

# 结构元件可靠性拓扑优化设计方法评述<sup>1)</sup>

李 鹏\* 姚卫星<sup>†,2)</sup>

\*(南京航空航天大学, 飞行器先进设计技术国防重点学科实验室, 南京 210016)

<sup>†</sup>(南京航空航天大学, 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)



姚卫星, 南京航空航天大学教授、博士生导师, 飞行器先进设计技术国防重点学科实验室主任, 南京航空航天大学学报副主编和其他 3 个期刊的编委. 1978—1988 年于西北工业大学飞机设计专业先后获得学士、硕士和博士学位, 1988—1990 年在清华大学机械工程系做博士后, 之后在南京航空航天大学任教, 1997—1998 年作为在高级访问学者公派德国. 一直从事飞行器综合设计和结构设计理论与技术的教学和研究工作, 已发表期刊学术论文 220 多篇, 著作 2 部, 教材 2 部. 获省部级科技进步奖 6 项.

**摘要** 结构元件可靠性拓扑优化考虑了工程实践中不确定因素的影响, 对于结构可靠性设计具有重要意义. 本文将结构元件可靠性拓扑优化设计方法分为嵌套优化法、解耦法、单循环法、可靠性安全系数法. 本文首先介绍了各类可靠性拓扑优化模型; 然后系统回顾了以上方法的理论基础以及研究现状与应用; 最后对以上方法进行了总结, 探讨了它们的优缺点和发展方向.

**关键词** 可靠性分析, 拓扑优化, 嵌套优化法, 解耦法, 单循环法

中图分类号: V214.19 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-14-228

## REVIEW OF RELIABILITY-BASED TOPOLOGY OPTIMIZATION METHODS FOR STRUCTURAL COMPONENT<sup>1)</sup>

LI Peng\* YAO Weixing<sup>†,2)</sup>

\*(Key Laboratory of Fundamental Science for National Defense-Advanced Design Technology of Flight Vehicle, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

<sup>†</sup>(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract** In the reliability-based topology optimization, the uncertainty is considered during the engineering practice, which is important in a structural reliability design. At present, the most commonly used reliability-based topology optimization methods for a continuum structure are: the nested optimization method, the decoupling method, the single-loop method and the reliability safety coefficient method. Firstly, the mathematical models of the reliability-based topology optimization are introduced. Then, the theoretical basis of

2014-07-30 收到第 1 稿, 2014-11-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (51275241).

2) E-mail: wxyao@nuaa.edu.cn

**引用格式:** 李鹏, 姚卫星. 结构元件可靠性拓扑优化设计方法评述. 力学与实践, 2015, 37(4): 466-474

Li Peng, Yao Weixing. Review of reliability-based topology optimization methods for structural component. *Mechanics in Engineering*, 2015, 37(4): 466-474

above methods are systematically discussed, and their current researches and applications are briefly reviewed. Finally, the advantages, disadvantages and development trends of above methods are discussed.

**Key words** reliability analysis, topology optimization, nested optimization method, decoupling method, single-loop method

## 引言

在实际工程结构系统中, 结构的材料特性、几何尺寸和载荷等不可避免地具有不确定性. 由于很多不确定性根源于工程问题的复杂性, 因此传统的确定性结构分析和设计方法难以准确反映工程实际情况. 在这一背景下, 不确定结构分析和设计方法被众多学者提出并日益显现其重要性.

在结构概率可靠性优化设计方面, Kharmanda 等<sup>[1]</sup>介绍了确定性拓扑优化中的可靠性约束问题; Zhang 等<sup>[2]</sup>建立了水平集函数为设计变量、刚度极小化为目标、具有可靠性约束的连续体结构拓扑优化模型; 陈建军等<sup>[3]</sup>研究了具有位移、应力可靠性约束的桁架结构拓扑优化问题; Jung 等<sup>[4]</sup>研究了三维几何非线性结构的可靠性拓扑优化问题.

在工程结构应用方面, Maute 等<sup>[5]</sup>研究了微机电系统的可靠性拓扑优化应用; 余启志等<sup>[6]</sup>将可靠性理论引入车架结构的优化设计, 对多工况冲击载荷作用下车架结构进行了拓扑优化; 黄文波等<sup>[7]</sup>研究了工字型截面构建的船体结构可靠性优化问题; 刘家学等<sup>[8]</sup>研究了战术导弹结构的可靠性优化问题; 刘钢等<sup>[9]</sup>基于优化准则法, 对杆系结构和机翼盒段可靠性进行了优化设计. 从中可以看出, 概率可靠性优化设计目前仍然是结构优化领域中的一个研究热点, 且具有非常广阔的发展空间.

