西安邮电学院 2009 ---2010 学年第一学期试题卷(A)

《 概率论与随机过程》参考答案及评分标准

一、选择题(每小题 2 分，共 10 分. 每小题只有一个选项符合要求，并将其代号填在题后的括号内)

1. C　　2. A　　3. D　　4. B.　　5. C　　6. B

【注】 正确代号未填在相应括号内或者将错误代号填入括号内一律得 0 分.填写代号不清楚按 0 记. 本题选对 5 或者 6 个小题军的 10 分.

二、计算题(本大题共 8 小题，满分 90 分，其中第 2，9 小题满分 15 分，其余各小题满分均为 10 分)

1. 设 B 表示“发出信息 A”，A 表示“收到信息 A”.由已知条件

$P(A|B)=1-0.02=0.98$，$P(A|\bar{B})=0.01$，$P(B)=\frac{2}{3}$，$P(\bar{B})=\frac{1}{3}$. ……………… 4 分

由贝叶斯公式得所求概率

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$ ……………… 9 分

$$=\frac{\frac{2}{3}\times 0.98}{\frac{2}{3}\times 0.98+\frac{1}{3}\times 0.01}=\frac{196}{197}$$ ……………… 10 分

【注】 本题主要考察贝叶斯公式得运用，因此未能正确写出贝叶斯公式最多得 5 分.

2. 由分布律性质，得

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$ ……………… 5 分

再由已知条件得 $3c=1$，即 $c=\frac{1}{3}$. 那么 $Y=X^2$ 的分布律为

$$P(Y=i^2)=\frac{1}{3}$$ ……………… 12 分

于是 $Y=X^2$ 的分布函数为

$$F(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{1}{3}, & 1\le y<4,\\ \frac{2}{3}, & 4\le y<9,\\ 1 & y\ge 9.\end{cases}$$ ……………… 15 分

【注】 本题主要考察离散型随机变量的分布律性质、随机变量的函数的分布及分布函数的概念，仅写出分布函数得 8 分.

3. 随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，而 $y=e^x$ 单调，且 $y'>0$. 那么所求密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\ln y)(\ln y)', & 0<y<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ……………… 7 分

$$=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<\ln y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1<y<e,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ ……………… 10 分

【注】 也可根据分布函数法计算密度函数，但主要考察概率的概念，计算结果的正确与否不要作为主要的分点.评阅人员可以给出合理的评分标准.

4. 根据已知条件

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$ ……………… 2 分

所求密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$ ……………… 8 分

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-[\frac{z^2}{4}+(x-\frac{z}{2})^2]}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即 $Z\sim N(0,2)$. ……………… 10 分

【注】本题主要考察两个随机变量和的分布问题，计算结果的正确与否不要作为主要的分点.如果仅有结果没有计算过程只给 2 分. 本题按正态分布性质作也可得满分.

5. 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 Axdx=\frac{A}{2}$$ ……………… 3 分

由密度函数的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 得 $\frac{A}{2}=1$，即 $A=2$. ……………… 5 分

又

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$ ……………… 6 分

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$$ ……………… 7 分

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x)dx=\int_0^1 x^4\cdot 2xdx=\frac{1}{3}$$ ……………… 8 分

所以

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{18}$$ ……………… 9 分

$$D(X^2)=E(X^4)-E^2(X^2)=\frac{1}{12}$$ ……………… 10 分

【注】本题主要考查随机变量密度函数限额性质及数字特征，关键考核能否正确写出相关表达式，所有结果出现错误，只扣分.

6. 由于

$P(U=0)=P(X\le Y)=\iint\limits_{x\le y}f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}$，$P(U=1)=1-P(U=0)=\frac{1}{2}$ ……………… 1 分

$P(V=0)=P(X\le 2Y)=\iint\limits_{x\le 2y}f(x,y)dxdy=\frac{3}{4}$，$P(V=1)=1-P(V=0)=\frac{1}{4}$ ……………… 2 分

$P(UV=1)=P(X>Y,X>2Y)=P(V=1)=\frac{1}{4}$，$P(UV=0)=1-P(UV=1)=\frac{3}{4}$ ……………… 3 分

$E(U)=\frac{1}{2}$，$E(V)=\frac{1}{4}$，$D(U)=\frac{1}{4}$，$D(V)=\frac{3}{16}$ ……………… 6 分

$$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{8}$$ ………………………………………………… 8 分

$$\rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$ ………………………………………………… 10 分

【注】本题得分点较多，主要考察概率论中的基本表达式，总体得分阅卷人员根据自己的理解给出客观合理的分数.

7. 设 X 表示 100 部电话分机同时使用外线通话的分机数，那么 $X\sim B(100,0.05)$．总机需要备 m 条外线才能以 95%确保每部分机在使用外线通话时不必等候. 由已知条件及拉普拉斯中心极限定理，有

$$P\{X\le m\}=P\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}=P\{\frac{X-100\times0.05}{\sqrt{100\times0.05\times0.95}}\le\frac{m-100\times0.05}{\sqrt{100\times0.05\times0.95}}\}$$

$$=\Phi(\frac{m-100\times0.05}{\sqrt{100\times0.05\times0.95}})\ge0.95$$ ………………………………………………… 6 分

又 $\Phi(1.64)=0.9495$，$\Phi(1.65)=0.9505$．从而 $\frac{m-100\times0.05}{\sqrt{100\times0.05\times0.95}}\ge1.65$，即 $m\ge8.5961$． ……… 8 分

这就是说，总机需配备 9 条外线才能以 95%确保每部分机在使用外线通话时不必等候. ……… 10 分

【注】本题主要考察中心极限定理，正确理解“确保”一词的含义，

8. 随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，$t\in(-\infty,+\infty)$，其中 a，ω 为非零常数，Θ 服从区间 $(0,2\pi)$ 内的均匀分布. 其状态空间为 $[-|a|,|a|]$，一条样本曲线为 $X(t)=a\cos(\omega t+\pi)$． ……………… 3 分

由定义所求均值函数

$$\mu_X(t)=E[X(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]=\int_0^{2\pi}a\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$ ……………… 7 分

而自相关函数

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[a^2\cos(\omega t_1+\Theta)\cos(\omega t_2+\Theta)]$$ ………………… 10 分

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega t_1+\theta)\cos(\omega t_2+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau$$ ………………… 11 分

式中 $\tau=t_2-t_1$．特别，令 $t_2=t_1=t$ 时，即得方差函数为

$$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)=R_X(t,t)=\frac{a^2}{2}$$ ………………………………………… 15 分

【注】本题主要考察随机过程基本概念及数字特征，总体得分阅卷人员根据自己的理解给出客观合理的分数. 随机相位正弦波表达式中未写出振幅 a，ω 均应适当扣分.