

混合推进最省燃料轨道设计方法

张 晨, 赵育善

(北京航空航天大学宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 使用混合推进方式设计地-月圆型限制性三体模型下的最省燃料转移轨道。将化学发动机以及电推进发动机的燃料消耗总和作为目标函数进行优化, 推导一阶必要条件和雅可比矩阵。选择从近地圆轨道出发到达地-月 L_1 附近 Halo 轨道的转移轨道为例测试上述方法。仿真结果表明, 相比发射脉冲固定的情况, 混合推进方式进一步降低了燃料消耗, 而且给出了飞行时间和燃料消耗不同的组合方式, 给予任务设计更大的灵活性。

关键词: 轨道优化; 电推进; 最优控制; 三体问题; 混合推进

中图分类号: V412.44 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2015)08-0869-08

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2015.08.002

A Method for Hybrid Propulsion Minimum Fuel Trajectory Optimization

ZHANG Chen, ZHAO Yu-shan

(School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: Trajectory optimization with hybrid propulsion system is studied under Earth-Moon circular restricted three-body model. The total fuel consumption of both chemical and electrical propulsion systems is minimized, and based on the calculus of variation, the first-order necessary condition and analytic Jacobian are derived. These methods are applied to Earth-Moon L_1 minimum-fuel trajectory optimization, the simulation reveals that this kind of methods afford various combination of flight time and total fuel consumption, thus giving a greater flexibility in the mission design.

Key words: Trajectory optimization; Electric propulsion; Optimal control theory; Three-body problem; Hybrid propulsion

0 引 言

在深空探测任务中, 探测器使用的发动机可分为化学发动机和电推进发动机两大类。化学发动机产生的推力大但耗费燃料。电推进发动机因其高比冲的特性能够极大地节省燃料消耗, 但其相对较小的推力幅值导致较长的任务时间。Mingotti 等^[1]提出的混合推进方式能够兼容以上两种发动机各自的优点, 这种方法假定卫星上面级提供一次脉冲后与卫星分离, 之后卫星携带的电推进发动机开机并最终进入目标轨道。混合推进方式相比单纯使用化学发动机, 能够大幅降低燃料消耗, 还有操控灵活, 对发射窗口不敏感等优点; 且相比单纯使用电推进发

动机, 混合推进方式提供了更短的任务时间。

近十多年来, 国内外对电推进轨道优化技术进行了丰富的研究。任远等使用混合法设计了地火电推进转移轨道^[2], 避免直接求解两点边值问题, 从而提高了迭代的收敛性。Jiang 等^[3]研究了同伦方法以及开关检测技术在最省燃料问题当中的应用, 并获得了很高的收敛效率和打靶精度。Guo 等^[4]将同伦方法和粒子群算法结合起来研究了引力辅助在电推进轨道优化方面的应用, 获得了更高的剩余燃料比。黄镐等^[5]将协态归一化方法和曲线拟合技术相结合, 研究了最优电推进逃逸轨道设计问题, 降低了多圈问题协态初值猜测的敏感性。上述研究探索了二体模型下的电推进轨道设计方法, 近些年来

针对深空探测任务提出的新需求,基于三体以及四体模型的电推进轨道设计问题在国内外得到了越来越多的关注。Ozimek 等^[6]研究了使用变比冲发动机的三体电推进轨道优化问题,基于数值方面的考虑,其推力和比冲没有设定上下限。Caillau 等^[7]基于庞特里亚金极大值原理和同伦方法,探讨了三体模型下使用定比冲发动机的最省燃料问题,为降低求解复杂度,固定初始发射轨道为地球静止轨道。Russell^[8]使用帕累托最优探索了多目标优化下的三体电推进问题,舍弃了一个打靶约束用于提高收敛性。而到目前为止探讨混合推进方式轨道设计方法的研究还较少。Mingotti 等^[1]将电推进技术和多体引力场下的弹道捕获技术相结合,研究了混合推进方式捕获轨道的设计方法,但其所采用的方法并未将两种发动机的燃料消耗总和进行统一优化。

本文探讨了地-月圆型限制性三体模型下混合推进方式的最省燃料轨道设计问题。将两种发动机的燃料消耗总和作为目标函数统一进行优化,并推导了一阶必要条件,此外还在 Russell^[8]工作的基础上,进一步推导了最省能量问题的状态转移矩阵。上述方法被用于设计从近地圆轨道出发,到达地-月 L_1 附近 Halo 轨道的混合推进转移轨道。仿真结果表明,通过设定初始发射脉冲为优化变量,可以进一步节省燃料消耗,并且飞行时间和最终剩余燃料不同的组合方式增加了任务设计的灵活性,而上述改进提高了同伦方法的鲁棒性和计算效率。