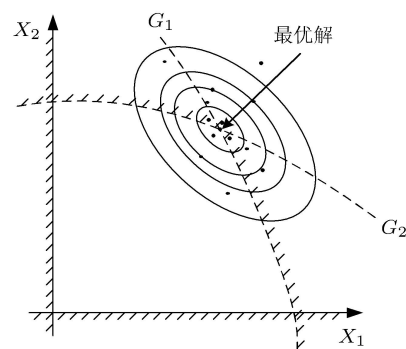
目前, 对可靠性拓扑优化理论的研究较少, 且大部分研究致力于对单个拓扑优化或可靠性分析过程的改进, 对于可靠性拓扑优化实现策略的研究阐述不足. Yang 等<sup>[10]</sup>、Mozumder 等<sup>[11]</sup>对国内外结构可靠性优化设计方面的研究成果进行了总结. Yang 在文中阐述了传统近似法 (traditional approximation method, TAM)、单循环单向量法 (single loop single variable, SLSV)、顺序优化法 (sequential optimization and reliability assessment, SORA) 等可靠性优化设计问题的求解策略, 并通过算例与传统嵌套循环法进行了对比, 但是此文中对优化方法的描述并不完全, 且没有涉及可靠性拓扑优化领域. Mozumder 阐述对比了 Kharmanda 提出的启发式求解方法和

Tovar 提出的混合细胞自动机法, 对于其他方法并未描述. 本文对大量文献进行了系统回顾总结, 重点研究了概率可靠性拓扑优化过程的实现方法, 根据拓扑优化过程中可靠性处理方式的不同对概率可靠性拓扑优化方法进行了分类, 通过对比分析了各种方法的优缺点及适用范围.

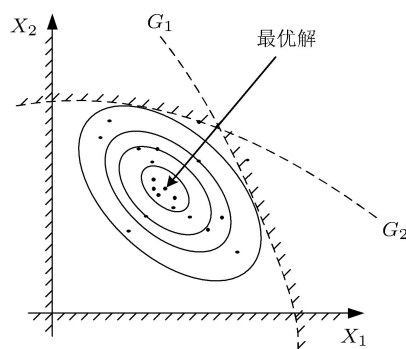
## 1 结构元件可靠性拓扑优化方法

### 1.1 可靠性优化设计模型

可靠性优化设计 (reliability-based design optimization, RBDO) 的主要目的是在满足可靠性要求的条件下使目标函数最小化. 图 1 展示了确定性和随机可靠性优化设计的不同. 图 1 (a) 中, 最优解是基于设计变量平均值得到的, 当考虑变量不确定性时会出现因违背约束条件而失效的情况. 然而



(a) 确定性优化设计



(b) 可靠性优化设计

图 1 确定性和可靠性优化设计理论

图 1(b) 中, 因为是在考虑设计变量波动的情况下得到最优设计点, 因此结构具有良好的可靠性.

典型的可靠性优化设计模型可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X} f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_P) \\ \text{s.t. } P_r[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq 0] \geq R \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $f$  为目标函数;  $\mathbf{d}$  为所有确定性设计变量的向量;  $\mathbf{X}$  是所有随机设计变量的向量;  $\mathbf{P}$  为所有随机参数的向量;  $\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_P$  分别表示为  $\mathbf{X}, \mathbf{P}$  的均值向量;  $R$  为可靠性指标.

可靠性拓扑优化设计 (reliability-based topology optimization, RBTO) 是在 RBDO 的基础上发展而来, 基于变密度法的 RBTO 模型可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_P) \\ \text{s.t. } P_r[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{P}) \leq 0] \geq R \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中,  $f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_P)$  为目标函数.

第  $i$  个约束的实际可靠度为  $P_{r_i} = P[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{P}) \leq 0]$ . 在可靠性优化设计问题中, 每个约束的实际可靠度必须大于目标可靠度. 可靠度用一阶表达式近似表示为  $P_r = \Phi(\beta_t)$ , 其中  $\beta_t$  为目标可靠性指标,  $\Phi$  为标准正态空间的累积分布函数.

结合以上推导可知

$$P_r(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{P}) \leq 0) = F_{G_i}(0) \leq \Phi(\beta_t) \quad (3)$$

因此, 结构可靠度  $P_r$  可以用极限状态方程  $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{P})$  的累积分布函数表示为

$$F_{G_i}(0) = P_r[G_i(\mathbf{d}, \mathbf{P}) \leq 0] = \int_{G_i(\mathbf{d}, \mathbf{P}) \leq 0} \dots \int f_P(\mathbf{d}, \mathbf{P}) d\mathbf{P} \quad (4)$$

式中,  $f_P(\mathbf{d}, \mathbf{P})$  为所有随机变量的联合概率密度函数.

### 1.2 可靠性优化设计方法分类

在传统方法中, RBDO 问题通常由嵌套循环法解决. 在每一个优化设计的迭代循环中都包括另一个可靠性分析 (内循环) 的过程. 嵌套循环法在外层优化循环每前进一步时, 内层都需要进行完整的可靠性分析计算, 计算效率很低.

近年来, 为了提高计算效率, 学者们相继提出了两类解决 RBDO 问题的策略. 第一类称为解耦法,

此方法把嵌套循环过程解耦为单个循环中确定性优化设计和可靠性分析顺序执行的过程. 此类型中常用方法为顺序优化法, 此方法通过前一个循环的可靠性信息把不满足可靠性要求的违规约束逐渐转移到可行域内.

第二类方法把 RBDO 问题转化成一个等效的单循环确定性优化过程. Chen 等 [12] 第一次尝试用完全单循环法求解 RBDO 问题, 提出了单循环单向量法 (SLSV). Liang 等 [13-14] 提出 KT-单循环法 (Kuhn-Tucker single loop method, KT-SLM), 此方法中通过 Kuhn-Tucker 条件取消了内循环过程, 把嵌套循环转换为单循环过程.

