概率论与随机过程

Probability and Random Process

奥运百年
小概率事件
终于发生

短道高栏中国第一

刘翔领先不是一点点

自我感光

2006. 9. 4

李昌兴　属虎相　已知天命之年

任教授　教概率　耕耘二十余载

上大班　遇考试　从无全体通过

是何故　细思量　原来概率太难

对学子　严加爱　本人身体力行

真期望　众后生　出于蓝胜于蓝

人生与品牌

老大徒伤悲

20岁——奔腾
30岁——日立
40岁——方正
50岁——微软
60岁——松下
70岁——联想

少壮不努力

概率论与随机事件

主讲教师：李昌兴

联系电话：**88166087，85383773**

辅导教师：

联系电话：

工作单位：应用数理系工程数学教研室

电子信件:

shuxueshiyanshi@163. com

辅导时间：待定

第一讲　　样本空间与随机事件

- 绪论
- 随机试验
- 样本空间与随机事件

一、绪论

随机现象？

统计规律？

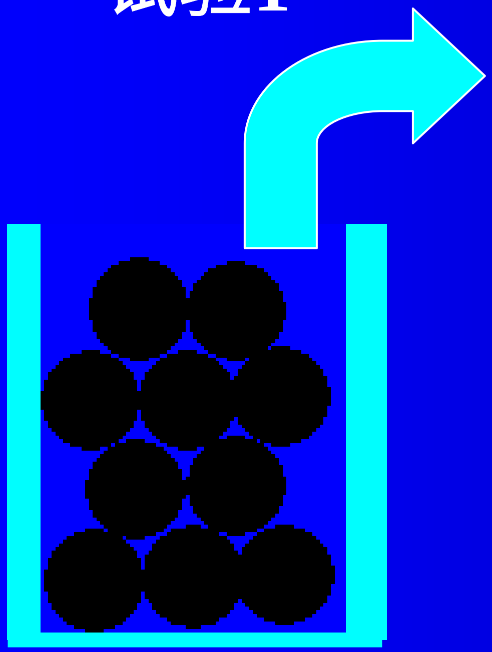
概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门学科

试验1 在一个盒子中装有10大小相同的黑色小球，搅匀后先从中任取一个小球，观察所取小球的颜色.

试验2 在一个盒子中装有10大小相同的小球，其中5个是红色的，5个是黑色的，搅匀后从中任取一个小球，观察所取小球的颜色.

试验3 在一个盒子中装有10大小相同的小球，其中10个小球上依次涂上1/11，2/11，...10/11的红色，其余部分涂成黑色，搅匀后从中任取一个小球，观察所取小球的颜色.

试验1

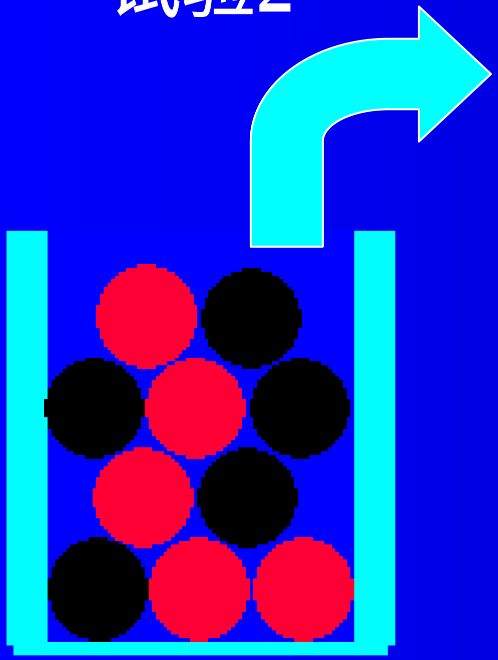


1．从中任取一个小球观察其颜色以后，再放回，第二次从中在任期一个小球，那么第一次所取小球与第二次所取小球的条件相同．即在相同的条件下，试验可以重复进行.

2. 从中任取一个小球,其颜色都是黑色，即在取出之前已经可以知道所取小球的颜色为黑色．换句话说：从试验的已知条件可以推知试验的结果．而且结果只能是一个．也就是试验的结果是唯一的，而且是明确的.

3. 每次从中任取一球，其颜色始终是黑色. 即每次试验只能出现这个结果.

试验2

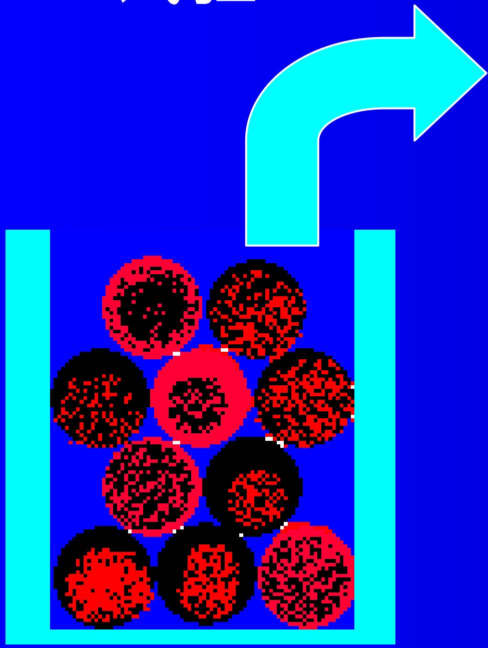


1．从中任取一个小球观察其颜色以后，再放回，第二次从中在任期一个小球，那么第一次所取小球与第二次所取小球的条件相同．即在相同的条件下，试验可以重复进行．

2．从中任取一个小球,其颜色可能是黑色，也可能是红色，即在取出之前不可能知道所取小球的颜色是黑色，还是红色．换句话说：从试验的已知条件推不出试验的结果．即试验结果不唯一，但其结果只能是红色或黑色．也就是试验的结果是明确的，但结果不至一个．

