文章编号: 1001-0920 (2015) 08-1365-07 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.0795

三角模糊数型不确定多指标决策的可能度关系法

黄智力, 罗 键
(厦门大学 信息科学与技术学院，福建 厦门 361005)

摘 要: 针对指标权重未知的三角模糊数型不确定多指标决策问题, 提出 4 种新的三角模糊数比较可能度的等价定义, 并得到一些优良性质关系. 借鉴合作博弈中极大极小算法, 提出一种基于三角模糊数比较可能度关系的指标权重确定方法; 集结所有决策方案比较的可能度, 并对决策方案集进行最优判定和排序, 即可得到三角模糊数型不确定多指标决策的比较可能度关系法. 最后通过算例表明所提出算法的可行性和有效性.

关键词: 不确定多指标决策；三角模糊数；可能度关系；指标权重
中图分类号: TP182 **文献标志码:** A

Possibility degree relation method for triangular fuzzy number-based uncertain multi-attribute decision making

HUANG Zhi-li, *LUO Jian*
(School of Information Science and Technology，Xiamen University，Xiamen 361005，China．Correspondent: HUANG Zhi-li，E-mail：zhili_huang@hotmail.com)

Abstract: In view of the unsure attribute weights problem of triangular fuzzy number-based uncertain multi-attribute decision making, four new equivalent definitions of triangular fuzzy numbers comparison possibility degree are proposed, and some good nature results are obtained. Learning the idea of min-max algorithm rules in the cooperative game theory, a method of determining the attribute weight based on the possibility degree of triangular fuzzy number comparison relation is proposed. Then the overall measured values of comparison possibility degree of the various alternatives are utilized to determine the best and sort the decision-making alternatives set, and an algorithm of comparison possibility degree relation for triangular fuzzy number-based uncertain multiple attribute decision making is presented. Finally, a numerical example illustrates the feasibility and effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: uncertain multi-attribute decision making；triangular fuzzy number；possibility degree relation；attribute weight

0 引 言

不确定多指标决策 (UMADM) 广泛存在于经济、工程和社会领域, 如供应商选择[1]、物流网络经济[2]、质量与效益评估[3]、人才考核评价[4]、工程项目投资[5]、军事决策等多个学科领域, 是现代决策科学、管理科学的重要组成部分. 但由于人类经验知识的局限性和主观认知的模糊性, 人们认识事物特别是在发展变化中的事物常常具有不确定性, 往往不能明确地给出指标评价测定的信息量. 在实际决策中, 许多决策信息具有不确定性和模糊性, 导致决策者对指标评价很难用一个精确的数值描述出来. 在这种情况下, 人们提出了用区间数表示 UMADM 问题的指标值信息, 并且发现当区间数的宽度过大时, 区间内取值概率不均等, 指标值常常偏好于区间内某个数, 具有偏好信息, 容易导致决策误差[6]. 鉴于此, Van 等[7]提出了利用三角模糊数表示模糊比较判断的方法, 这与构成元素为精确数值的比较判断[8-9]相比, 前者更符合外部环境的不确定性和人们内部思维的模糊性, 能够更客观、更确切地反映所研究的问题[10].

人们在对事物进行方案优劣判定过程中为了实现更优决策, 寻找科学简便合理的排序算法来提高科学决策效率显得非常重要. 目前, 针对三角模糊数型 UMADM 问题在排序理论与方法等方面已取得了一些进展, 如灰色关联分析方法[2]、最小偏差法[11]、特

收稿日期: 2014-05-20；**修回日期:** 2014-08-13.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60975052)；福建省重大科技项目(2011H6027).
作者简介: 黄智力(1983−), 男, 博士生, 从事管理与决策支持系统理论与技术的研究；罗键(1954−), 男, 教授, 博士生导师, 从事自动化智能信息系统、系统建模、优化与决策等研究.

征向量法[12]、粗糙集法[13]、VIKOR 法[3]、优势关系法[14]、可能度法[4,10,15]等. 虽然上述文献给出的方法实用简单, 但对于指标权重未知的情形以及如何确定没有给出详细的方法, 仅利用各自的排序方法分别进行方案的优劣判定, 得到的往往是缺乏指标权重信息的排序, 所得结果在缺乏客观环境信息下也不一定是合理的. 文献 [5] 对指标权重的确定采用离差最大化赋权算法, 其对各指标赋权的规则是: 从易于决策方案排序和择优的角度考虑, 方案偏差越大的指标赋予越大的权重, 方案偏差越小的指标赋予越小的权重, 使得所有决策方案的指标值差异进一步扩大, 而不去考虑决策指标本身的重要性程度. 鉴于三角模糊数的特殊意义, 本文针对指标值为三角模糊数的 UMADM 问题, 从可能度[4,10]的角度, 提出一种新的基于三角模糊数比较可能度关系的指标赋权规则: 当所有方案在同一指标测定下合成的总指标值越大时, 表明该指标对方案择优所起重要性程度的影响成分增多, 应重点考虑, 相应的指标赋予较大的决策权重. 当所有方案在同一指标测定下合成的总指标值越小时, 表明该指标对方案择优所起重要性程度的影响成分减少, 相应的指标赋予较小的决策权重. 由于决策方案间比较的可能度值数据大的指标往往是影响最优方案选择差异的主要条件, 是造成方案排序和择优发生变化的根源所在, 让方案指标值在最佳赋权信息下集结而成的反映每个决策方案属性特征的综合指标值差异放大, 最终更利于最优方案的选取与排序.