可靠性拓扑优化设计是可靠性优化设计的延续和发展, 一些在 RBDO 问题中适用的优化策略同样适用于 RBTO 问题. 本文对 RBDO 优化策略进行了研究, 对于适用于 RBTO 问题的方法进行了总结分类. 根据优化过程中对可靠性约束处理方式的不同, RBTO 问题的优化策略可分为: 嵌套优化法, 解耦法, 单循环法, 可靠性安全系数法.

## 2 RBTO 问题的优化策略

### 2.1 嵌套优化法

#### 2.1.1 方法原理

嵌套优化方法分为外循环和内循环. 外循环为拓扑优化过程, 可以用渐进结构法、变密度法等进行拓扑优化. 由于在优化过程中引入了可靠性约束, 外循环在每步迭代过程中需要进行可靠性分析, 判断结构是否满足可靠性要求, 此过程即为内循环. 其优化流程如图 2.

通常可靠性拓扑优化问题基本模型如式 (2) 所

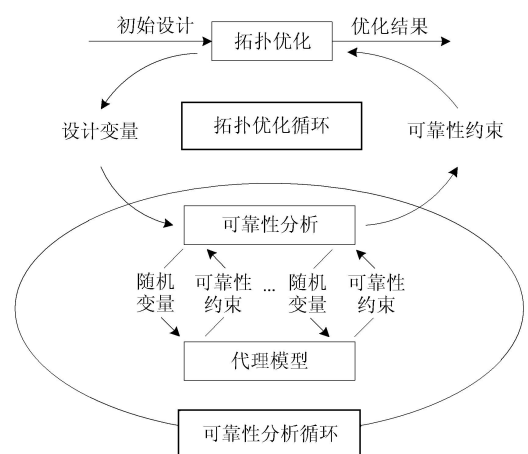


图 2 嵌套循环法流程图

示, 其中  $G_i$  通常为隐式的极限状态方程, 因此在每步迭代过程中需要用 Monte Carlo 法和响应面法近似得到状态方程的表达形式. 依据内循环可靠性表达形式的不同, 嵌套优化法可分为可靠度指标法 (reliability index approach, RIA) 和功能函数法 (performance measure approach, PMA).

### (1) 可靠度指标法

当用可靠度指标来表示可靠性约束的时候, 优化模型可以表示为

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_P) \\ \text{s.t. } \beta \leq \beta_t \end{array} \right\} \quad (5)$$

为了得到可靠性指标, 需要调用内循环求解. 由可靠性指标的几何意义可知, 在标准正态空间中, 可靠性指标即为原点到近似极限状态方程的最小距离  $\|\mathbf{u}\|$ . 因此, 一阶可靠性指标可以表示为

$$\left. \begin{array}{l} \min \beta = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} \\ \text{s.t. } G(\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{u}$  为标准正态空间中, 原点到近似极限状态方程的向量. 失效面上模型最优解对应的点称为设计验算点 (most probable point, MPP). 设计验算点可以通过一次二阶矩法或传统的序列线性规划法和序列二次规划法求得.

### (2) 功能函数法

功能函数法可以看作是可靠性指标法的逆过程. 在满足设计验算点到原点距离等于可靠性指标的条件下, 求得状态方程的最小值, 再通过比较最小值是否大于零来判断结构是否满足可靠性约束.

$$\left. \begin{array}{l} \min G(\mathbf{u}) \\ \text{s.t. } \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = \beta_t \end{array} \right\} \quad (7)$$

此模型的最优点为满足可靠性指标约束下的设计验算点. 此模型可以通过常规优化方法或先进平均值法、共轭平均值法、混合平均值法等方法求解.

#### 2.1.2 方法的扩展与应用

传统求解 RBDO 问题的策略中, 对于可靠性的评估广泛使用可靠度指标法, 此方法每次迭代中都需要计算精确的可靠度, 计算量大、效率低. 针对这一问题, Tu 等 [15] 提出功能度量法, 与可靠性指标法相比, 功能度量法被认为更高效、稳定性强和较小依赖于随机变量的概率分布类型. Youn 等 [16] 结合

可靠性分析过程中的先进平均值法和共轭平均值法提出了混合平均值的求解策略, 通过算例证明了混合平均值具有更高的计算效率并且适用于多种概率分布. Luo 等 [17] 通过嵌套循环法对机翼结构进行了可靠性优化设计研究. Kim 等 [18] 对静态和特征值问题的可靠性拓扑优化问题进行了研究. Kim 等 [19] 研究了基于渐进结构法的可靠性拓扑优化问题, 考虑了材料属性、工作载荷、几何尺寸的不确定性影响, 用二维板算例证明了方法的可行性. Eom 等 [20] 结合双向渐进结构法对三维结构可靠性拓扑优化问题进行了研究, 并且通过标准响应面法来近似估计极限状态方程, 最后对比了二维结构可靠性拓扑优化与三维结构的不同.

嵌套优化方法虽然在一定程度上满足了可靠性约束, 得到了基于可靠性约束的拓扑优化结果, 但是由于在每步的迭代过程中都需要引用内循环来解决可靠性约束问题, 导致计算量大幅增加, 虽然对于简单的平板结构影响较小, 但是对于大型的工程实际问题可能需要较长的时间, 甚至无法得到最终的拓扑优化结构.