3．每次从中任取一球，其颜色是黑色或红色．即每次试验只能出现这些的结果中的一个．

试验3

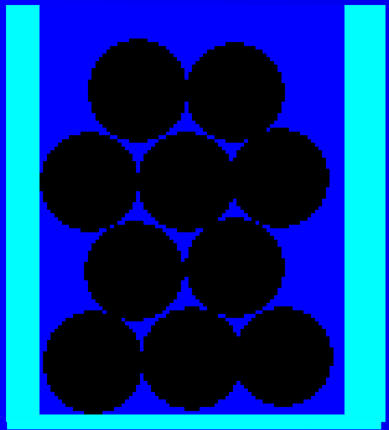


1．从中任取一个小球观察其颜色以后，再放回，第二次从中在任期一个小球，那么第一次所取小球与第二次所取小球的条件相同．即在相同的条件下，试验可以重复进行．

2．从中任取一个小球,其颜色既不可能是黑色，也不可能是红色，即在取出之前不可能知道所取小球的颜色是什么颜色．换句话说：从试验的已知条件推不出试验的结果．即试验结果不唯一，且其试验的结果是不明确的，且结果不唯一．

3．每次从中任取一球，其颜色既不是黑色，也不是红色．即每次试验只能出现这些的结果中的一个．

试验1

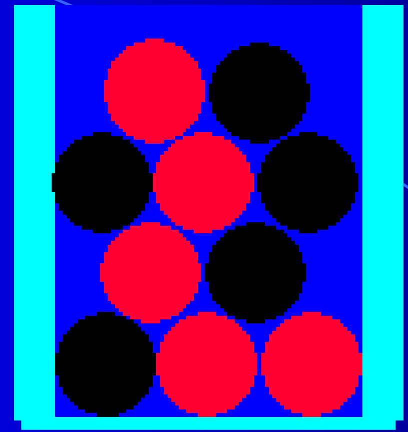


1．在相同条件下可以重复进行．

2．试验的结果是明确的，而且是唯一的．

3．每次试验只能出现这个结果．

试验2

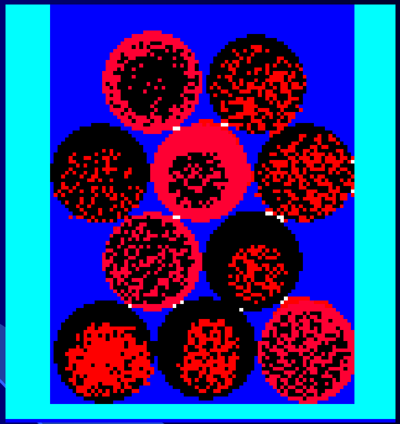


1．在相同条件下可以重复进行．

2．每次试验的可能结果不至一个，并且能事先能明确试验的所有可能的结果．

3．每次试验只能出现这些结果中的一个，但试验之前不能确定会出现那个结果．

试验3

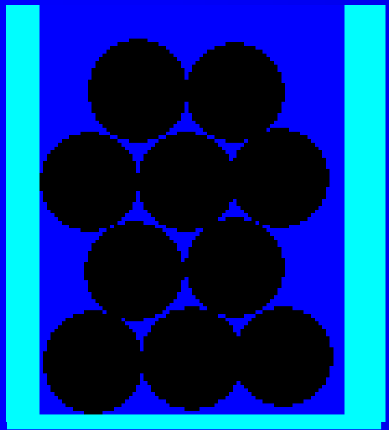


1．在相同条件下可以重复进行．

2．试验的结果是不明确的，也是不唯一．

3．每次试验只能出现这些结果中的一个，但试验之前不能确定会出现那个结果．

试验1



代表

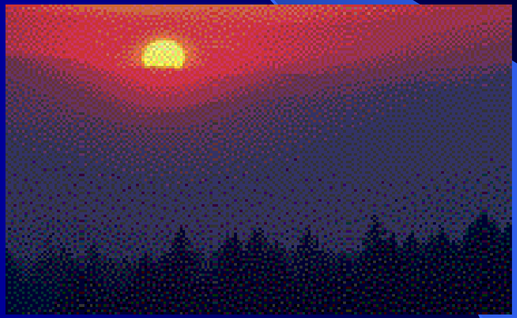
确定性现象

每次试验之前，根据现有条件能够判定它有一个明确结果的现象称为确定性现象.

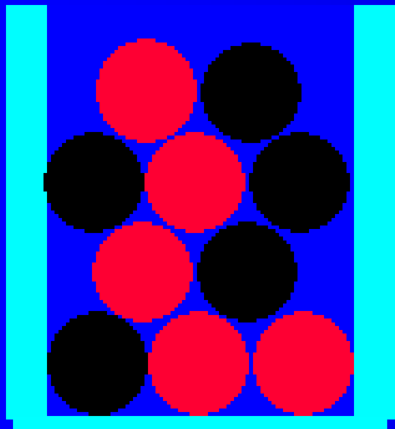
太阳每天早晨从东方升起

水从高处流向低处

同性电荷必然互斥



试验2



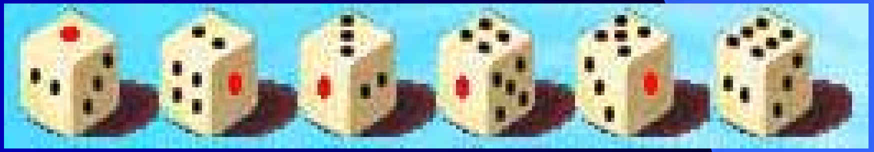
代表 → 随机现象

在一次试验中其结果呈现出不确定性，而在大量重复试验中其结果又具有统计规律的现象称为随机现象.