本文借鉴离差最大化[5]赋权算法的有关思想和三角模糊数比较可能度理论, 针对指标值为三角模糊数的 UMADM 问题, 提出了基于三角模糊数比较可能度关系的指标权重度量, 并给出了对决策方案集进行优劣判定和排序的三角模糊数型 UMADM 的比较可能度关系法. 最后通过算例表明了所提出算法的可行性和有效性.

1 三角模糊数比较可能度关系理论

1.1 三角模糊数的可能度

定义 1 若 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $0<x^L\leqslant x^M\leqslant x^U$, 则称 $\tilde{x}$ 为一个三角模糊数[4,10,16]. 其中: x^L 和 x^U 分别为 $\tilde{x}$ 所支撑的下界和上界, 称为三角模糊数 $\tilde{x}$ 的小元和大元; x^M 为 $\tilde{x}$ 的中值 (表示信息偏好值, 即区间内取值概率最大的数), 称为三角模糊数 $\tilde{x}$ 的特元. 若三角模糊数 $\tilde{x}$ 满足 $0<x^L\leqslant x^M\leqslant x^U<1$, 则称 $\tilde{x}$ 为一个规范三角模糊数.

注 1 特元 x^M 在三角模糊数区间里取值的概率最大, 由 x^M 向上界的大元 x^U 或向下界的小元 x^L 取值的概率均递减.

为方便起见, 给出有关三角模糊数的运算法则如下所示:

设 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$, 有:

法则 1) $\tilde{x}+\tilde{y}=[x^L+y^L,x^M+y^M,x^U+y^U]$;

法则 2) $\dfrac{1}{\tilde{x}}=\Big[\dfrac{1}{x^U},\dfrac{1}{x^M},\dfrac{1}{x^L}\Big]$, $x^L,x^M,x^U\neq 0$;

法则 3) $k\tilde{x}=[kx^L,kx^M,kx^U]$, $k\geqslant 0$;

法则 4) $\tilde{x}\times\tilde{y}=[x^Ly^L,x^My^M,x^Uy^U]$.

定义 2 设三角模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$, 如果范数

$$\|\tilde{x}-\tilde{y}\|=|x^L-y^L|+|x^M-y^M|+|x^U-y^U|, \quad (1)$$

则称 $d(\tilde{x},\tilde{y})=\|\tilde{x}-\tilde{y}\|$ 为三角模糊数 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的相离度[5]. 显然, $d(\tilde{x},\tilde{y})$ 越大, $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 相离的程度越大. 特别地, 当 $d(\tilde{x},\tilde{y})=0$ 时, $\tilde{x}=\tilde{y}$, 即 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 相等.

定义 3 设三角模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$, $l_{\tilde{x}}^{(1)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(1)}$ 分别为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的上半取值长度, $l_{\tilde{x}}^{(2)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(2)}$ 分别为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的下半取值长度, 记 $l_{\tilde{x}}^{(1)}=x^U-x^M$, $l_{\tilde{y}}^{(1)}=y^U-y^M$, $l_{\tilde{x}}^{(2)}=x^M-x^L$, $l_{\tilde{y}}^{(2)}=y^M-y^L$, 则称

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\lambda\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},\max(x^M-y^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+(1-\lambda)\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)},\max(x^U-y^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}} \quad (2)$$

为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的可能度[4,10], $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x}\underset{p}{\geqslant}\tilde{y}$. 类似地, 称

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=\lambda\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+(1-\lambda)\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)},\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}} \quad (3)$$

为 $\tilde{y}\geqslant\tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y}\underset{p}{\geqslant}\tilde{x}$.

注 2 λ 值的选择取决于决策者的风险态度: 当 $\lambda>0.5$ 时, 称决策者是属于风险偏好型的; 当 $\lambda=0.5$ 时, 称决策者是属于风险中立型的; 当 $\lambda<0.5$ 时, 称决策者是属于风险规避型的. 特别地, 当 $\lambda=1$ 时, 称 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$ 为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的悲观可能度; 当 $\lambda=0$ 时, 称 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$ 为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的乐观可能度[4,10].