## 2.2 解耦法

### 2.2.1 SORA 法优化模型

Du 等 [21-23] 基于解耦思想提出了顺序优化法 (SORA), 成功地解耦了拓扑优化过程和可靠性分析过程, 使得计算量大幅降低. SORA 的基本思想是通过将随机约束转化为近似等价的确定性约束, 把优化与可靠性分析两个过程进行解耦, 先执行确定性优化, 再执行可靠性分析; 并提出了一种有效的逆 MPP 搜索, 从而极大地提高了计算效率.

SORA 基于概率的可靠性优化设计基本模型如式 (2). 在可靠性优化过程中, 特别是多约束优化问题, 一些约束并不起作用, 它们远离设计点, 但是为了得到它们的准确可靠度, 往往需要大量的计算. 事实是, 设计者关心的是该约束是否满足可靠性要求, 而不是具体的可靠度数值. 因此文献 [21] 根据分位点的思想提出了等效可靠性优化设计模型

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X} f(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\mu}_P) \\ \text{s.t. } G_i^R(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right\} \quad (8)$$

式中,  $G_i^R$  来源于  $P_r(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P}) \leq G_i^R) = R$ , 称为函数  $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$  的  $R$ -分位点. 即  $G_i$  大于  $R$  分位点  $G_i^R$  的概率为  $R$ . 当  $G_i^R \leq 0$  时, 两模型中的约束等效. 这样就将原来的概率约束转化为评估  $G_i^R$  是

否小于零的常规形式约束. 当通过一阶二次矩法计算可靠度时, 分位点  $G_i^R$  可用逆 MPP 法求得, 对于给定的可靠度  $R$ , 对应的可靠性指标为

$$\beta = \Phi^{-1}(R) \tag{9}$$

逆 MPP 可通过下列优化模型求得

$$\left. \begin{aligned} \min G(\mathbf{u}) \\ \text{s.t. } \|\mathbf{u}\| = \beta = \Phi^{-1}(R) \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

式中  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_X, \mathbf{u}_P)$ .

通过对上式求解, 可得到对应可靠度为  $R$  的逆 MPP 点, 即  $\mathbf{u}_{\text{MPP}}$ . 约束条件的  $R$  分位点  $G_i^R$  为

$$G_i^R = G_i(\mathbf{u}_{\text{MPP}}) = G_i(\mathbf{X}_{\text{MPP}i}, \mathbf{P}_{\text{MPP}i}) \tag{11}$$

则模型中的可靠性约束可等价

$$G_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}_{\text{MPP}i}, \mathbf{P}_{\text{MPP}i}) \leq 0 \tag{12}$$

### 2.2.2 SORA 法优化流程

SORA 方法的流程如图 3 所示.

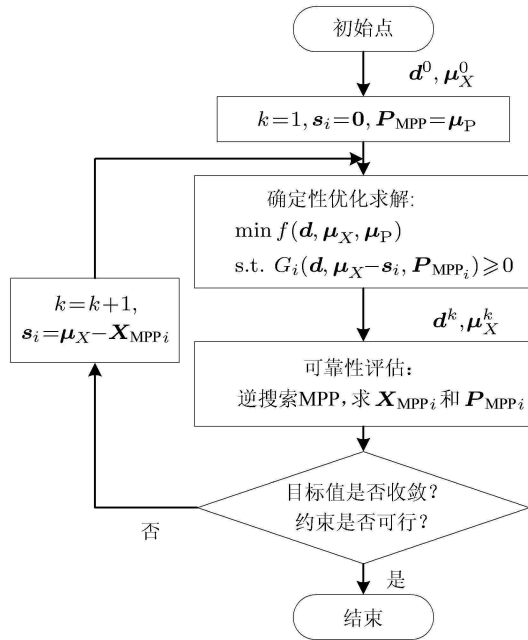


图 3 SORA 法流程图

在第一个循环中, 因为没有上次循环的逆 MPP 信息, 将初始设计参数  $\mathbf{X}_{\text{MPP}i}, \mathbf{P}_{\text{MPP}i}$  设为其各自的均值  $\mu_X, \mu_P$ , 然后进行可靠性优化设计, 其对应模型为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mu_X} f(\mathbf{d}, \mu_X, \mu_P) \\ \text{s.t. } G_i(\mathbf{d}, \mu_X, \mu_P) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

在第一个循环中, 求解确定性模型后得到的最优解  $\mu_X^{(1)} = (\mu_{X1}^{(1)}, \mu_{X2}^{(1)})$  落在起作用的约束边界上. 当考虑到变量  $\mathbf{X}$  的随机性, 此时的可靠度只有一半左右. 对模型求解后, 需要对结构进行可靠性分析, 求得满足可靠度  $R$  下的逆 MPP 点  $\mathbf{X}_{\text{MPP}}^{(1)}$ . 此时  $\mathbf{X}_{\text{MPP}}^{(1)}$  落在失效区域. 但是满足可靠性要求的设计点的  $R$  分位点  $G_i^R$  应该小于等于零, 即为了保证可靠性约束的可行性, 逆 MPP 点应落在可行域内. 因此, 第二循环中, 约束边界应向可行域内移动, 使 MPP 落在约束边界上, 然后生成一与原来可靠性优化等效的确定性优化模型. 假设用  $\mathbf{s}$  表示转移向量, 则确定性模型中的等效约束为

$$G(\mu_X - \mathbf{s}) \leq 0 \tag{14}$$

为了保证 MPP 落在约束边界上, 转移向量  $\mathbf{s}$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{s} = (s_1, s_2) &= \mu_X^{(1)} - \mathbf{X}_{\text{MPP}}^{(1)} = \\ &(\mu_{X1}^{(1)} - \mathbf{X}_{\text{MPP}1}^{(1)}, \mu_{X2}^{(1)} - \mathbf{X}_{\text{MPP}2}^{(1)}) \end{aligned} \tag{15}$$

通常, 可靠性优化问题中包含确定性变量  $\mathbf{d}$ , 随机变量  $\mathbf{X}$ , 随机参数  $\mathbf{P}$ .  $\mathbf{d}$  可看作标准差为零的随机变量, 其转移向量为  $\mathbf{0}$ . 因为参数  $\mathbf{P}$  不作为设计变量, 可以用前一个循环的  $\mathbf{P}_{\text{MPP}}$  作为下一个循环确定性模型中约束条件的参数.