例1 在相同条件下掷一枚均匀的硬币,观察其出现正反两面的情况.

结果:可能出现正面,也可能出现反面.

例2 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

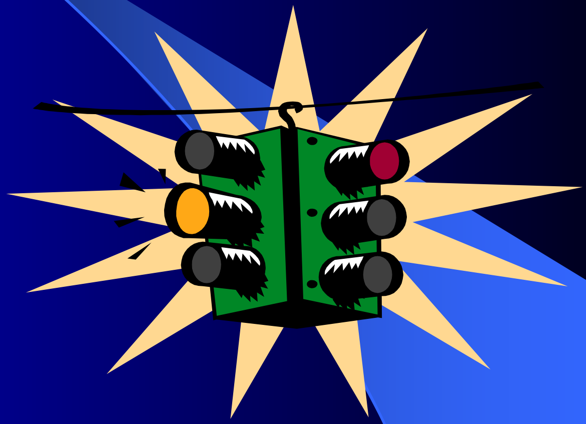


结果有可能为: “1”,“2”,“3”,“4”,“5”或“6”.

例3 用同一门炮向同一目标进行轰炸,观察弹着点的情况.

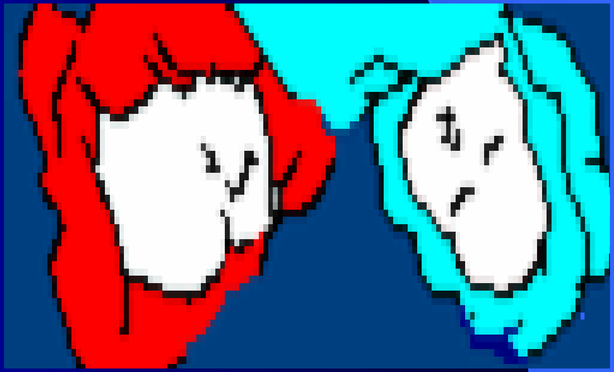
结果:弹落点会各不相同.

例4 过马路交叉路口时,可能遇上各种颜色的交通指示灯.



结果:信号灯允许或不允许通过.

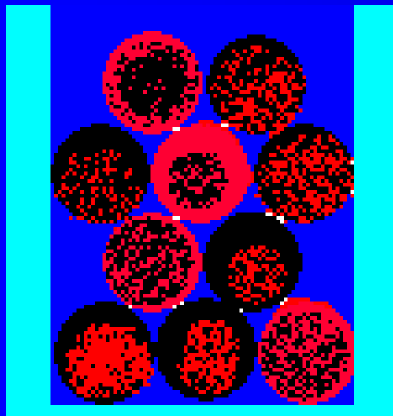
例5 考察某医院新出生婴儿的性别情况.



结果:男婴儿或女婴儿.

试验3

代表 → 模糊现象



在一次试验中其结果呈现出不确定性,且结果又不明确的现象，称为模糊现象.

一幅图片是否漂亮？这依赖于每个人的主观意愿，不同人的出发点不同，所看到的意境不同，就会得到不近相同的结论. 其结论往往只可意会，不可言传. 换句话说：结论有时说不太清楚，因为没有一个统一的标准能够度量.

- 自然现象
  - 确定性现象
    - 高等数学、线性代数、复变函数、大学物理等
  - 非确定性现象
    - 随机现象
      - 气象预报
      - 水文预报
      - 地震预报
      - 产品检验
      - 数据处理
      - 信号分析
      - 可靠性理论
      - 排队轮等
    - 模糊现象
      - 模糊控制
      - 模糊逻辑
      - 信息理论
      - 图像融合
      - 信号处理
    - 其它现象

本学科历史ABC

16世纪意大利学者开始研究掷骰子等赌博中的一些问题；17世纪中叶，法国数学家B.帕斯卡、荷兰数学家C．惠更斯基于排列组合的方法，研究了较复杂的赌博问题，解决了“合理分配赌注问题”(即得分问题).

对客观世界中随机现象的分析产生了概率论；使概率论成为数学的一个分支的真正奠基人是瑞士数学家J.伯努利；而概率论的飞速发展则在17世纪微积分学说建立以后.

第二次世界大战军事上的需要以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、信息论、控制论与数理统计学等学科.

本学科的应用ABC

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中．例如

1．气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与《概率论》紧密相关；

2．产品的抽样验收，新研制的药品能否在临床中应用，均要用到《假设检验》；

3．寻求最佳生产方案要进行《实验设计》和《数据处理》；

4．电子系统的设计,火箭卫星的研制及其发射都离不开《可靠性估计》；

5．处理通信问题,需要研究《信息论》；

6．探讨太阳黑子的变化规律时,《时间序列分析》方法非常有用;

7．研究化学反应的时变率，要以《马尔可夫过程》来描述;

8．生物学中研究群体的增长问题时，提出了生灭型《随机模型》，传染病流行问题要用到多变量非线性《生灭过程》；

9．许多服务系统，如电话通信、船舶装卸、机器维修、病人候诊、存货控制、水库调度、购物排队、红绿灯转换等，都可用一类概率模型来描述，其涉及到的知识就是《排队论》.

目前,概率统计理论进入其他自然科学领域的趋势还在不断发展．在社会科学领领域,特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题,都大量采用《概率统计方法》．法国数学家拉普拉斯(**Laplace**)说对了:“生活中最重要的问题,其中绝大多数在实质上只是概率的问题．”英国的逻辑学家和经济学家杰文斯曾对概率论大加赞美：“概率论是生活真正的领路人,如果没有对概率的某种估计,那么我们就寸步难行,无所作为.