定义 4 设三角模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$, $l_{\tilde{x}}^{(1)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(1)}$ 分别为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的上半取值长度, $l_{\tilde{x}}^{(2)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(2)}$ 分别为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的下半取值长度, 记 $l_{\tilde{x}}^{(1)}=x^U-x^M$, $l_{\tilde{y}}^{(1)}=y^U-y^M$, $l_{\tilde{x}}^{(2)}=x^M-x^L$, $l_{\tilde{y}}^{(2)}=y^M-y^L$, 则称

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$

$$\lambda \min\left\{\max\left(\frac{x^M-y^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},0\right),1\right\}+$$
$$(1-\lambda)\min\left\{\max\left(\frac{x^U-y^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right),1\right\} \tag{4}$$

为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的可能度, $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x}\underset{p}{\geqslant}\tilde{y}$. 类似地, 称

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=$$
$$\lambda \min\left\{\max\left(\frac{y^M-x^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\right),1\right\}+$$
$$(1-\lambda)\min\left\{\max\left(\frac{y^U-x^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right),1\right\} \tag{5}$$

为 $\tilde{y}\geqslant\tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y}\underset{p}{\geqslant}\tilde{x}$.

定义 5　设三角模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$, $l_{\tilde{x}}^{(1)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(1)}$ 分别为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的上半取值长度, $l_{\tilde{x}}^{(2)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(2)}$ 分别为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的下半取值长度, 记 $l_{\tilde{x}}^{(1)}=x^U-x^M$, $l_{\tilde{y}}^{(1)}=y^U-y^M$, $l_{\tilde{x}}^{(2)}=x^M-x^L$, $l_{\tilde{y}}^{(2)}=y^M-y^L$, 则称

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}} \tag{6}$$

为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的可能度, $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x}\underset{p}{\geqslant}\tilde{y}$. 类似地, 称

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\max(x^M-y^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\max(x^U-y^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}} \tag{7}$$

为 $\tilde{y}\geqslant\tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y}\underset{p}{\geqslant}\tilde{x}$.

定义 6　设三角模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$, $l_{\tilde{x}}^{(1)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(1)}$ 分别为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的上半取值长度, $l_{\tilde{x}}^{(2)}$ 和 $l_{\tilde{y}}^{(2)}$ 分别为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的下半取值长度, 记 $l_{\tilde{x}}^{(1)}=x^U-x^M$, $l_{\tilde{y}}^{(1)}=y^U-y^M$, $l_{\tilde{x}}^{(2)}=x^M-x^L$, $l_{\tilde{y}}^{(2)}=y^M-y^L$, 则称

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$
$$\lambda\max\left\{1-\max\left(\frac{y^M-x^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\right),0\right\}+$$
$$(1-\lambda)\max\left\{1-\max\left(\frac{y^U-x^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right),0\right\} \tag{8}$$

为 $\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$ 的可能度, $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{x}\underset{p}{\geqslant}\tilde{y}$. 类似地, 称

$$p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=$$
$$\lambda\max\left\{1-\max\left(\frac{x^M-y^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\right),0\right\}+$$
$$(1-\lambda)\max\left\{1-\max\left(\frac{x^U-y^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right),0\right\} \tag{9}$$

为 $\tilde{y}\geqslant\tilde{x}$ 的可能度, $\tilde{x}$、$\tilde{y}$ 的次序关系为 $\tilde{y}\underset{p}{\geqslant}\tilde{x}$.

1.2　三角模糊数比较可能度关系

根据上述 4 种三角模糊数比较的可能度定义, 可以证明下列结论均成立[4].

定理 1　设三角模糊数 $\tilde{x}=[x^L,x^M,x^U]$, $\tilde{y}=[y^L,y^M,y^U]$, 则:

1) $0\leqslant p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\leqslant 1$, $0\leqslant p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})\leqslant 1$;

2) $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=1$ 当且仅当 $y^U\leqslant x^L$, 类似地, $p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=1$ 当且仅当 $x^U\leqslant y^L$;

3) $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=0$ 当且仅当 $x^U\leqslant y^L$, 类似地, $p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=0$ 当且仅当 $y^U\leqslant x^L$;

4) (互补性) $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})+p(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=1$, 特别地, $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{x})=0.5$;

5) 当 $\lambda=1$ 时, $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\geqslant 0.5$ 当且仅当 $x^L+x^M\geqslant y^L+y^M$, 特别地, $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=0.5$ 当且仅当 $x^L+x^M=y^L+y^M$;

6) 当 $\lambda=0$ 时, $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\geqslant 0.5$ 当且仅当 $x^M+x^U\geqslant y^M+y^U$, 特别地, $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=0.5$ 当且仅当 $x^M+x^U=y^M+y^U$;

7) (传递性) 对于 3 个三角模糊数 $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$, 若 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\geqslant 0.5$ 且 $p(\tilde{y}\geqslant\tilde{z})\geqslant 0.5$, 则 $p(\tilde{x}\geqslant\tilde{z})\geqslant 0.5$.

根据三角模糊数比较的可能度定义可知定理 1 成立, 证明过程略.