因此, 第  $k$  次迭代中, 优化模型可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mu_X} f(\mathbf{d}, \mu_X, \mu_P) \\ \text{s.t. } G_i(\mathbf{d}, \mu_{Xi} - \mathbf{s}_i^{(k)}, \mathbf{P}_{\text{MPP}i}^{(k-1)}) \leq 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

式中,  $\mathbf{s}_i^{(k)} = \mu_X^{(k-1)} - \mathbf{X}_{\text{MPP}i}^{(k-1)}$ .

在第 1 个循环中, 得到的是基于随机参数均值为设计点的最优解, 因此可靠度较低不满足要求, 在第 2 个循环中设计点向可行域移动, 以满足可靠性约束要求. 如此迭代循环, 等效确定性模型将逐渐逼近原可靠性优化问题中的概率约束, 直到满足可靠性要求为止.

### 2.2.3 方法的扩展与应用

解耦法的提出为求解 RBDO 问题提供了一个新的思路. Royset 等 [24-25] 提出了一种新的解耦法, 把原优化问题转换成半无限优化问题, 使可靠性优

化问题可以通过任意优化策略和可靠性分析方法解决. 并且解耦后的拓扑优化过程可以使用现有的商业软件实现, 使可靠性拓扑优化问题更具有实用价值. Patel 等 [26-27] 将求解确定性拓扑优化问题的混合细胞自动机法 (hybrid cellular automaton, HCA) 和评估结构可靠性的 PMA 法结合起来, 提出了基于可靠性的拓扑优化设计的新方法. 在 HCA 法中, 每个单元的状态由密度和应变能决定.

从优化流程可以看出, 解耦法把可靠性分析循环从优化循环中分离出来, 并用一个带有常规约束的等效确定性优化模型代替了原概率约束模型. 与嵌套循环法相比, 解耦法极大地降低了计算量. 因为完全解耦优化过程和可靠性分析过程, 更利于通过编程和用现有软件实现 RBDO 问题, 可以解决实际工程问题, 更有实用性. 虽然解耦法能够大幅提高求解 RBDO 问题的效率, 但是对于一个复杂且包含很多约束的 RBDO 问题, 解耦法会出现收敛缓慢, 甚至发散的情况.

### 2.3 单循环法

为了降低嵌套优化法的计算量, 学者们提出了很多近似优化方法, 这些方法中取消了内循环过程, 从而把嵌套优化法转化为单循环过程, 称为单循环法. 目前, 应用较多的单循环法主要有: 单循环单向量法 (SLSV)、KT-单循环法 (KT-SLM).

#### 2.3.1 单循环单向量法

无论是嵌套循环法还是解耦法, 在可靠性分析过程中都是通过建立优化模型来寻找 MPP 点, 计算量较大. SLSV 用近似估算的方法避免了计算 MPP 点的过程.

假设  $\sigma_X$  表示随机设计变量  $X$  的标准差向量, 引入向量  $S = X/\sigma_X$ , 由于 MPP 点必须满足概率约束

$$G_i(d, X) = G_i(\sigma_X S) = 0 \quad (17)$$

因此, 对应于向量  $S^*$  的设计验算点 MPP ( $S^*$ ) 可以通过由平均值点 ( $\mu_S$ ) 和失效面上 MPP 点确定的向量  $S^*$  得到, 如图 4.

$$S^* = \mu_S + \beta_t \alpha^* \quad (18)$$

其中,  $\alpha^* = \nabla_S G(S) / \|\nabla_S G(S)\|$  为 MPP 点处的单位法向量.

在 SLSV 法中, 基于变密度法的可靠性拓扑优化 (RBTO) 模型可以表示为

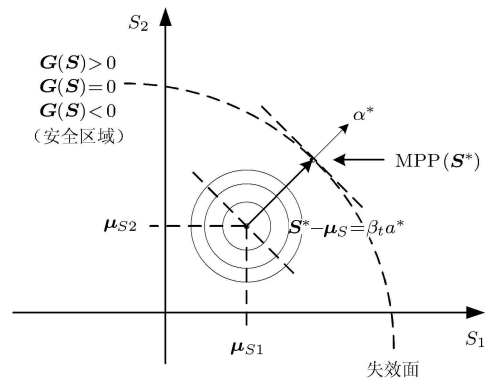


图 4 SLSV 法原理示意

$$\left. \begin{aligned} \min_d f(d) \\ \text{s.t. } G_i^*(d, x_{E_i}^{*(k)}, x_{F_i}^{*(k)}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (19)$$

式中,  $f$  表示结构总体积, 弹性模量  $x_{E_i}^{*(k)}$  与载荷  $x_{F_i}^{*(k)}$  看作随机参数. MPP 点可以通过下式近似求得

$$x_{E_i}^{*(k)} = \mu_E + \sigma_E \beta_t \alpha_{E_i}^{*(k-1)} \quad (20)$$

其中

$$\alpha_{E_i}^{*(k-1)} = \frac{\sigma_E (\partial G / \partial x_{E_i})^{(k-1)}}{\sqrt{\sigma_E^2 (\partial G / \partial x_{E_i})^{2(k-1)} + \sigma_F^2 (\partial G / \partial x_{F_i})^{2(k-1)}}$$

$\mu_E$  和  $\sigma_E$  为弹性模量均值和标准差.