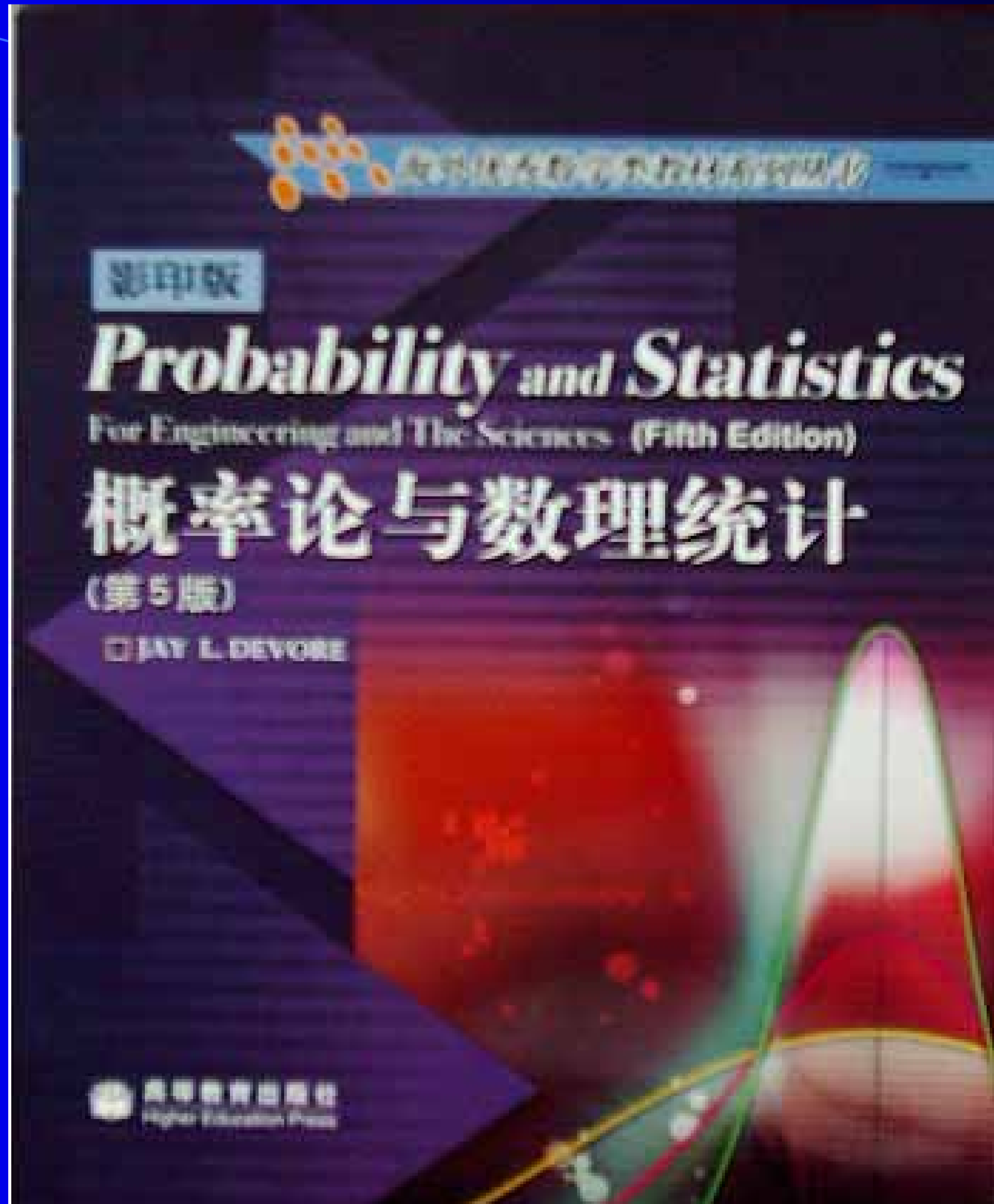
“得分问题”

甲、乙两人各出同样的赌注，用掷硬币作为博奕手段．每掷一次，若正面朝上，甲得1分乙不得分．反之，乙得1分，甲不得分．谁先得到规定分数就赢得全部赌注．当进行到甲还差2分乙还差3分，就分别达到规定分数时，发生了意外使赌局不能进行下去，问如何公平分配赌注？

内　　容

教材

参考书



影印版
Probability and Statistics
For Engineering and The Sciences (Fifth Edition)
概率论与数理统计
(第5版)
JAY L. DEVORE
高等教育出版社
Higher Education Press


概率论与数理统计辅导
责任编辑 姚雪琴
封面设计 刘 翔
10101010
1000110101011
定价:00.00元
概率论与数理统计辅导
陕西出版集团 陕西人民教育出版社
概率论与数理统计辅导
主编 李昌兴
陕西出版集团
陕西人民教育出版社

NEW
概率论与
数理统计
全程
学练考
工科课程辅导与考试丛书
随机过程
典型题解析及自测试题
西北工业大学出版社


概率统计双博士课堂
概率论与数理统计


概率论与数理统计

概率论与数理统计
学习辅导与习题全解


概率论
与数理统计

工程数学
概率统计简明教程

参考书目

1.李昌兴等. 概率论与数理统计辅导. 陕西：陕西教育出版社，2009.

2.盛骤等. 概率论与数理统计(第二版),北京：高等教育出版社,2001.

3.肖筱南编. 新编概率论与数理统计,北京：北京大学出版社,2002.

4.章昕等. 概率统计双博士课堂,北京：机械工业出版社，2003年8月.

5. 毛用才. 随机过程,西安：西安电子科技大学出版社,1999年3月.

