第4讲　　事件的独立性

一、事件的独立性

二、贝努里试验概型

一 、事件的独立性

例1　已知袋中有5只红球，3只白球.从袋中有放回地取球两次,每次取1球。设A，B分别表示第 1，2 次取得白球. 求 $P(A)$，$P(B)$, $P(B|A)$, $P(B|\overline{A})$.

解　$P(A)=P(B)=\dfrac{3}{8}$,　$P(B|\overline{A})=\dfrac{3}{8}$,

$P(B|A)=\dfrac{3}{8}$,

$\Longrightarrow$　$P(B|A)=P(B)=P(B|\overline{A})$

事件B发生的概率不受事件A与否发生的影响

$\Longrightarrow$　$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$

一 、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

定义1　设A，B是随机试验E的两个随机事件，如果事件B发生的概率不受事件A与否发生的影响，则称事件A与B独立.

$$P(B|A)=P(B)=P(B|\overline{A})$$

定义2　设A，B是随机试验E的两个随机事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件A与B独立.

说明：1. 定义2比定义1更优越 ，通常使用定义2判断两个随机事件的独立性；2. 独立是相互的.

一 、事件的独立性

1.　两个事件的独立性

定理1　　设A，B是随机试验E的两个随机事件，如果事件A与B独立，则 A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$ 均独立.

证　A与B独立 $\Longrightarrow$ $\overline{A}$与$\overline{B}$ 独立.

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P[\overline{A}(S-B)] = P(\overline{A}-\overline{A}B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}B)$$

$$= P(\overline{A}) - P[(S-A)B] = P(\overline{A}) - P(B-AB)$$

$$= P(\overline{A}) - [P(B) - P(AB)] = P(\overline{A}) - [P(B) - P(A)P(B)]$$

$$= P(\overline{A}) - P(B)[1-P(A)] = P(\overline{A}) - P(B)P(\overline{A})$$

$$= P(\overline{A})[1-P(B)] = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

例2　两门高射炮彼此独立的射击一门敌机，设甲炮击中敌机的概率为0.9,乙炮击中敌机的概率为0.8，求敌机被击中的概率.

解　设A={甲炮击中敌机}，B={乙炮击中敌机}，那么，{敌机被击中}= $A\cup B$ 。于是　　**A与B相互独立**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=0.9+0.8-0.9\times 0.8=0.98$$

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$$

$$=1-0.1\times 0.2=0.98$$

一 、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

2. 三个事件的独立性

定义3 如果随机事件A, B, C 满足

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases}$$

则称A、B、C三个事件两两独立。

A, B, C 相互独立

$\Downarrow$

A, B, C 两两独立

定义4 如果随机事件A, B, C 两两度里且满足

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称A、B、C三个事件相互独立。

例3　设 $S=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ，其中 e_i 是等可能发生的。令 $A=\{e_1, e_2\}, B=\{e_1, e_3\}, C=\{e_1, e_4\}$. 显然

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/2$$

$$P(AB)=P(BC)=P(CA)=1/4$$

$$P(A)P(B)P(C)=1/8$$

$$\Rightarrow \quad P(A)P(B)=P(B)P(C)=P(C)P(A)$$

但

$$P(ABC)=0 \neq 1/8=P(A)P(B)P(C)$$

这说明：由 A, B, C 两两独立不能推出A, B, C 相互独立。

例4　设 $S=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8\}$，其中 e_i 是等可能发生的。令

$$A=\{e_1,e_2,e_3,e_4\},\ B=\{e_1,e_2,e_5,e_6\},\ C=\{e_1,e_6,e_7,e_8\}.$$

显然

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/2,\qquad P(AB)=P(BC)=1/4,$$

$$P(AC)=1/8,\qquad P(A)P(B)P(C)=1/8.$$

$$\left\{\begin{aligned}&P(AB)=P(A)P(B)\\&P(BC)=P(B)P(C)\\&P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{aligned}\right.\ \not\Longrightarrow\ P(AC)=P(A)P(C)$$

例2、例3说明：由 A,B,C 相互独立中的四个等式中的任何三个等式推不出第四个等式，这表明三个事件相互独立定义中的四个等式没有蕴含关系。

例5　甲、乙、丙三部机床独立工作，而由一名工人照管，某段时间内它们不需要工人照管的概率分别为0.9，0.8及0.85．求在这段时间内有机床需要工人照管的概率、机床因无人照管而停工的概率以及恰有一部机床需要工人照管的概率？

解　设事件 A、B、C 分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要工人照管．有机床需要工人照管也就是至少有一部机床需要工人照管，另外我们应注意到三部机床由一名工人照管，即因无人照管而停工等价于在该段时间内至少有两部机床同时需要工人照管．