下面研究定义 3 ∼ 定义 6 之间的关系.

定理 2　定义 3、定义 4、定义 5 和定义 6 互为等价关系, 即式 (2) ⇔ 式 (4) ⇔ 式 (6) ⇔ 式 (8) 或者式 (3) ⇔ 式 (5) ⇔ 式 (7) ⇔ 式 (9).

证明　首先证式 (2) ⇔ 式 (4). 由式 (2) 可得

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$
$$\lambda\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},\max(x^M-y^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)},\max(x^U-y^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$
$$\lambda\min\left\{1,\max\left(\frac{x^M-y^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\right)\right\}+$$
$$(1-\lambda)\min\left\{1,\max\left(\frac{x^U-y^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\right)\right\},$$

即

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$

$$\lambda\min\Big\{\max\Big(\frac{x^M-y^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},0}\Big),1\Big\}+$$
$$(1-\lambda)\min\Big\{\max\Big(\frac{x^U-y^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\Big),1\Big\},$$

因此式 (2) $\Leftrightarrow$ 式 (4) 成立. 由式 (4)、式 (2) $\Leftrightarrow$ 式 (4) 和定理 1 可能度的互补性, 可得

$$P(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=1-p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$
$$1-\lambda\min\Big\{\max\Big(\frac{x^M-y^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\Big),1\Big\}-$$
$$(1-\lambda)\min\Big\{\max\Big(\frac{x^U-y^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\Big),1\Big\}=$$
$$\lambda+(1-\lambda)-\lambda\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)},\max(x^M-y^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}-$$
$$(1-\lambda)\frac{\min\{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)},\max(x^U-y^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\max(x^M-y^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\max(x^U-y^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},$$

即

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},$$

因此式 (4) $\Leftrightarrow$ 式 (6) 成立. 由式 (6) 可得

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$
$$\lambda\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}-\max(y^M-x^L,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}}+$$
$$(1-\lambda)\frac{\max\{0,l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}-\max(y^U-x^M,0)\}}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}}=$$
$$\lambda\max\Big\{0,1-\max\Big(\frac{y^M-x^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\Big)\Big\}+$$
$$(1-\lambda)\max\Big\{0,1-\max\Big(\frac{y^U-x^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\Big)\Big\},$$

即

$$p(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=$$
$$\lambda\max\Big\{1-\max\Big(\frac{y^M-x^L}{l_{\tilde{x}}^{(2)}+l_{\tilde{y}}^{(2)}},0\Big),0\Big\}+$$
$$(1-\lambda)\max\Big\{1-\max\Big(\frac{y^U-x^M}{l_{\tilde{x}}^{(1)}+l_{\tilde{y}}^{(1)}},0\Big),0\Big\},$$

因此式 (6) $\Leftrightarrow$ 式 (8) 成立.

同理可证式 (3) $\Leftrightarrow$ 式 (5) $\Leftrightarrow$ 式 (7) $\Leftrightarrow$ 式 (9). □

2 基于三角模糊数比较可能度关系的指标权重确定

借鉴博弈论合作博弈的相关理论[15]: 在求解三角模糊数型 UMADM 问题过程中, 不管指标本身的重要性程度如何, 只关心方案指标值大小信息. 若最终所有方案指标值求和而合成的总指标值越大, 则相应地对指标权重的赋值应越大; 反之, 若最终所有方案指标值求和而合成的总指标值越小, 则相应地对指标权重的赋值应越小. 这样处理的目的是, 让所有决策方案的指标值在最优赋权信息下集结完成后, 每个方案的综合指标值可以实现数据值增大和最优化, 更利于对方案进行排序和择优, 即任何一个决策方案与其他决策方案比较的可能度也实现了增大和最优化. 因为在决策过程中, 每个决策方案都希望是被选中的一方, 所以, 在消除指标值数据间的不可公度性和矛盾性后, 本文从有利于测定决策方案间优劣的角度考虑, 结合三角模糊数比较的可能度理论, 提出利用指标值为三角模糊数的比较可能度关系确定指标权重[15], 然后集结所有决策方案的指标值信息得到综合指标值, 利用三角模糊数比较的可能度关系对决策方案集 $\{X_i\}(i\in N)$ 进行优劣排序.