6. 李欲奇. 随机过程,北京：国防科技大学出版社,2003年8月.

7. 何迎晖等. 随机过程简明教程，上海：同济大学出版，2004年1月.

8. 张卓奎等. 随机过程，西安：西安电子科技大学出版社，2003年9月.

9. 汪荣鑫. 随机过程，西安：西安交通大学出版社，2003.

10. 刘嘉焜. 应用随机过程，北京：科学出版社，2000.

11.赵衡秀. 概率论与数理统计全程学练考,沈阳:东北大学出版社,2003年3月.

一、绪论

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门学科

每次试验之前，根据现有条件能够判定它有一个明确结果的现象称为确定性现象.

在一次试验中其结果呈现出不确定性，而在大量重复试验中其结果又具有统计规律的现象称为随机现象.

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象,其结果是不明确的，称为模糊现象.

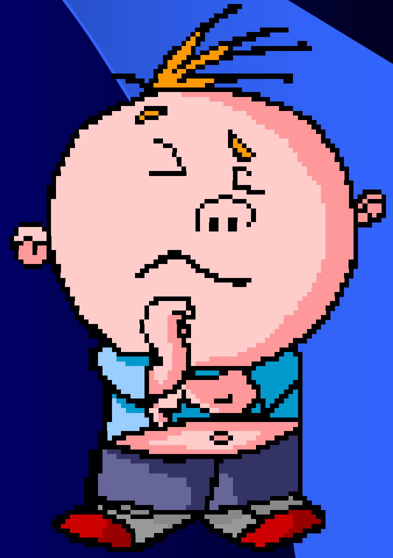
随机现象说明

1．随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述．

2．随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中,这种结果的出现具有一定的统计规律性．

如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的．



问题　什么是随机试验?

第一讲　样本空间与随机事件

- 绪论
- 随机试验

二、随机试验

定义1：如果一个试验满足下列三个条件：

1.试验在相同条件下可以重复进行；

2.每次试验的可能结过不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3.每次试验只能出现这些结果中的一个，但试验之前不能确定会出现那个结果。

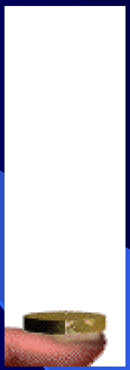
这样的试验称为一个随机试验，而随机试验所代表的现象称为随机现象。

说明

1.随机试验简称为试验，是一个广泛的术语.它包括各种各样的科学实验，也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”、或“测量”等.

2.随机试验通常用 E 来表示.

例1 在相同条件下掷一枚均匀的硬币,观察其出现正反两面的情况.



分析

(1)试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2)试验的所有可能结果:正面或反面;

(3)进行一次试验之前能确定哪一个结果会出现.

随机试验

如何根据随机试验来研究随机现象？

尽管，我们从试验开始的条件不确定试验的结果，即硬币出现正面还是反面.即一次试验的结果，硬币出现正面还是反面，在试验之前无法确定。

但是，实践经验告诉我们，如果反复多次掷币，那么总可以观察到这样的事实：当试验次数$\boldsymbol{n}$相当大时，出现正面的次数$n_{正}$和出现反面的次数$n_{反}$是很接近的，比值$\frac{n_{正}}{n}$（或$\frac{n_{反}}{n}$）会逐渐稳定于$\frac{1}{2}$．这也就是我们所谓的统计规律。

同理可知下列试验也是随机试验

E_1:抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

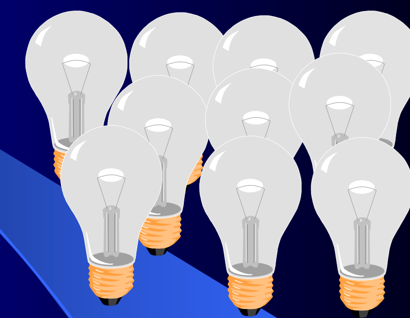
E_2 :从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的件数.

E_3 : 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

E_4 ：记录电话交换机一分钟内接到用户的呼叫次数。

E_5: 考察某地区10月份的平均气温.

E_6：从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.



E_7：抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况.

E_8：将一枚硬币抛三次，观察正面H、反面T 出现的情况.

E_9：将一枚硬币抛三次，观察出现正面的次数.

第一讲　样本空间与随机事件

- 绪论
- 随机试验
- 样本空间与随机事件

三、样本空间与随机事件

1.样本空间

前面我们介绍了随机试验

定义1：如果一个试验满足下列三个条件：

1.试验在相同条件下可以重复进行；

2.每次试验的可能结过不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3.每次试验只能出现这些结果中的一个，但试验之前不能确定会出现那个结果。

这样的试验称为一个随机试验，而随机试验所代表的现象称为随机现象。

三、样本空间与随机事件

1.样本空间

定义2：随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的样本空间，记为S.样本空间的元素,即试验E 的每一个结果e，称为样本点.

E_1:抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

E_2 :从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的件数.

$$S_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

记 $H \to$ 正品，$T \to$ 次品.

E_3：记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

$S_3 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$

E_4：记录电话交换机一分钟内接到用户的呼叫次数。

$S_4 = \{0, \quad 1, \quad 2, \cdots\}.$

E_5: 考察某地区 10月份的平均气温.

$S_5 = \{t | T_1 < t < T_2\}.$ 其中 t 为平均温度.

E_6：从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.

$S_6 = \{t \mid t \geq 0\}.$ 其中 t 为灯泡的寿命.