SLSV 法取消了内循环过程且不需要计算每个约束的可靠度指标  $\beta_i$ , 因此计算效率较高. SLSV 法的优化流程如图 5.

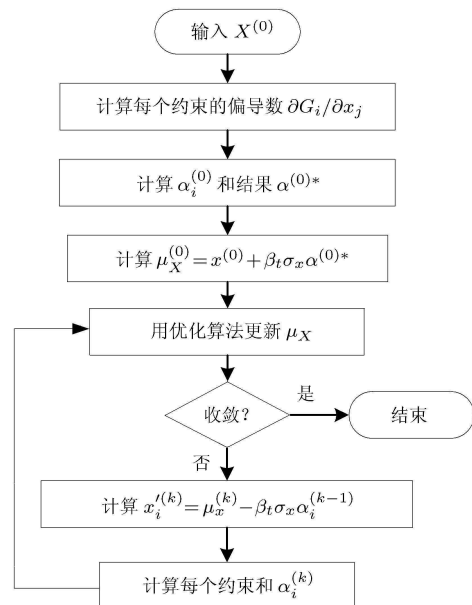


图 5 SLSV 法流程

### 2.3.2 方法的扩展与应用

Chen 等<sup>[12]</sup>第一次尝试用单循环解决 RBDO 问题,提出了单循环单向量法 (SLSV),在此方法中把所有变量转换到一个不同于标准正态空间的简化、不相关的正规化空间,然后应用上一个循环 MPP 点处的最速下降方向找到新的迭代点. Wang 等<sup>[28]</sup>用此方法解决了非正态分布 RBDO 问题,并指出 SLSV 的计算效率严重依赖于初始设定点. Min 等<sup>[29]</sup>把 SLSV 法扩展到可靠性拓扑优化领域,并用算例证明此方法比嵌套循环法更高效.

Liang 等<sup>[13-14]</sup>提出一种新的单循环策略 (KT-SLM),通过 Kuhn-Tucker 条件估算可靠性约束的设计验算点,把内循环用等效确定性约束代替,从而把嵌套循环问题转换成等效的确定性优化问题. KT-SLM 法在 SLSV 法的基础上发展得到,但是此方法降低了对初始点的依赖性. Shan 等<sup>[30]</sup>提出了可靠性设计空间的概念,在这一空间内任何设计都满足可靠性约束,从而把 RBDO 问题转化为这一空间内确定性优化设计过程. Nguyen 等<sup>[31-32]</sup>研究了多约束的系统可靠性优化问题. Silva 等<sup>[33-34]</sup>基于单循环策略对组件的可靠性拓扑优化问题进行了研究,通过对比发现,为了提高结构可靠度,单循环法得出了与确定性拓扑优化不同的传力路径,更重要的是此文献中应用现有商用软件对二维和三维算例进行了可靠性拓扑优化设计,证明了单循环法的实用性.

单循环法完全消除了内循环可靠性分析过程,相比以前的方法计算效率得到了提升,且单循环法模型简单,优化流程容易实现,适合解决实际工程问题.同时单循环法也有一些缺陷,例如: SLSV 法对于初始点依赖性较强; KT-SLM 法基于梯度法求解优化模型,因此有可能最终结构为局部最优解而非全局最优.

## 2.4 可靠性安全系数法

### 2.4.1 方法原理

在可靠性优化设计中,由于其约束通常以概率形式给出,且往往为设计变量的隐函数,使得常规的优化方法难以直接应用,而且设计过程的每一步都要进行结构可靠性分析,这就增加了处理问题的难度和计算量.因此,有必要对结构可靠性约束进行等价显式化处理.考虑到传统的安全系数法为广大工程人员所熟悉和接受,而且具有形式简单和应用方便等特点.在传统的安全系数设计中引入可靠性,从而可以得到具有可靠性意义的安全系数.这

种可靠性安全系数既保留了原安全系数的优点,又考虑到了可靠性的影响.

结构单元的可靠性约束一般形式是

$$\left. \begin{aligned} P_r &\geq P_r^* \\ P_r &= P\{G(R, S) > 0\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式中,  $G(R, S)$  为功能函数,此处  $R$  为结构强度,  $S$  为结构应力(本小节中的  $S$  和  $R$  与其他小节不同),  $P_r^*$  为结构可靠性指标值.

