沈阳农业大学 2014 年硕士研究生入学初试试题

考试科目：827 数学分析　共 3 页

分　　值：150 分

适用专业：生物数学

注意：答案必须写在答题纸上，写在题签上无效。

一、填空题（本题共 7 小题，每小题 5 分，满分 35 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(t^2)dt}{x^3}=$ ________.

2. 已知 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}$，则 $dy=$ ________.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}}=$ ________.

4. 设 $f'(e^x)=x+1$，则 $f(x)=$ ________.

5. 交换积分次序，则 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=$ ________.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ x^2+1 & 0\le x\le \pi\end{cases}$ 能展成傅里叶级数，则在点 $x=\pi$ 处收敛于________.

7. 设 L 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 按顺时针方向，则 $\int_L x^2ydx-y^2xdy$ ________.

二、单项选择题（本题共 7 小题，每小题 5 分，满分 35 分）

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}1 & ,xy\neq 0\\ x^2+y^2 & ,xy=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处[ ].

(A) 偏导数存在且连续；　(B) 可微；

(C) 偏导数不存在且不可微；　(D) 偏导数存在但不连续.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点有[ ]个.

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

3. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\varphi)$，$a>0$ 的弧长[ ].

(A) $8a$；　(B) $4a$；　(C) $4\pi a$；　(D) $2\pi a$.

4. 设D是由$0\le x\le 1, 0\le y\le \pi$所围成的闭区域，则$\iint\limits_{D} y\cos(xy)dxdy=$[ ].

(A) 2；　　(B) 2π；　　(C) $\pi+1$；　　(D) 0

5. 当$x\to 0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$为等价无穷小，则[ ].

(A) $a=1,b=-\frac{1}{6}$；　　(B) $a=1,b=\frac{1}{6}$；

(C) $a=-1,b=-\frac{1}{6}$；　　(D) $a=-1,b=\frac{1}{6}$.

6. 反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$当[ ]时发散.

(A) $p<1$；　　(B) $p\le 1$；　　(C) $p>1$；　　(D) $p\ge 1$.

7. 若$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为$8$，则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{3n+1}$的收敛半径是[ ].

(A) $\frac{1}{2}$；　　(B) 2；　　(C) 8；　　(D) $\frac{1}{8}$.

三、（本题满分 10 分）

证明：若$u=u(x,y)$，而$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2。$$

四、（本题满分 10 分）

证明：若函数$f(x)$在区间I满足利普希茨条件，即$\forall x,y\in I$，有$|f(x)-f(y)|\le K|x-y|$，其中K是常数，则$f(x)$在区间I一致连续。

五、（本题满分 10 分）

设$0<a<b$，函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：在(a,b)内存在一点ξ，使$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$。

六、（本题满分 10 分）

证明：若函数$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$可积，则函数$f(x)g(x)$在$[a,b]$也可积。

七、（本题满分 10 分）

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$的和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$的和。

八、（本题满分 10 分）

将正数 a 分成三个正数之和，使它的乘积最大，求此三个数。

九、（本题满分 10 分）

证明：无穷积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin x dx=\arctan b-\arctan a$，

其中 $a>0,b>0$。

十、（本题满分 10 分）

计算 $\iint\limits_{\Sigma}\left(x-y^2\right)dydz+\left(y+2xz\right)dzdx+zdxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 截得部分的下侧。