E_7：抛一枚硬币，观察正面H、反面T出现的情况.

$$S_7 = \{H, T\}$$

E_8：将一枚硬币抛三次，观察正面H、反面T出现的情况.

$$S_8 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

E_9：将一枚硬币抛三次，观察出现正面的次数.

$$S_9 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

$S_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$S_3 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$

$S_4 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$

$S_5 = \{t \mid T_1 < t < T_2\}.$

$S_6 = \{t \mid t \geq 0\}.$

$S_7 = \{H, T\}$

$S_8 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$S_9 = \{0, 1, 2, 3\}$

样本空间的元素由试验的目的所确定，试验的目的不同，所选取的样本空间也不尽相同。

不同的题目也可以选择相同的样本空间

三、样本空间与随机事件

1.样本空间

定义2：随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的样本空间，记为S.样本空间的元素，即试验E的每一个结果e，称为样本点.

说明：样本空间的元素由试验的目的所确定，试验的目的不同，所选取的样本空间也不尽相同。

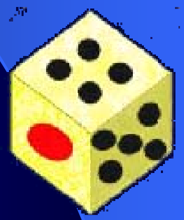
三、样本空间与随机事件

1.样本空间

2.随机事件

定义：随机试验E的样本空间S的子集称为E的随机事件,简称事件.通常用大写字母A,B,C等英文字母表示。

例　抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



试验中骰子“出现1点”,“出现2点”...“出现6点”，“点数不大于4”,“点数为偶数”等都为随机事件.

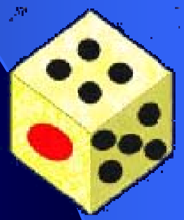
三、样本空间与随机事件

1.样本空间

2.随机事件

随机事件　随机试验E的样本空间S的子集称为E的随机事件,简称事件.通常用大写字母A,B,C等英文字母表示。

基本事件　由一个样本点组成的单点集.



"出现1点", "出现2点", "出现3点", "出现4点", "出现5点", "出现6点".

复杂事件　由基本事件复合而成的事件.

$$A = \{1,3,5\},\ B = \{2,4,6\}$$

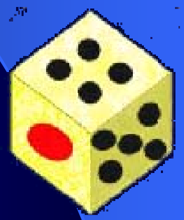
三、样本空间与随机事件

1.样本空间

2.随机事件

随机事件　随机试验E的样本空间S的子集称为E的随机事件,简称事件.通常用大写字母A,B,C等英文字母表示。

基本事件　由一个样本点组成的单点集.



复杂事件　由基本事件复合而成的事件.

事件发生　在试验中，事件A中样本点出现时，则称事件A在这次试验中发生。

$A=\{1,3,5\}$　不发生　　$B=\{2,4,6\}$　发生

三、样本空间与随机事件

1.样本空间

2.随机事件

必然事件　　任何一次试验中都会发生的事件,记为S.

不可能事件　　任何一次试验中都不会发生的事件.记为$\varnothing$.

$C=\{$点数不大于6$\}$ → 必然事件

$D=\{$点数大于6$\}$ → 不可能事件

三、样本空间与随机事件

1.样本空间

2.随机事件

必然事件　　任何一次试验中都会发生的事件,记为S.

不可能事件　　任何一次试验中都不会发生的事件.记为∅.

注：1.必然事件的对立面是不可能事件,不可能事件的对立面是必然事件.

2.必然事件是相对的，而不可能事件是绝对的。

3.必然事件和不可能事件已失去了不确定性，已经不是随机事件，但我们还把他们看成是随机事件。

三、样本空间与随机事件

1.样本空间

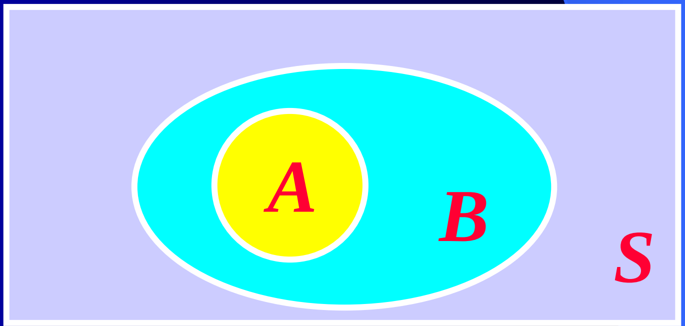
2.随机事件

3.事件的关系及运算

设试验E的样本空间为S，而$A, B, A_k\ (k=1,2,\ldots)$ 是S的子集.

包含关系　若事件A发生必然导致B发生,则称事件B包含事件A,记作 $B \supset A$或$A \subset B$.

"长度不合格"必然导致"产品不合格"，所以"产品不合格"包含"长度不合格".



三、样本空间与随机事件

3.事件的关系及运算

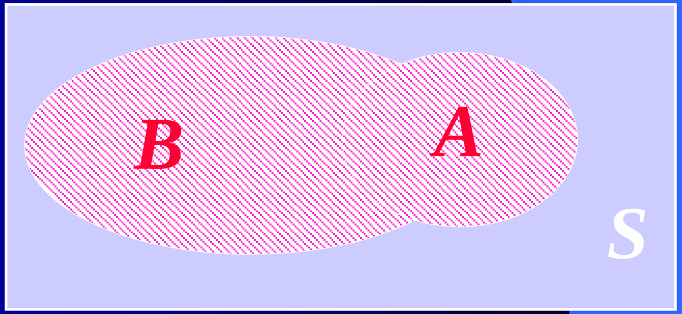
包含关系　若事件A发生必然导致B发生,则称事件B包含事件A,记作 $B \supset A$或$A \subset B$.

相等关系　若事件A包含事件B,而且事件B包含事件A,则称事件A与事件B相等,记作$A=B$.

事件的和　事件A与事件B至少有一个发生的事件称为事件A与事件B的和事件，记为$A \cup B$或$A+B$.

事件$A \cup B$发生意味着：或事件A发生或事件B发生，或事件A与事件B都发生.