可靠性安全系数法中引入了可靠性安全系数的概念,通过一次二阶矩法推导出了可靠性安全系数  $K_{O\beta}$  与变量  $R, S$  的变异系数  $\gamma_R, \gamma_S$  以及给定的可靠性指标的函数关系式

$$K_{O\beta} = \left[ 1 + \beta^* (\gamma_R^2 + \gamma_S^2 - \beta^* \gamma_R^2 \gamma_S^2)^{1/2} \right] / (1 - \beta^{*2} \gamma_R^2) \quad (22)$$

仿照传统的安全系数设计准则,则以可靠性安全系数  $K_{O\beta}$  给出的安全设计准则为

$$\mu_R \geq K_{O\beta} \mu_S \quad (23)$$

式中,  $\mu_R$  和  $\mu_S$  为强度  $R$  和载荷  $S$  的均值,通过这样的显式化方法,成功地把可靠性分析和结构拓扑优化设计分开,把基于可靠性约束的拓扑优化问题转化为常规约束的拓扑优化问题.

满足应变能概率约束的结构拓扑优化设计数学模型的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}) &= \sum_{i=1}^n d_i v_i \\ \text{s.t. } P^* - P_i\{C_O - C\} &\leq 0, \quad 0 \leq d_i \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中,  $f(\mathbf{d})$  为结构总体积的均值,  $C_O$  为许用应变能随机变量,  $C$  为计算得到的应变能随机变量,  $P^*$  为给定的可靠度概率值,  $P_i\{\cdot\}$  表示计算得到的应变能概率值,  $d_i$  为设计变量.

当引入可靠性安全系数的概念后,通过约束显式化处理,原基于概率的连续体结构拓扑优化模型可转化为如下等价常规形式的结构拓扑优化数学模

型

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} f(\mathbf{d}) &= \sum_{i=1}^n d_i v_i \\ \text{s.t. } K_{O\beta} \mu_C - \mu_{C_0} &\leq 0 \\ 0 &\leq d_i \leq 1 \\ K_{O\beta} &= \left[ 1 + \beta_{C_0}^* (\gamma_{C_0}^2 + \gamma_C^2 - \beta_{C_0}^* \gamma_{C_0}^2 \gamma_C^2)^{1/2} \right] / \\ &\quad (1 - \beta_{C_0}^{*2} \gamma_{C_0}^2) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中  $K_{O\beta}$  是由给定的可靠度指标及应变能的变异系数共同确定的, 从而体现出可靠性的要求。

#### 2.4.2 方法的扩展与应用

陈建军等<sup>[35]</sup>在传统的安全系数设计中引入可靠性, 提出了将概率约束等价显式化处理的可靠性安全系数法, 降低了可靠性约束的处理难度, 减少了结构优化设计中可靠度计算的工作量, 自此可靠性安全系数法在国内得到较为广泛的应用。崔明涛<sup>[36]</sup>基于此研究了柔性结构可靠性拓扑优化问题。宋宗凤<sup>[37]</sup>研究了几何和物理参数均为随机变量的平面连续体结构在结构总应变能约束下的拓扑优化设计问题。刘国梁等<sup>[38]</sup>对结构的概率疲劳和非概率疲劳强度可靠性进行了分析, 构建了以结构柔度最小为目标函数, 以体积比和疲劳可靠性为约束的连续体结构拓扑优化设计模型。

可靠性安全系数法另辟蹊径, 参考传统安全系数的理念提出的可靠性安全系数的概念, 模型的不确定性全部由可靠性安全系数来体现。此方法虽然简化了优化模型, 把原 RBTO 问题简化为一确定性拓扑优化过程, 但是此方法没有统一适用的可靠性安全系数表达式, 对于不同的优化问题需要重新推导各不确定因素与可靠性安全系数的函数关系。

### 3 总 结

在实际工程结构中不同程度地存在着或大或小的误差及不确定性, 因此, 研究这些不确定性对结构响应的影响有着重要的理论意义与学术价值。在结构分析与设计中亦应该考虑这些不确定因素。对连续体结构进行可靠性拓扑优化是目前拓扑优化领域中前沿性研究课题之一, 但由于该问题的研究难度较大, 富有挑战性, 迄今为止见到的文献甚少, 故对此问题的研究还有很大的空间。

可靠性拓扑优化方法使得最终得到的结构具有较高的可靠性, 能够承受各种不确定因素的影响。

结构的可靠性拓扑优化问题, 一般涉及结构应力分析、敏度分析、可靠性分析及迭代优化计算等, 优化设计难度较大, 研究方法理论较为缺乏。目前, 结构可靠性优化问题的求解方法存在的主要问题在于计算量大、计算效率低、只能适用于简单桁架或二维结构的优化设计, 因此, 开发可用于实际工程问题的速度快、精度高的求解方法非常必要。

本文对不确定性结构拓扑优化的研究现状做了总结和分析, 按照可靠性约束处理方式的不同把可靠性拓扑优化设计方法分为: 嵌套循环法、解耦法、单循环法、可靠性安全系数法。本文阐述了各类方法的理论和流程, 比较了各类方法的优缺点和适用范围, 从而得出了一些有意义的结论。