1 圆型限制性三体问题

限制性三体问题是在两个大天体 P_1 和 P_2 共同旋转坐标系中研究质量可忽略不计的小天体 P_3 的运动;如果两个大天体绕其公共质心做圆周运动则称为圆型限制性三体问题(Circular Restricted Three-Body Problem, CRTBP)。在地-月 CRTBP 下, P_1 代表地球, P_2 为月球,定义其质量分别为 m_1 和 m_2 ,设定两个天体之间的距离、总质量以及旋转角速率都为 1,系统的质量参数定义为 $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ 。容易验证地球的质量为 $1 - \mu$ 并位于 $(-\mu, 0, 0)$,而月球的质量为 μ 并位于 $(1 - \mu, 0, 0)$ 。卫星 P_3 在地-月引力场和电推进发动机共同作用下的动力学方程表示如下^[8]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, u) \text{ 及 } \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + uT_{\max}\boldsymbol{\alpha}/m \\ -uT_{\max}/c_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中: T_{\max} 是最大推力幅值, $u \in [0, 1]$ 为发动机推力幅值比, $\boldsymbol{\alpha}$ 是推力方向的单位矢量, $c_2 = I_{sp2}g_0$ 代表电推进发动机燃气速度, $(I_{sp2}$ 是电推进发动机比冲, g_0 是海平面重力加速度),定义 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{h}(\mathbf{v})$ 为旋转坐标系下位置与速度的函数,其具体表达式为^[8]

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} x - (1 - \mu)(x + \mu)/r_1^3 - \mu(x + \mu - 1)/r_2^3 \\ y - (1 - \mu)y/r_1^3 - \mu y/r_2^3 \\ - (1 - \mu)z/r_1^3 - \mu z/r_2^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}) = [2v_y \quad -2v_x \quad 0]^T$$

r_1 和 r_2 分别代表卫星到地球和月球的距离,表示为

$$r_1 = ((x + \mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$r_2 = ((x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

2 混合推进轨道优化问题

假设卫星初始位于近地圆轨道,卫星上面级提供一次脉冲后电推进发动机开机,则混合推进方式最省燃料问题的性能指标可表示为

$$J = (1 - e^{-\Delta v/c_1}) + (T_{\max}/c_2) \int_{t_0}^{t_f} u dt \quad (2)$$

式(2)等号右端第一项和第二项分别代表化学推进发动机和电推进发动机的燃料消耗质量(需要注意的是,式(2)使用归一化的质量单位,即脉冲前系统质量为单位 1)。 Δv 为脉冲所产生的速度改变量。 c_1 为化学推进发动机燃气速度。 t_0 和 t_f 分别代表任务初始和最终时刻。对于最省燃料问题,推力幅值在任何时刻只能为输出最大推力或者关机两种状态(不考虑奇异情况),这种“bang-bang”性质使得动力学方程不连续并导致打靶过程非常敏感^[3]。Bertrand 等^[9]使用一种平滑技术即同伦方法来改善收敛性。通过引入同伦参数 ε ,定义新的性能指标为

$$J = (1 - e^{-\Delta v/c_1}) + (T_{\max}/c_2) \int_{t_0}^{t_f} [u - \varepsilon u(1 - u)] dt \quad (3)$$

当 $\varepsilon = 1$ 时式(3)代表最省能量问题,当 $\varepsilon = 0$ 时式(3)表示最省燃料问题。

如图 1 所示,假设卫星初始位于地心距为 r_0 的圆轨道上。卫星上面级提供一次脉冲后电推进发动

机开机,则施加脉冲后卫星在地-月旋转系下的状态 \mathbf{x}_0 可由两个参数 κ 和 θ 确定,如下所示

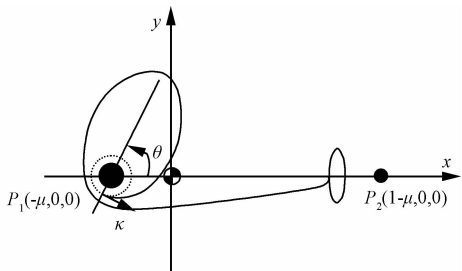


图 1 混合推进方式的转移轨道示意图

Fig. 1 Hybrid transfer trajectory illustration

$$\mathbf{x}_0(\kappa, \theta) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \cos \theta - \mu \\ r_0 \sin \theta \\ 0 \\ -(\kappa \sqrt{(1-\mu)/r_0} - r_0) \sin \theta \\ (\kappa \sqrt{(1-\mu)/r_0} - r_0) \cos \theta \\ 0 \\ e^{-\Delta v/c_1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $\kappa \in [1, 1.4]$ 表示初始脉冲比,即施加脉冲后,卫星速度介于停泊轨道速度与地球逃逸速度之间。而 $\theta \in [0, 2\pi]$ 表示脉冲发射相位角。此外式(4)中脉冲 Δv 可表示为 κ 的函数,即

$$\Delta v(\kappa) = (\kappa - 1) \sqrt{(1-\mu)/r_0}, \kappa \in [1, 1.4]$$

卫星上面级施加脉冲后电推进发动机开机,电推进转移轨道需要满足的初始状态约束表示为

$$\boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{x}(t_0), \kappa, \theta) = \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(\kappa, \theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_0) - \mathbf{r}(\theta) \\ \mathbf{v}(t_0) - \mathbf{v}(\kappa, \theta) \\ m(t_0) - m(\kappa) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5)$$