某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，因此“产品不合格”是“ 长度不合格”与“直径不合格”的并.

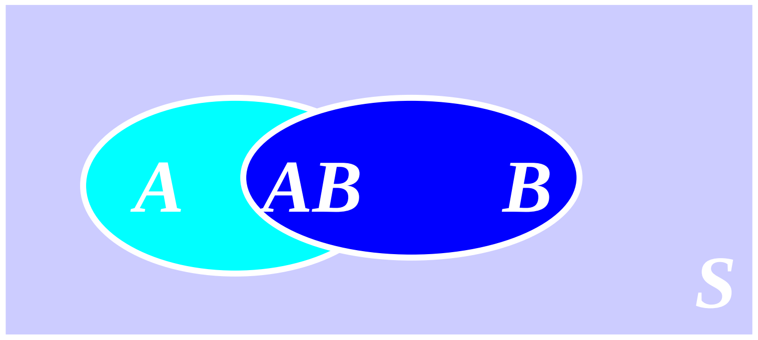


推广　称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件;

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1, A_2, \cdots$的和事件.

事件的积　由事件A与事件B同时发生而构成事件称为事件A与事件B的积事件，记为$A \cap B$或AB.

某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定,因此“产品合格”是“长度合格”与“直径合格”的交或积事件.



推广　称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积事件;

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件$A_1, A_2, \cdots$的积事件.

和事件与积事件的运算性质

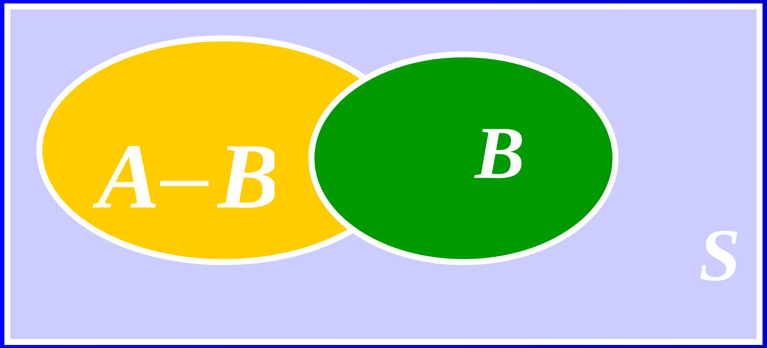
$$A \cup A = A, \qquad A \cup S = S, \qquad A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap A = A, \qquad A \cap S = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

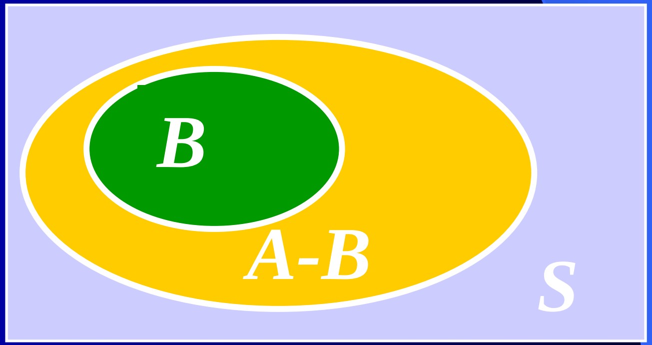
事件的差　事件A发生而事件B不发生所构成事件称为事件A与事件B的差事件，记为$A-B$.

"长度合格但直径不合格"是"长度合格"与"直径合格"的差.

$B \not\subset A$



$B \subset A$

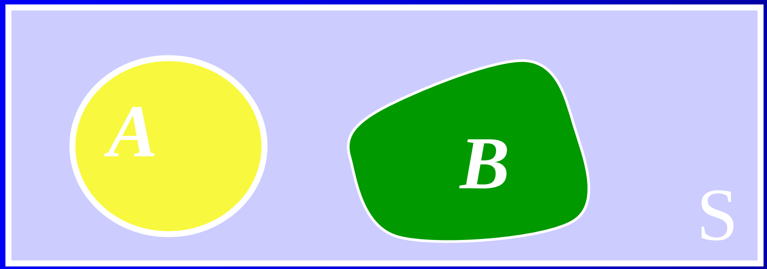


事件的差　事件A发生而事件B不发生所构成事件称为事件A与事件B的差事件，记为$A-B$.

互斥事件　事件A与B不能发生的事件称为事件A与事件B是互斥的，或称它们互不相容。即$A\cap B=\varnothing$.

抛掷一枚硬币,“发生花面”与“发生字面”是互不相容的两个事件.

“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ “骰子出现2点”

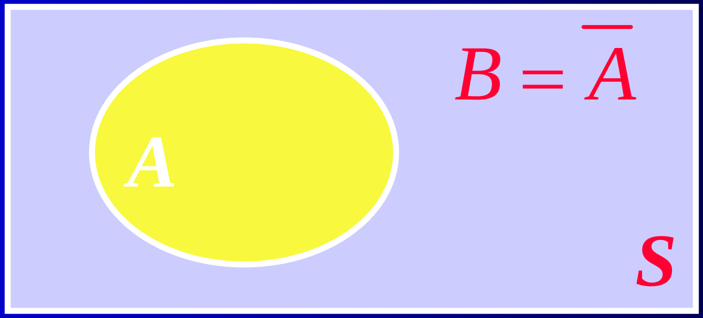


事件的差　事件A发生而事件B不发生所构成事件称为事件A与事件B的差事件，记为$A-B$.

互斥事件　事件A与事件B不能发生的事件称为事件A与事件B是互斥的，或称它们互不相容。即$A\cap B=\varnothing$.