假设对于某三角模糊数型 UMADM 问题, 将决策方案 X_i 按指标 u_j 测定得到 X_i 关于 u_j 的指标值 $\tilde{x}_{ij}$ (这里 $\tilde{x}_{ij}=[x_{ij}^L,x_{ij}^M,x_{ij}^U]$), 从而构成初始三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{X}=(\tilde{x}_{ij})_{n\times m}$. 常见的评价指标类型有评价值越大越好的效益型指标和评价值越小越好的成本型指标[5,16], 设 $I_j(j=1,2)$ 分别为效益型、成本型的下标集, 且令 $M=\{1,2,\cdots,m\}$, $N=\{1,2,\cdots,n\}$. 为了统一不同指标值数据间的不可公度性和矛盾性, 利用下列公式将初始三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{X}$ 转化为规范化三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$[5,16]: 对于效益型指标, 有

$$\tilde{r}_{ij}=\tilde{x}_{ij}/\|\tilde{x}_j\|,\ i\in N,j\in I_1;\tag{10}$$

对于成本型指标, 有

$$\tilde{r}_{ij}=(1/\tilde{x}_{ij})/\|(1/\tilde{x}_j)\|,\ i\in N,j\in I_2.\tag{11}$$

其中: $\tilde{r}_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^M,r_{ij}^U]$ 为规范化三角模糊数, $\|\cdot\|$ 为向量的范数, $\|\tilde{x}_j\|=\sum\limits_{i=1}^n\tilde{x}_{ij}$, $\|(1/\tilde{x}_j)\|=\sum\limits_{i=1}^n(1/\tilde{x}_{ij})$. 根据三角模糊数的运算法则, 将式 (10) 和 (11) 改写为

$$\begin{cases}r_{ij}^L=x_{ij}^L\Big/\sum\limits_{i=1}^n x_{ij}^U,\\ r_{ij}^M=x_{ij}^M\Big/\sum\limits_{i=1}^n x_{ij}^M,\quad i\in N,j\in I_1;\\ r_{ij}^U=x_{ij}^U\Big/\sum\limits_{i=1}^n x_{ij}^L,\end{cases}\tag{12}$$

$$\begin{cases} r_{ij}^L = (1/x_{ij}^U)\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}(1/x_{ij}^L), \\ r_{ij}^M = (1/x_{ij}^M)\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}(1/x_{ij}^M), \quad i \in N, j \in I_2. \\ r_{ij}^U = (1/x_{ij}^L)\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}(1/x_{ij}^U), \end{cases} \tag{13}$$

各指标比较的可能度关系如下: 称

$$p(u_j \succ u_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p(\tilde{r}_{iu_j} \geqslant \tilde{r}_{iu_k}) \tag{14}$$

为指标 u_j 优于指标 u_k 的比较可能度测定值, 由其构成的矩阵

$$P_{m\times m} = p(u_j \succ u_k)_{m\times m} \tag{15}$$

为决策指标相互比较的可能度测定关系矩阵. 称

$$w_{u_j} = \frac{\sum\limits_{k\neq j}^{m} p(u_j \succ u_k)}{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k\neq j}^{m} p(u_j \succ u_k)}, \ j,k \in M \tag{16}$$

为指标 u_j 在所有决策方案的指标值比较的可能度测定信息集结后规范化的综合比较可能度测定值. 根据上述分析, 可定义式 (16) 为指标 u_j 的赋权公式. 因此, 基于三角模糊数比较可能度测定关系确定的指标权重向量为 $\boldsymbol{W} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$, 满足 $0 \leqslant w_j \leqslant 1$, $\sum\limits_{j=1}^{m} w_j = 1, j \in M$, 其中

$$w_j = \frac{\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m} p(u_j \succ u_k)}{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m} p(u_j \succ u_k)}, \ j,k \in M. \tag{17}$$

3　三角模糊数型不确定多指标决策的可能度关系法步骤和算例

三角模糊数型 UMADM 的可能度关系法步骤如下.

Step 1: 为了统一不同指标值数据间的不可公度性和矛盾性, 避免对方案决策产生影响, 可将初始三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{X}$ 按式 (12) 和 (13) 转化为规范化三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$, 其中 $\tilde{r}_{ij} = [r_{ij}^L, r_{ij}^M, r_{ij}^U]$ 为规范化三角模糊数.

Step 2: 根据式 (2)、(3) 或 (4)、(5) 或 (6)、(7) 或 (8)、(9), 对在规范化三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ 中反映各方案属性特征的不同指标值数据间的比较可能度进行测定, 测定后按式 (14) 进行集结, 求出各决策指标权重的比较可能度测定值, 以此构造出决策指标相互比较的可能度测定关系矩阵 (15), 然后按式 (17) 计算指标权重向量 $\boldsymbol{W}$.

Step 3: 根据 Step 1 中求得的规范化三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ 和 Step 2 中求得的指标权重向量 $\boldsymbol{W}$, 构造加权规范化三角模糊数型决策矩阵

$$\tilde{R}(\boldsymbol{W}) = (\tilde{r}_{ij}\cdot w_j)_{n\times m}. \tag{18}$$

计算各个决策方案 $X_i (i \in N)$ 的加权综合指标值

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{W}) = \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{r}_{ij}. \tag{19}$$

利用式(2)、(3) 或 (4)、(5) 或 (6)、(7) 或 (8)、(9), 对各决策方案的加权综合指标值进行两两比较的可能度测定如下: 称

$$p(X_i \succ X_k) = p(\tilde{z}_i(\boldsymbol{W}) \geqslant \tilde{z}_k(\boldsymbol{W})) \tag{20}$$

为决策方案 X_i 优于决策方案 X_k 的比较可能度测定值; 称利用式 (20) 构成的矩阵

$$P_{n\times n} = p(X_i \succ X_k)_{n\times n} \tag{21}$$

为决策方案相互比较的可能度测定关系矩阵; 称

$$\mu(X_i^{\succ}) = \frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i}^{n} p(X_i \succ X_k), \ i,k \in N \tag{22}$$

为决策方案 X_i 在所有决策方案的加权综合指标值比较的可能度测定信息集结后的总体比较可能度测定值.