又已知条件A、B、C 相互独立，且

$$P(A)=0.9,\ P(B)=0.8,\ P(C)=0.85$$

解　设事件 A、B、C 分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要工人照管．有机床需要工人照管也就是至少有一部机床需要工人照管，另外我们应注意到三部机床由一名工人照管，即因无人照管而停工等价于在该段时间内至少有两部机床同时需要工人照管．

又已知条件A、B、C 相互独立，且

$$P(A)=0.9,\ P(B)=0.8,\ P(C)=0.85$$

解　设事件 A、B、C 分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要工人照管．有机床需要工人照管也就是至少有一部机床需要工人照管，另外我们应注意到三部机床由一名工人照管，即因无人照管而停工等价于在该段时间内至少有两部机床同时需要工人照管．

又已知条件A、B、C 相互独立，且

$$P(A)=0.9,\ P(B)=0.8, P(C)=0.85$$

则有机床需要工人照管的概率

$$P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{ABC})=1-P(ABC)$$

$$=1-P(A)P(B)P(C)$$

$$=1-0.9\times0.8\times0.85=0.388$$

解　设事件 A、B、C 分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要工人照管．有机床需要工人照管也就是至少有一部机床需要工人照管，另外我们应注意到三部机床由一名工人照管，即因无人照管而停工等价于在该段时间内至少有两部机床同时需要工人照管．

又已知条件A、B、C 相互独立，且

$$P(A)=0.9,\ \ P(B)=0.8,\ P(C)=0.85$$

因无人照管而停工的概率

$$P(\bar{A}\,\bar{B}+\bar{B}\,\bar{C}+\bar{C}\,\bar{A})$$

$$=P(\bar{A}\bar{B})+P(\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}\bar{C})-P[(\bar{A}\bar{B})(\bar{B}\bar{C})]-P[(\bar{B}\bar{C})(\bar{A}\bar{C})]$$

$$-P[(\bar{A}\bar{B})(\bar{A}\bar{C})]+P[(\bar{A}\bar{B})(\bar{B}\bar{C})(\bar{A}\bar{C})]$$

$$=P(\bar{A}\bar{B})+P(\bar{B}\bar{C})+P(\bar{C}\bar{A})-2P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$$

解 设事件 A、B、C 分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要工人照管．有机床需要工人照管也就是至少有一部机床需要工人照管，另外我们应注意到三部机床由一名工人照管，即因无人照管而停工等价于在该段时间内至少有两部机床同时需要工人照管．

又已知条件A、B、C 相互独立，且

$$P(A)=0.9,\ P(B)=0.8,\ P(C)=0.85$$

因无人照管而停工的概率

$$P(\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A})$$

$$=P(\overline{A}\overline{B})+P(\overline{B}\overline{C})+P(\overline{C}\,\overline{A})-2P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$$

$$=P(\overline{A})P(\overline{B})+P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{C})P(\overline{A})-2P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$=0.1\times0.2+0.2\times0.15+0.15\times0.1-2\times0.1\times0.2\times0.15=0.059$$

解　设事件 A、B、C 分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙不需要工人照管．有机床需要工人照管也就是至少有一部机床需要工人照管，另外我们应注意到三部机床由一名工人照管，即因无人照管而停工等价于在该段时间内至少有两部机床同时需要工人照管．

又已知条件A、B、C 相互独立，且

$$P(A)=0.9,\ P(B)=0.8, P(C)=0.85$$

恰有一部机床需要工人照管的概率

$$P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)$$

$$=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$$

$$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)$$

$$=0.9\times0.85\times0.2+0.9\times0.15\times0.8+0.1\times0.85\times0.8=0.329$$

一 、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

2. 三个事件的独立性

3. n个事件的独立性

定义5 如果 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 满足

$$P(A_iA_j) = P(A_i)\,P(A_j),\ 1 \le i < j \le n$$

$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)\,P(A_k),\ 1 \le i < j < k \le n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

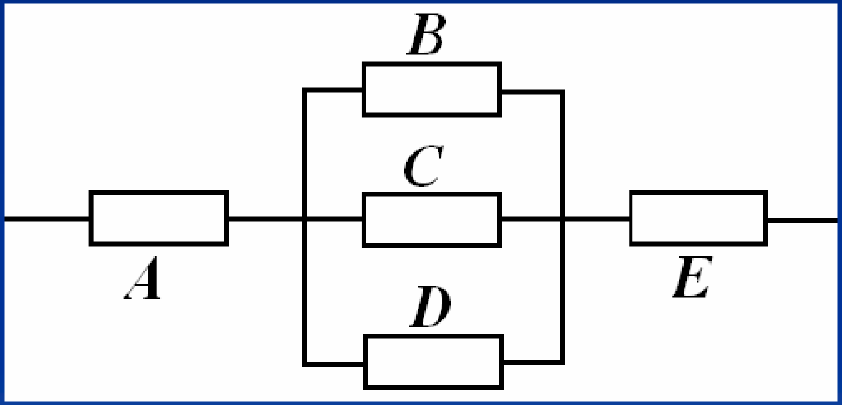
$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