对立事件　事件A与事件B两者中有仅有一个发生的事件称为事件A与事件B为对立事件。即$A\cap B=\varnothing$，且$A\cup B=S$.

“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”



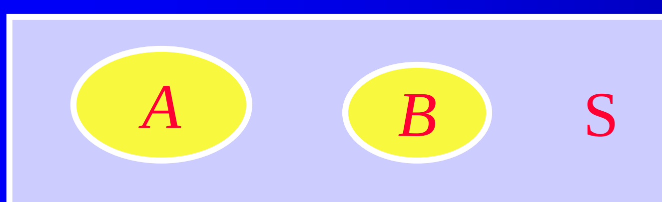
事件的差　事件A发生而事件B不发生所构成事件称为事件A与事件B的差事件，记为$A-B$.

互斥事件　事件A与事件B不能发生的事件称为事件A与事件B是互斥的，或称它们互不相容。即$A \cap B=\varnothing$.

对立事件　事件A与事件B两者中有仅有一个发生的事件称为事件A与事件B为对立事件。即$A \cap B=\varnothing$, 且$A \cup B=S$.

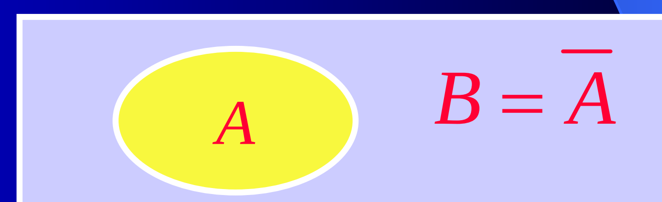
对立事件与互斥事件的区别

A、B互斥



$$AB=\Phi$$

A、B对立



$$A\cup B=S \text{且} AB=\Phi.$$

互斥 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 对立

事件间的运算规律　设 A, B, C 为事件,则有

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A,\ AB = BA.$

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(AB)C = A(BC).$$

(3) 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC,$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$$

(4)德·摩根律：　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
S	样本空间,必然事件	空间
Φ	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\overline{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A发生必然导致B发生	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	A集合与B集合相等

$A \cup B$	事件A与事件B的和	A集合与B集合的并集
AB	事件A与B的积事件	A集合与B集合的交集
$A-B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$AB=\Phi$	事件A与B互不相容	A与B两集合中没有相同的元素

例题讲解

例1　设A,B,C 表示三个随机事件，试将下列事件用A,B,C 表示出来.

(1) A发生，而B, C都不发生;　　$A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) A, B都发生，C 不发生;　　$AB\overline{C}$;

(3) 三个事件都发生;　　ABC;

(4) 三个事件至少有一个发生;　　$A+B+C$;

(5) 三个事件都不发生;　　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(6)　不多于一个事件发生；

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C;$$

(7)　不多于两个事件发生；

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$$

(8)　三个事件至少有两个发生；

$$ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC;$$

(9)　***A*, *B*** 至少有一个发生，***C*** 不发生；

$$(A+B)\overline{C};$$

(10)　***A*, *B*, *C*** 中恰好有两个发生；

$$AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$$

例2　向指定目标射三枪，观察射中目标的情．用A_k表示事件“第k枪击中目标”$(k=1,2,3)$，试用A_1、A_2 、A_3表示以下各事件

（1）只击中第一枪；　　（2）只击中一枪；

（3）三枪都没击中；　　（4）至少击中一枪．

解（1）事件“只击中第一枪”，意味着第二枪不中，第三枪也不中．所以，可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ ．

（2）事件“只击中一枪”，并不指定哪一枪击中．三个事件“只击中第一枪”、“只击中第二枪”、“只击中第三枪”中任意一个发生，都意味着事件“只击中一枪”发生．同时，因为上述三个事件互不相容，所以，可以表示成为$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ $+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ ．

（3）事件“三枪都没击中”，就是事件“第一、二、三枪都未击中”，所以，可以表示成 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$。

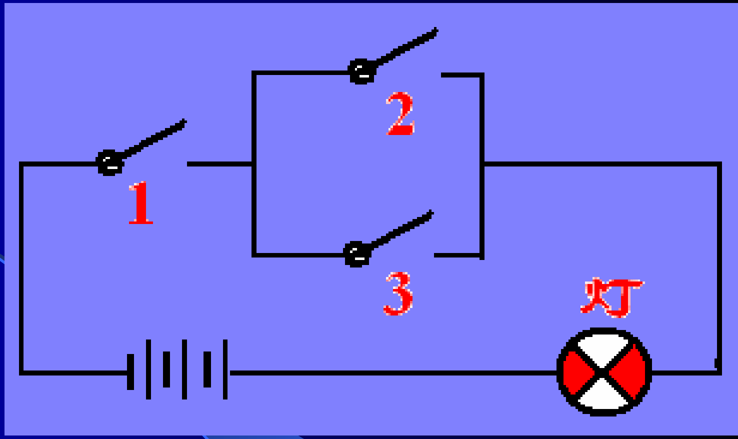
事件“三枪都没击中”的对立事件为“三枪中至少有一枪击中”，因此也可表示为 $S-(A_1\cup A_2\cup A_3)$

（4）事件“至少击中一枪”，就是事件“第一、二、三枪至少有一次击中”，所以，可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$.

事件“至少击中一枪”，就是事件“恰有一次击中”，或“恰有两次击中”，或“三都击中”，所以，也可表示为

$$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$$

例3　如图所示的电路途中，事件A表示“信号灯亮”，以B、C、D分别表示继电器1、2、3闭合。那么显然有$BC\subset A$，$BD\subset A$，$BC\cup BD=A$，而 $\overline{B}A=\varnothing$ ，即事件　与事件A互不相容。



作业　练习册作业1

谢谢