Step 4: 根据式 (19) ∼ (22) 求出决策方案 X_i 在所有决策方案的加权综合指标值比较的可能度测定信息集结后的总体比较可能度测定值 $\mu(X_i^{\succ}), i = 1, 2, \cdots, n$.

Step 5: 根据总体比较可能度测定值 $\mu(X_i^{\succ})$, 按从大到小的顺序对决策方案集 $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 进行优劣排序.

算例 1　干部考核选拔问题.

采用文献 [17] 中的干部考核选拔问题案例进行分析. 假定经过统计处理后确定了 5 名候选人 $X_i (i = 1, 2, \cdots, 5)$, 每个候选人在各指标 (属性) 下的属性值以三角模糊数形式给出, 具体的直观数量化指标值如表 1 所示[17].

Step 1: 由于各项指标均为效益型指标, 为了统一不同指标值数据间的不可公度性和矛盾性, 运用式 (12) 和 (13), 将表 1 指标值数据建立的三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{X}$ 转化为规范化三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$, 规范化后的决策信息如表 2 所示.

Step 2: 根据式 (2)、(3) 或 (4)、(5) 或 (6)、(7) 或 (8)、(9), 对表 2 中的不同指标值数据间的比较可能度进行测定. 为了便于对决策方案进行优劣排序, 不妨取 $\lambda = 0.5$, 即决策者是属于风险中立型的. 测定后代入式 (14), 计算出各决策指标权重的比较可能度测定值, 并按式 (15) 构造出决策指标相互比较的可能度测定关系矩阵 $P_{m\times m}$ 如下:

表 1 初始值观测数量化矩阵[17]

候选人	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
X_1	$[0.80, 0.85, 0.90]$	$[0.90, 0.92, 0.95]$	$[0.91, 0.94, 0.95]$	$[0.93, 0.96, 0.99]$	$[0.90, 0.91, 0.92]$	$[0.95, 0.97, 0.99]$
X_2	$[0.90, 0.95, 1.00]$	$[0.89, 0.90, 0.93]$	$[0.90, 0.92, 0.95]$	$[0.90, 0.92, 0.95]$	$[0.94, 0.97, 0.98]$	$[0.90, 0.93, 0.95]$
X_3	$[0.88, 0.91, 0.95]$	$[0.84, 0.86, 0.90]$	$[0.91, 0.94, 0.97]$	$[0.91, 0.94, 0.96]$	$[0.86, 0.89, 0.92]$	$[0.91, 0.92, 0.94]$
X_4	$[0.85, 0.87, 0.90]$	$[0.91, 0.93, 0.95]$	$[0.85, 0.88, 0.90]$	$[0.86, 0.89, 0.93]$	$[0.87, 0.90, 0.94]$	$[0.92, 0.93, 0.96]$
X_5	$[0.86, 0.89, 0.95]$	$[0.90, 0.92, 0.95]$	$[0.90, 0.95, 0.97]$	$[0.91, 0.93, 0.95]$	$[0.90, 0.92, 0.96]$	$[0.85, 0.87, 0.90]$

表 2 规范化决策矩阵 $(\times 10^{-1})$

候选人	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
X_1	$[1.702, 1.902, 2.098]$	$[1.923, 2.031, 2.140]$	$[1.920, 2.030, 2.125]$	$[1.946, 2.069, 2.195]$	$[1.907, 1.983, 2.058]$	$[2.004, 2.100, 2.185]$
X_2	$[1.915, 2.125, 2.331]$	$[1.902, 1.987, 2.095]$	$[1.899, 1.987, 2.125]$	$[1.883, 1.983, 2.106]$	$[1.992, 2.113, 2.192]$	$[1.899, 2.013, 2.097]$
X_3	$[1.872, 2.036, 2.214]$	$[1.795, 1.898, 2.027]$	$[1.920, 2.030, 2.170]$	$[1.904, 2.026, 2.129]$	$[1.822, 1.939, 2.058]$	$[1.920, 1.991, 2.075]$
X_4	$[1.809, 1.946, 2.098]$	$[1.944, 2.053, 2.140]$	$[1.793, 1.901, 2.013]$	$[1.799, 1.918, 2.062]$	$[1.843, 1.961, 2.103]$	$[1.941, 2.013, 2.119]$
X_5	$[1.830, 1.991, 2.214]$	$[1.923, 2.031, 2.140]$	$[1.899, 2.052, 2.170]$	$[1.904, 2.004, 2.106]$	$[1.907, 2.004, 2.148]$	$[1.793, 1.883, 1.987]$