则称 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 相互独立。

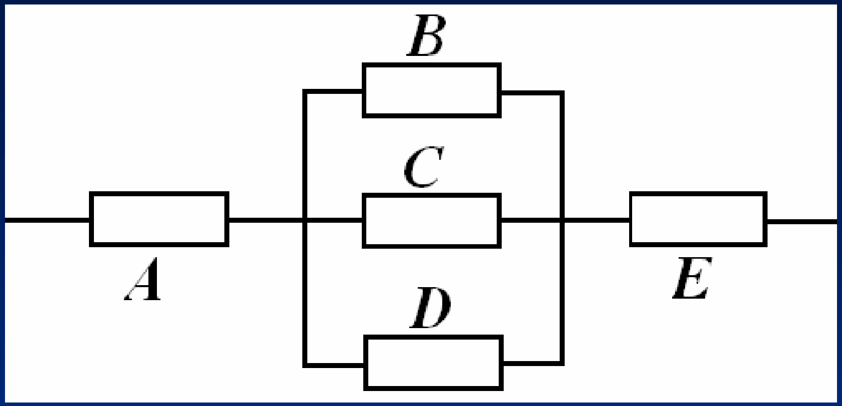
常由实际问题的意义判断事件的独立性

例6 设一个系统由5个元件组成（如示图）．元件A，E正常工作的概率为p，元件B，C，D正常工作的概率为q，且每个元件都各自独立工作，求(1) 系统能正常工作的概率；(2) 已知系统正在正常工作，求此时元件B，C，D中仅有一个正常工作的概率．

解题思路 这是一个系统可靠性问题，一般情况，复杂系统可以看成是由并联系统和串联系统组成．为此先把系统正常工作用并联系统和串联系统正常工作来表示．



解　设A, B, C, D, E分别为相应5个元件各自正常工作，F为系统正常工作，则 $F = AE(B + C + D)$



再由A，B，C，D，E的相互独立性可得：

(1) 系统能正常工作的概率

$$P(F) = P[AE(B+C+D)] = P(A)P(E)P(B+C+D)$$

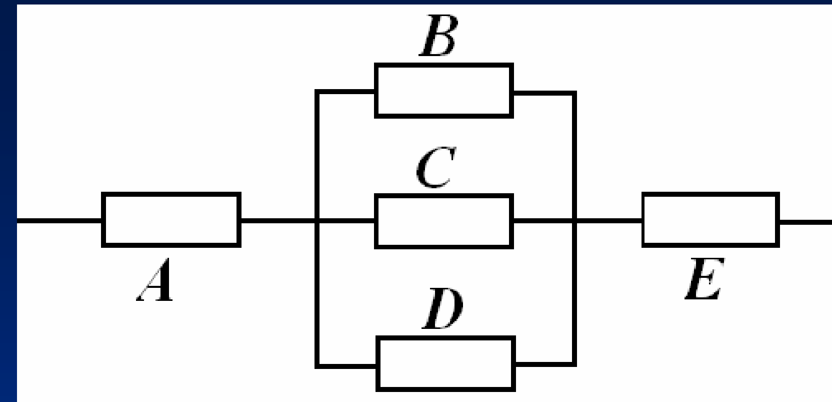
$$= P(A)P(E)P(B+C+D)$$

$$= P(A)P(E)[1 - P(\overline{B \cup C \cup D})]$$

$$= P(A)P(E)[1 - P(\overline{B})P(\overline{C})P(\overline{D})]$$

$$= q^2[1-(1-p)^3]$$

解 (2) G表示“元件B，C，D中仅有一个正常工作”，则



$$G = B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}D$$

故所求概率为

$$P(G\mid F) = \frac{P[(B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{B}C\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}D)F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[\boxed{B\overline{C}\,\overline{D}F} + \boxed{\overline{B}C\overline{D}F} + \boxed{\overline{B}\,\overline{C}DF}]}{P(F)}$$

互不相容

$$= \frac{3\times q^2\cdot p\cdot(1-p)^2}{q^2[1-(1-p)^3]} = \frac{3p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$$

二 、贝努里试验概型

定义6　设E为一贝努里试验，将E在相同的条件下重复进行n次,每次试验中事件发生的可能性保持不变且为p。把这n次独立重复试验看成一次试验，这个试验称为n重贝努里试验。

贝努里试验由下面四个约定

- 每次试验中的结果只有两个；
- 事件在每次试验中发生的可能性相等；
- 每次试验的结果与其他次试验无关
- 试验进行n次.

例7　袋中有3个白球,2个红球,有放回地取球 4 次,每次一只,求其中恰有2个白球的概率.

