赣 南 师 范 学 院

2011 年硕士研究生招生入学考试试题

专业：基础数学　　　　科目：高等代数

共 4 页

注：1、此页为试题纸，答题请使用答题纸，答案写在此页无效。

　　2、本卷满分为 150 分，答题时间为 3 小时。

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 多项式 $f(x)=(x^2-2)^{2010}(x+\frac{1}{2})^{2011}$ 的常数项为 $\frac{1}{2}$.

2. 设 a,b,c 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=$ ________.

3. 齐次线性方程组 $A_{m\times n}x=0$ 只有零解的充要条件是 $|A|\neq 0$.

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $A^*=$ $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,x_2,x_3)=$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

6. 设 $V=\{(0,x_2,\cdots,x_n)\in P^n\}$，则 $\dim(V)=$ $n-1$.

7. 写出线性空间 $P^{2\times 2}$ 的一组基 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. 在 $P[x]_4$ 中有线性变换 σ 满足 $\sigma(f(x))=f(0)$，则 σ 的值域= ________.

9. 矩阵 A 的不变因子为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2$，那么 A 的初等因子为 $\lambda-1,\lambda-1,\lambda-1$

10. 当 $k=$ 7 时，向量 $\alpha=(2,3k,-1)$ 与 $\beta=(-k,1,7)$ 正交.

二、单选题（每小题 3 分，共 30 分）

1．实数域上次数大于 1 的多项式 $f(x)$ 有一个实根是 $f(x)$ 在实数域上可约的是（　　）．

A）必要非充分条件；　　　　B）充分必要条件；

C）充分非必要条件；　　　　D）既非充分又非必要条件．

2．行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$，则 $\begin{vmatrix} a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{vmatrix} =$（　　）．

B

A）$-d$；　　B）d；　　C）0；　　D）不确定．

3．$\lambda =$（　　），非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \lambda - 1 \\ x_2 + 4x_3 = \lambda - 2 \\ x_2 + \lambda x_3 = (\lambda-3)(\lambda-4)+(\lambda-2) \end{cases}$ 有无穷多解．

D

A）1；　　B）2；　　C）3；　　D）4．

4．若矩阵 A 满足 $A^2 + 2A - E = 0$，则 $A^{-1} =$（　　）．

A）$A+2E$；　　B）$\boldsymbol{A}$；　　C）$\boldsymbol{E}$；　　D）$2A$．

5．矩阵（　　）是正定的．

A）$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$；B）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$；C）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$；D）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6．设有 $P[x]_3$ 的四个向量组：$\{1, x+1, x^2\}$，$\{0, x, 2x^2\}$，$\{2, x, x^2-1\}$，$\{1, x+1, (x+1)^2\}$，则其中线性相关向量组只有（　　）．

A）1 个；　　B）2 个；　　C）3 个；　　D）0 个．

7．若 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，且 σ 是单射，则① $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$；② σ 是满射；③ σ 是可逆映射．以上（　　）

A）只有①正确；　B）只有②③正确；　C）①②③全正确；　D）只有①②正确．

A

8．以下（　　　）是正交矩阵.

A) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$； B) $\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$； C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$； D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D

9．n 级方阵 A 的元素均为 1，则 A 的最小多项式为（　　　）.

A) 1；　　　B) λ；　　　C) $\lambda-n$；　　　D) $\lambda^2-n\lambda$.

10．设 P^2 是数域 P 上的二维线性空间，$\alpha=(x_1,x_2)$，$\beta=(y_1,y_2)$，下列二元函数是 P^2 上的双线性函数的有（　　　）.

A) $f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2$；　　　B) $f(\alpha,\beta)=x_1^2y_1+x_2y_2^2$；

C) $f(\alpha,\beta)=k\neq 0$；　　　D) $f(\alpha,\beta)=|x_1y_1+x_2y_2|$.

三、计算题　（共 50 分）

1．计算下列行列式（第 1 小题 5 分，第 2 小题 10 分）

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -x \\ 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ -x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　　　2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\cdots\cdots n-1 & n \\ 2 & 3 & 4\cdots\cdots n & 1 \\ 3 & 4 & 5\cdots\cdots 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots \\ n & 1 & 2\cdots\cdots n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

2．（10 分）求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$ 的一个基础解系，并用此基础解系表出齐次线性方程组的全部解.

3．（10 分）设 ε_1，ε_2，…，ε_n 是 n 维线性空间 V 的一组基，求基 $\eta_1=\varepsilon_1$，$\eta_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，…，$\eta_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$ 到基 ε_1，ε_2，…，ε_n 的过渡矩阵．又若 α 关于基 ε_1，ε_2，…，ε_n 的坐标为 $(n,n-1,\cdots,1)$，求 α 关于基 η_1，η_2，…，η_n 的坐标.

4.（15 分）设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},$$

求正交矩阵 T，使 $T'AT$ 成对角形.

四、证明题（共 40 分）

1.（10 分）设 $g(x)|f_1(x)\cdots f_n(x)$，并且 $(g(x),f_i(x))=1, i=1,2,\cdots,n-1$. 证明：$g(x)|f_n(x)$.

2.（10 分）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 $k\times m$ 矩阵，秩 $P=m$，则线性方程组 $AX=B$ 与 $PAX=PB$ 同解.

3.（10 分）设 V 是数域 P 上 n 级方阵的全体所构成的线性空间，A, B 是两个 n 级矩阵，定义 V 上的变换：$\varphi(X)=AXB$，求证 φ 是线性空间 V 的线性变换，φ 是线性同构的充要条件是 A, B 都是可逆的.

4.（10 分）设 A, B 是两个 n 级正交矩阵，试证明：当 n 为奇数时，$|(A-B)(A+B)|=0$.

$|AB| = \frac{1}{|B|}$

$\lambda | \lambda^{\cdots}$

$-1 = \lambda | \lambda - n$

$\lambda - 1$

$\lambda - n = \lambda \cdot \frac{\lambda - n}{(\lambda)}$