### 参 考 文 献

- 1 Kharmanda G, Olhoff N, Mohamed A, et al. Reliability-based topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26(5): 295-307
- 2 Zhang XM, Ouyang GF. A level set method for reliability-based topology optimization of compliant mechanisms. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2008, 51(4): 443-455
- 3 陈建军, 曹一波, 孙怀安. 多工况下具有体系可靠性约束的桁架结构拓扑优化设计. *固体力学学报*, 2000, 21(1): 11-18
- 4 Jung HS, Cho S. Reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures with loading and material uncertainties. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2004, 41(3): 311-331
- 5 Maute K, Frangopol DM. Reliability-based design of MEMS mechanisms by topology optimization. *Computers & Structures*, 2003, 81(8): 813-824
- 6 余启志, 陈燕. 基于拓扑优化的车架结构可靠性设计. *汽车科技*, 2010, (5): 35-38
- 7 黄文波, 蔡荫林. 工字型截面构件的船体板架结构可靠性优化. *上海交通大学学报*, 2000, 34(1): 67-71
- 8 刘家学, 郑昌义. 战术导弹结构可靠性优化问题研究. *系统工程与电子技术*, 2002, (5): 106-108
- 9 刘钢, 王立凯, 段世慧等. 基于准则法的飞机薄壁结构可靠性优化设计. *计算机辅助工程*, 2013, 22(3): 29-33
- 10 Yang RJ, Gu L. Experience with approximate reliability-based optimization methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26(1-2): 152-159
- 11 Mozumder CK, Patel NM, Tillotson D, et al. An investigation of reliability-based topology optimization. 11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Virginia, America, 2006
- 12 Chen X, Hasselman TK, Neill DJ. Reliability based structural design optimization for practical applications. 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC structures, structural dynamics, and materials conference, Florida, America, 1997



- 13 Liang J, Mourelatos ZP, Tu J. A single-loop method for reliability-based design optimization. ASME 2004 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Salt Lake City, America, 2004
- 14 Liang J, Nikolaidis E, Mourelatos ZP. A single-loop approach for system reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design*, 2007, 129(12): 1215-1224
- 15 Tu J, Choi KK, Park YH. A new study on reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design*, 1999, 121(4): 557-564
- 16 Youn BD, Choi KK, Park Y. Hybrid analysis method for reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design*, 2003, 125(2): 221-232
- 17 Luo X, Grandhi RV. Astros for reliability-based multidisciplinary structural analysis and optimization. *Computers & Structures*, 1997, 62(4): 737-745
- 18 Kim C, Wang S, Rae K, et al. Reliability-based topology optimization with uncertainties. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2006, 20(4): 494-504
- 19 Kim SR, Park JY, Lee WG, et al. Reliability-based topology optimization based on evolutionary structural optimization. *International Journal of Mechanical Systems Science and Engineering*, 2008, 1(3): 135-139
- 20 Eom YS, Yoo KS, Park JY, et al. Reliability-based topology optimization using a standard response surface method for three-dimensional structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(2): 287-295
- 21 Du X, Chen W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. *Journal of Mechanical Design*, 2004, 126(2): 225-233
- 22 Du X, Guo J, Beeram H. Sequential optimization and reliability assessment for multidisciplinary systems design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 35(2): 117-130
- 23 Du X, Sudjianto A, Huang B. Reliability-based design with the mixture of random and interval variables. *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(6): 1068-1076
- 24 Royset JO, Kiureghian AD, Polak E. Reliability-based optimal design of series structural systems. *Journal of Engineering Mechanics*, 2001, 127(6): 607-614
- 25 Royset JO, Der Kiureghian A, Polak E. Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach. *Reliability Engineering & System Safety*, 2001, 73(3): 213-221
- 26 Patel NM, Agarwal H, Tovar A, et al. Reliability based topology optimization using the hybrid cellular automaton method. 1st AIAA Multidisciplinary Design Optimization Specialist Conference, Austin, Texas, 2005
- 27 Patel NM, Renaud JE, Tovar A. Compliant mechanism design using the hybrid cellular automaton method. 1st AIAA multidisciplinary design optimization specialist conference, Austin, America, 2005
- 28 Wang L, Kodiyalam S. An efficient method for probabilistic and robust design with non-normal distributions. 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver, America, 2002
- 29 Min SJ, Bang SH. Structural topology design considering reliability. *Key Engineering Materials*, 2005, 297: 1901-1906
- 30 Shan S, Wang GG. Reliable design space and complete single-loop reliability-based design optimization. *Reliability Engineering & System Safety*, 2008, 93(8): 1218-1230
- 31 Nguyen TH, Song J, Paulino GH. Single-loop system reliability-based topology optimization considering statistical dependence between limit-states. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 44(5): 593-611
- 32 Nguyen TH, Song J, Paulino GH. Single-loop system reliability-based design optimization using matrix-based system reliability method: theory and applications. *Journal of Mechanical Design*, 2010, 132(1): 011005
- 33 Silva M, Tortorelli DA, Norato JA, et al. Component and system reliability-based topology optimization using a single-loop method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(1): 87-106
- 34 Silva M, Tortorelli D, Norato J, et al. Topology optimization under stochastic loads via the single loop method. 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Schaumburg, America, 2008
- 35 陈建军, 段宝岩, 张驰江. 结构可靠性优化中概率约束的等价显式处理. 西安电子科技大学学报, 1999, (5): 564-569
- 36 崔明涛. 不确定性连续体结构拓扑优化和柔性机构设计研究. [博士论文]. 西安: 西安电子科技大学, 2006
- 37 宋宗凤. 不确定性连续体结构的拓扑优化设计研究. [博士论文]. 西安: 西安电子科技大学, 2009
- 38 刘国梁, 陈建军, 马洪波. 结构抗疲劳可靠性的水平集拓扑优化. 西安电子科技大学学报, 2012, (4): 149-154

(责任编辑: 胡漫)