$$P_{6\times 6}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.488 & 0.513 & 0.516 & 0.505 & 0.518\\ 0.512 & 0.5 & 0.488 & 0.493 & 0.508 & 0.465\\ 0.487 & 0.512 & 0.5 & 0.501 & 0.504 & 0.462\\ 0.484 & 0.507 & 0.499 & 0.5 & 0.510 & 0.507\\ 0.495 & 0.492 & 0.496 & 0.490 & 0.5 & 0.481\\ 0.482 & 0.535 & 0.538 & 0.493 & 0.519 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

按式 (17) 求得指标权重向量

$$\boldsymbol{w}=(0.169, 0.165, 0.164, 0.167, 0.164, 0.171)^{\mathrm{T}}.$$

Step 3: 根据 Step 1 中求得的规范化三角模糊数型决策矩阵 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ 和 Step 2 中求得的指标权重向量 $\boldsymbol{w}$, 按式 (19) 计算出各个决策方案 $X_i(i=1,2,\cdots,5)$ 的加权综合指标值为

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{w})=[1.900, 2.019, 2.134]\times 10^{-1},$$
$$\tilde{z}_2(\boldsymbol{w})=[1.915, 2.035, 2.158]\times 10^{-1},$$
$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{w})=[1.873, 1.987, 2.113]\times 10^{-1},$$
$$\tilde{z}_4(\boldsymbol{w})=[1.855, 1.966, 2.090]\times 10^{-1},$$
$$\tilde{z}_5(\boldsymbol{w})=[1.875, 1.994, 2.127]\times 10^{-1}.$$

利用式 (20) 求出各决策方案加权综合指标值进行两两比较的可能度测定值, 为了便于对决策方案进行优劣排序, 取 $\lambda=0.5$, 即决策者是属于风险中立型的. 按式 (21) 构造出决策方案相互比较的可能度测定关系矩阵如下:

$$P_{5\times 5}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4268 & 0.6191 & 0.7104 & 0.5861\\ 0.5732 & 0.5 & 0.6889 & 0.7792 & 0.6550\\ 0.3809 & 0.3111 & 0.5 & 0.5886 & 0.4704\\ 0.2896 & 0.2208 & 0.4114 & 0.5 & 0.3836\\ 0.4139 & 0.3450 & 0.5296 & 0.6164 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Step 4: 利用式 (22) 求出决策方案 X_i 在所有决策方案的加权综合指标值比较的可能度测定信息集结后的总体比较可能度测定值

$\mu(X_1^{\succ})=0.5856,\ \mu(X_2^{\succ})=0.6741,\ \mu(X_3^{\succ})=0.4377,$ $\mu(X_4^{\succ})=0.3264,\ \mu(X_5^{\succ})=0.4762.$

Step 5: 根据 $\mu(X_i^{\succ})$ 值, 按从大到小的顺序对决策方案集 $\{X_i\}\ (i=1,2,\cdots,5)$ 进行优劣排序, 得到

$$X_2 \underset{0.5732}{\succ} X_1 \underset{0.5861}{\succ} X_5 \underset{0.5296}{\succ} X_3 \underset{0.5886}{\succ} X_4.$$

显然, X_2 为最优决策方案.

为了便于比较, 采用基于离差最大化赋权的多指标决策算法[5], 其赋权公式如下:

$$w_j=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} d(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{kj})}{\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} d(\tilde{r}_{ij},\tilde{r}_{kj})},\ i\in N, j\in M.$$

按 UMADM 问题中离差最大化算法的具体步骤[5]对上述算例的各个候选人进行求解并排序为

$$X_2 \underset{0.5150}{\succ} X_1 \underset{0.5078}{\succ} X_5 \underset{0.5098}{\succ} X_3 \underset{0.6120}{\succ} X_4.$$

所以, 最优候选人为 X_2.

通过上述干部考核选拔案例结果分析可知, 采用本文给出的三角模糊数比较可能度关系赋权算法和文献 [5] 中的离差最大化赋权算法对指标权重具有不同的度量值, 但是两者都可以求得各相邻决策方案间两两比较可能度测定值大小的确切数据, 而且对最优方案的判定和排序结果都是一样的. 因此, 在判别备选决策方案的优劣时, 可以直接采用本文给出的三角模糊数型 UMADM 的可能度关系法, 求得各决策方案在所有决策方案的加权综合指标值比较的可能度测定信息集结后的总体比较可能度测定值 $\mu(X_i^{\succ})$ 对决策方案的优劣进行判定, 该算法计算简洁, 高效实用.