解　古典概型

设 B 表示4个球中恰有2个白球

$$V_S = 5^4$$

$$V_B = C_4^2 3^2 2^2$$

$$P(B) = \frac{C_4^2 3^2 2^2}{5^4} = C_4^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.3456.$$

另解　每取一个球看作是做了一次试验

记取得白球为事件 A，显然 $P(A)=3/5.$

有放回地取4个球看作做了 4 重Bernoulli试验, 记第 i 次取得白球为事件 A_i。

感兴趣的问题为:4次试验中A 发生2次的概率。

$$A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} \qquad A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} \qquad A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4$$

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4 \qquad \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4 \qquad \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}$$

$$\Longrightarrow P(B)=C_4^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=0.3456.$$

二 、贝努里试验概型

定义6　设E为一贝努里试验，将E在相同的条件下重复进行n次,每次试验中事件发生的可能性保持不变且为p。把这n次独立重复试验看成一次试验，这个试验称为n重贝努里试验。

定理1　在n重贝努里试验中,如果事件A在每次试验中发生的概率为p。那么事件A在n重贝努里试验中恰好发生k此的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\cdots,n$$

例8　八门炮同时独立地向一目标各射击一发炮弹,若有不少于2发炮弹命中目标时,目标就被击毁.如果每门炮命中目标的概率为0.6，求目标被击毁的概率.

解　设 i 门炮击中目标为事件A_i，i=2-8，设目标被击毁为事件B,各炮命中概率p=0.6，则

$$P(A_k) = P_8(k) = C_8^k (0.6)^k (0.4)^{8-k}$$

因此，目标被击毁的概率

$$P(B) = P(\bigcup_{k=2}^{8} A_k) = \sum_{k=2}^{8} P(A_k) = \sum_{k=2}^{8} P_8(k) = 1 - \sum_{k=0}^{1} P_8(k)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{1} C_8^k 0.6^k 0.4^{8-k} = 0.9914$$

第 4 周　　问 题

某市进行艺术体操赛，需设立两个裁判组，甲组3名,乙组1名．但组委会只召集到3名裁判，由于临近比赛，便决定调一名不懂行的人参加甲组工作，其中两裁判独立地以概率 p 作出正确裁定,而第三人以掷硬币决定，最后根据多数人的意见决定.乙组由 1 个人组成，他以概率 p 做出正确裁定．问哪一组做出正确裁定的概率大 ？

伯努利 (Jacob Bernoulli)
1654-1705

瑞士数学家,伯努利家属祖孙三代出过十多位数学家.这在世界数学史上绝无仅有.伯努利幼年遵从父亲意见学神学,当读了R.笛卡尔的书后,顿受启发,兴趣转向数学.

1694年,首次给出直角坐标和极坐标下的曲率半径公式,同年关于双纽线性质的论文,使伯努利双纽线应此得名.

1695年提出著名的伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n \quad n\neq 0,1.$$

此外对对数螺线深有研究，发现对数螺线经过各种变换后，结果还是对数螺线,在惊叹此曲线的奇妙之余,遗言

补充例子　从 1,2，… ,10 十个数字中有放回地任取5个数字，求取出的5个数字按由小到大排列,中间的那个数等于 4 的概率.

解　设取出的5个数按由小到大排列为

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$$

令$(x_3 = 4)$表示所求的事件

$$(x_3 = 4) = (x_3 \le 4) - (x_3 \le 3)$$

$(x_3 \le 4)$: **1,1,2,3,3; 1,1,2,3,4; 1,1,4,4,5; 1,1,4,5,8;**

… …

所取5个数字中至少有3个数字不大于4.

令 A_k 表示所取5个数字中恰有k 个不大于4

则 $$P(A_k)=C_5^k\left(\frac{4}{10}\right)^k\left(\frac{6}{10}\right)^{5-k}$$

$$(x_3\le 4)=\bigcup_{k=3}^{5}A_k \qquad A_kA_m=\varnothing,\ \ k\ne m$$

$$\Longrightarrow\quad P(x_3\le 4)=\sum_{k=3}^{5}P(A_k)=\sum_{k=3}^{5}C_5^k\left(\frac{4}{10}\right)^k\left(\frac{6}{10}\right)^{5-k}$$

类似可求得

$$P(x_3 \le 3) = \sum_{k=3}^{5} C_5^k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{5-k}$$

由于$(x_3 \le 3) \subset (x_3 \le 4)$，那么

$$P(x_3 = 4) = P(x_3 \le 4) - P(x_3 \le 3)$$

$$= \sum_{k=3}^{5} C_5^k \left(\frac{4}{10}\right)^k \left(\frac{6}{10}\right)^{5-k} - \sum_{k=3}^{5} C_5^k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{5-k}$$

$$= 0.1544.$$