\ \widehat{y}_4<0;\\0.1,\ 0\leqslant\widehat{y}_4<0.33;\\0.32,\ 0.33\leqslant\widehat{y}_4<0.67;\\0.68,\ 0.67\leqslant\widehat{y}_4<1;\\1,\ \widehat{y}_4\geqslant1.\end{cases}$$

由式(7)～(12), 可得到不同方案针对各指标损益值的分布律和累积分布函数. 例如, 损益值 $\widehat{z}_{11}$ 的分布律和累积分布函数分别为

$$P_{\widehat{z}_{11}}(\widehat{z}_{11})=\begin{cases}0.52,\ \widehat{z}_{11}=-0.95;\\0.3,\ \widehat{z}_{11}=-0.48;\\0.18,\ \widehat{z}_{11}=0;\\0,\ \text{otherwise}\end{cases}$$

$$F_{\widehat{z}_{11}}(\widehat{z}_{11})=\begin{cases}0,\ \widehat{z}_{11}<-0.95;\\052,\ -0.95\leqslant\widehat{z}_{11}<-0.48;\\0.82,\ -0.48\leqslant\widehat{z}_{11}<0;\\1,\ \widehat{z}_{11}\geqslant0.\end{cases}$$

限于篇幅, 其余部分不再详细列出.

根据随机占优准则, 可针对各指标建立两两方案比较的随机占优关系矩阵, 即

$$h_{is}^1=\begin{bmatrix}-&-&-&-\\\text{SD}&-&-&-\\\text{SD}&\text{SD}&-&-\\\text{SD}&\text{SD}&-&-\end{bmatrix},$$

$$h_{is}^2=\begin{bmatrix}-&-&-&\text{SD}\\\text{SD}&-&\text{SD}&\text{SD}\\\text{SD}&-&-&\text{SD}\\-&-&-&-\end{bmatrix},$$

$$h_{is}^3=\begin{bmatrix}-&\text{SD}&\text{SD}&\text{SD}\\-&-&\text{SD}&\text{SD}\\-&-&-&\text{SD}\\-&-&-&-\end{bmatrix},$$

$$h_{is}^4=\begin{bmatrix}-&\text{SD}&\text{SD}&\text{SD}\\-&-&\text{SD}&\text{SD}\\-&-&-&-\\-&-&\text{SD}&-\end{bmatrix}.$$

由式(16)和(17)计算得到各指标的偏好阀值分别为 ε_1=0.59, ε_2=0.36, ε_3=0.49, ε_4=0.31. 由式(18)和(19)计算得到总体优序度矩阵为

$$G=\begin{bmatrix}-&0.173&0.458&0.583\\0.409&-&0.323&0.6\\0.483&0.36&-&0.4\\0.4&0.36&0.084&-\end{bmatrix}.$$

由总体优序度矩阵 G, 利用式(20)～(22)计算各方案的“出流”、“入流”和排序值, 结果如表 4 所示. 根据得到的每个方案排序值 o_i, 可得到方案的排序结果为 $A_2\succ A_3\succ A_1\succ A_4$, 即方案 A_2 是最优方案.

表 4　各方案的 o_i^+、o_i^- 和 o_i 计算结果

	A_1	A_2	A_3	A_4
o_i^+	1.214	1.332	1.243	0.844
o_i^-	1.292	0.893	0.865	1.583
o_i	−0.078	0.439	0.378	−0.739

4　结　论

本文给出了一种考虑指标期望为随机变量情形的多指标决策方法, 该方法通过计算指标值相对于指标期望的损益值, 将决策矩阵转化为相对于指标期望的损益矩阵, 然后根据随机占优准则构建针对每个

指标的两两方案之间的随机占优关系矩阵. 在此基础上, 运用 PROMETHEE II 方法确定方案的排序结果. 与已有相关方法相比, 本文着重考虑了指标期望是随机变量的情形, 给出的方法具有概念清晰、计算简单等特点. 本文给出的方法不仅丰富了具有指标期望的多指标决策方法的研究, 而且为解决现实中指标期望为随机变量情形的多指标决策问题提供了一种新的途径, 具有较好的实际应用价值.

参考文献(References)

[1] Prato T. Multiple attribute decision analysis for ecosystem management[J]. Ecological Economics, 1999, 30(2): 207-222.

[2] Besharati B, Azarm S, Kannan P K. A decision support system for product design selection: A generalized purchase modeling approach[J]. Decision Support Systems, 2006, 42(1): 333-350.

[3] 徐皓, 樊治平, 刘洋, 等. 一种考虑指标期望的产品设计方案选择方法[J]. 工业工程与管理, 2010, 15(1): 32-36.
(Xu H, Fan Z P, Liu Y, et al. A method for selecting product design alternatives considering index expectation[J]. Industrial Engineering and Management, 2010, 15(1): 32-36.)

[4] Fan Z P, Zhang X, Chen F D, et al. Multiple attribute decision making considering aspiration-levels: A method based on prospect theory[J]. Computers & Industrial Engineering, 2013, 65(2): 341-350.

[5] Feng B, Lai F. Multi-attribute group decision making with aspirations: A case study[J]. Omega, 2014, 44(2): 136-147.

[6] Lotfi V, Stewart T J, Zionts S. An aspiration-level interactive model for multiple criteria decision making[J]. Computers & Operation Research, 1992, 19(7): 671-681.

[7] Wang J, Zionts S. The aspiration level interactive method(AIM) reconsidered: Robustness of solutions[J]. European J of Operational Research, 2006, 175(2): 948-958.

[8] Yun Y B, Nakayama H, Arakawa M. Multiple criteria decision making with generalized DEA and an aspiration level method[J]. European J of Operational Research, 2004, 158(3): 697-706.

[9] Nowak M. INSDECM-An interactive procedure for stochastic multicriteria decision problems[J]. European J of Operational Research, 2006, 175(3): 1413-1430.

[10] Nowak M. Aspiration level approach in stochastic MCDM problems[J]. European J of Operational Research, 2007, 177(3): 1626-1640.

[11] 姜艳萍, 樊治平, 丛飞. 指标具有均衡性期望的多指标决策方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(6): 746-751.
(Jiang Y P, Fan Z P, Cong F. Method for MADM with equilibrium aspiration on attributes[J]. J of Systems Engineering, 2011, 26(6): 746-751.)

[12] Dekking F M, Kraaikamp C K, Lopuhaa H P, et al. A Modern Introduction to Probability and Statistics[M]. London: Springer, 2005: 103-106.

[13] 樊治平, 姜广田, 张尧, 等. 一种基于随机占优的多种信息形式的MADM方法[J]. 运筹与管理, 2010, 19(1): 37-42.
(Fan Z P, Jiang G T, Zhang Y, et al. An approach to MADM with multiple formats of information based on stochastic dominance[J]. Operations Research and Management Science, 2010, 19(1): 37-42.)

[14] Levy H. Stochastic dominance: Investment decision making under uncertainty second edition[M]. New York : Springer, 2006.

[15] Vincke J P, Brans P. A preference ranking organization method: The PROMETHEE method for MCDM[J]. Management Science, 1985, 31(6): 641-656.

[16] Brans J P, Mareschal B. Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys[M]. New York: Springer, 2005: 171-174.

[17] 张晓, 樊治平. 一种基于前景随机占优准则的随机多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1875-1879.
(Zhang X, Fan Z P. Method for stochastic multiple attribute decision making based on prospect stochastic dominance rule[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1875-1879.)

(责任编辑：郑晓蕾)