4 结 论

基于三角模糊数比较可能度关系的指标权重度量是本文研究的重点内容之一, 其基本思想是在消除指标值数据间的不可公度性和矛盾性后, 集结所有备选方案在同一指标测定下的评价值而合成的总指标评价值越大, 表明数据浮动大的指标对方案优劣判定的影响越大, 相应的对指标权重的度量值便要考虑

增大; 反之, 总指标评价值越小, 表明数据浮动小的指标对方案优劣判定的影响越小, 相应的对指标权重的度量值便要考虑减小. 本文采用上述三角模糊数比较可能度关系赋权思想和三角模糊数比较可能度关系理论知识, 从另一角度考虑研究三角模糊数型UMADM问题, 提出了4种新的三角模糊数比较可能度的等价定义和优良性质关系, 改进和完善了文献[5,10]给出的可能度定义和算法, 以此给出对决策方案集进行最优判定和排序的基于三角模糊数比较可能度的关系算法. 一般情况下, 采用可能度比较互补判断矩阵的排序算法通常需要$n(n-1)$次的运算量, 而本文提出的排序算法至多需要进行n次比较可能度运算. 通过上述案例验证了所提出算法对决策方案优劣的判定和排序不但合理有效, 而且计算简洁.

参考文献(References)

[1] Wang Y M, Luo Y. Area ranking of fuzzy numbers based on positive and negative ideal points[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 58(9): 1769-1779.

[2] Wei G W. Grey relational analysis method for 2-tuple linguistic multiple attribute group decision making with incomplete weight information[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(5): 4824-4828.

[3] Ju Y B, Wang A H. Extension of VIKOR method for multi-criteria group decision making problem with linguistic information[J]. Applied Mathematical Modeling, 2013, 37(5): 3112-3125.

[4] 徐泽水. 对方案有偏好的三角模糊数型多属性决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2002, 24(8): 9-12.
(Xu Z S. Study on method for triangular fuzzy number-based multi-attribute decision making with preference information on alternatives[J]. Systems Engineering and Electronics, 2002, 24(8): 9-12.)

[5] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 105-131.
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making methods and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 105-131.)

[6] 胡启洲, 张卫华, 于莉. 三参数区间数研究及其在决策分析中的应用[J]. 中国工程科学, 2007, 9(3): 47-51.
(Hu Q Z, Zhang W H, Yu L. The research and application of Interval numbers of three parameters[J]. Engineering Science, 2007, 9(3): 47-51.)

[7] Van Laarhoven P J M, Pedrycz W. A fuzzy extension of satty's priority theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 11(1): 229-241.

[8] Herrera-viedma E, Herrera F, Chiclana F, et al. Some issues on consistency of fuzzy preference relations[J]. European J of Operational Research, 2004, 154(1): 98-109.

[9] Wang Y M, Celik Parkan. Multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives: Ranking and weighting[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 153(3): 331-346.

[10] 和媛媛, 周德群, 王强. 基于可能度的三角模糊数互补判断矩阵排序方法[J]. 运筹与管理, 2009, 18(1): 65-68.
(He Y Y, Zhou D Q, Wang Q. Study on priority method for triangular fuzzy number complementary judgment matrix based on possibility degree[J]. Operational Research and Management Science, 2009, 18(1): 65-68.)

[11] Xu Z S, Da Q L. A least deviation method for priorities of fuzzy preference matrix[J]. European J of Operational Research, 2005, 164(1): 206-216.

[12] Saaty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980: 11-41.

[13] 刘学生, 吴伟, 邹开其. 区间数排序的粗糙集法[J]. 大连理工大学学报, 2008, 48(1): 143-146.
(Liu X S, Wu W, Zou K Q. Rough sets ranking methodology for interval numbers[J]. J of Dalian University of Technology, 2008, 48(1): 143-146.)

[14] 李金鹏, 岳超源, 李武. 一类基于优势关系的不完全信息多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 229-234.
(Li J P, Yue C Y, Li W. A dominance relation-based decision making approach for multi-attribute decision making problems with incomplete information[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 229-234.)

[15] 刘健, 薛利, 刘思峰, 等. 基于优势关系的多属性决策问题研究[J]. 控制与决策, 2010, 25(7): 1079-1087.
(Liu J, Xue L, Liu S F, et al. Research on multiple-attribute decision making problems based on the superiority index[J]. Control and Decision, 2010, 25(7): 1079-1087.)

[16] 黄智力, 罗键. 基于群体理想解的三角模糊数群体多属性决策[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 2011, 50(5): 817-822.
(Huang Z L, Luo J. Method for triangular fuzzy number multi-attribute group decision-making based on group's ideal solution[J]. J of Xiamen University: Natural Science, 2011, 50(5): 817-822.)

[17] 许叶军, 达庆利. 基于理想点的三角模糊数多指标决策法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(9): 1469-1471.
(Xu Y J, Da Q L. Method for triangular fuzzy number multiple attribute decision making based on ideal solution[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(9): 1469-1471.)

(责任编辑：郑晓蕾)