可以发现当给定参数 κ 和 θ 时,式(5)的约束自然满足,即 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)$ 。假设卫星在 t_f 时刻到达地-月系 L_1 附近 Halo 轨道上固定的一点,且剩余质量 $m(t_f)$ 自由,电推进转移轨道需要满足的终端状态约束为

$$\boldsymbol{\psi}_f(\mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_f \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (6)$$

通过引入时变的协态变量 $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_r^T, \boldsymbol{\lambda}_v^T, \lambda_m]^T$,哈密顿函数表示为

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T [\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + u T_{\max} \boldsymbol{\alpha}/m] - \lambda_m u T_{\max}/c_2 + (T_{\max}/c_2) [u - \varepsilon u(1-u)] \quad (7)$$

为方便讨论,定义式(3)中化学发动机燃料消耗质量为 Θ 。对于边界约束,引入拉格朗日乘子 $\mathbf{v}_0 = [\mathbf{v}_{r_0}^T, \mathbf{v}_{v_0}^T, v_{m_0}]^T$ 和 $\mathbf{v}_f = [\mathbf{v}_{r_f}^T, \mathbf{v}_{v_f}^T]^T$,有约束的最优控制问题就被转换成了无约束的最优控制问题,新的目标函数 J_1 表示如下

$$J_1 = \Theta + \mathbf{v}_0^T \boldsymbol{\psi}_0 + \mathbf{v}_f^T \boldsymbol{\psi}_f + \int_{t_0}^{t_f} (H + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}) dt - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x} \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (8)$$

假设飞行时间 t_f 固定, J_1 取得极值的必要条件是其一阶变分等于 0,即

$$\begin{aligned} \delta J_1 = & \frac{\partial \Theta}{\partial \kappa} \delta \kappa + \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_0}{\partial \mathbf{x}(t_0)} \delta \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_0}{\partial \kappa} \delta \kappa + \\ & \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_0}{\partial \theta} \delta \theta + \mathbf{v}_f^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_f}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \delta \mathbf{x}(t_f) + \\ & \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \delta \boldsymbol{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt - \\ & \boldsymbol{\lambda}_f^T \delta \mathbf{x}(t_f) + \boldsymbol{\lambda}_0^T \delta \mathbf{x}(t_0) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

通过式(9)可推导协态变量的动力学方程为^[8]

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_r \\ \dot{\lambda}_v \\ \dot{\lambda}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_v \\ -\boldsymbol{\lambda}_r - \mathbf{H}^T \boldsymbol{\lambda}_v \\ u T_{\max}/m^2 \boldsymbol{\lambda}_r^T \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (10)$$

梯度矩阵 $\mathbf{G} = \partial \mathbf{g}(\mathbf{r})/\partial \mathbf{r}$, $\mathbf{H} = \partial \mathbf{h}(\mathbf{v})/\partial \mathbf{v}$ 。此外从式(9)还能得到如下关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_0^T = -\mathbf{v}_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_0}{\partial \mathbf{x}(t_0)} = -\mathbf{v}_0^T \\ \boldsymbol{\lambda}_f^T = \mathbf{v}_f^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_f}{\partial \mathbf{x}(t_f)} = [\mathbf{v}_{r_f}^T, \mathbf{v}_{v_f}^T, 0] \end{cases} \quad (11)$$

式(11)也称为横截条件,由于 $\boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_f$ 均为未知的拉格朗日乘子,式(11)只表明如果终端时刻的质量 $m(t_f)$ 自由,则其所对应的协态变量应等于 0,即 $\lambda_m(t_f) = 0$ 。此外,由式(9)还能得到由于 κ 和 θ 自由而产生的两个约束条件

$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial \kappa} + \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_0}{\partial \kappa} = \frac{\partial \Theta}{\partial \kappa} + \boldsymbol{\lambda}_0^T \frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \kappa} = 0 \\ \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_0}{\partial \theta} = \boldsymbol{\lambda}_0^T \frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

庞特里亚金极大值原理(Pontryagin Maximum Principle, PMP)揭示了控制变量应在整个时间历程

上都使得哈密顿函数取极小值,则最优推力方向为

$$\mathbf{a}^* = -\boldsymbol{\lambda}_v / |\boldsymbol{\lambda}_v| \quad (13)$$

式中 $|\boldsymbol{\lambda}_v|$ 是 $\boldsymbol{\lambda}_v$ 的模,此外式(13)也被称为主矢量控制律^[10],将其带入式(7)整理可得

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T (\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v})) + (T_{\max}/c_2)u(S - \varepsilon + \varepsilon u) \quad (14)$$

式中: S 代表开关函数

$$S = -|\boldsymbol{\lambda}_v|c_2/m - \lambda_m + 1 \quad (15)$$

推力幅值比 u 介于 $[0, 1]$ 之间,为使哈密顿函数 H 取极小值,需再次使用 PMP。观察式(14)可知 H 是 u 的二次函数,两个根分别为 $u_1 = 0$ 以及 $u_2 = (\varepsilon -$

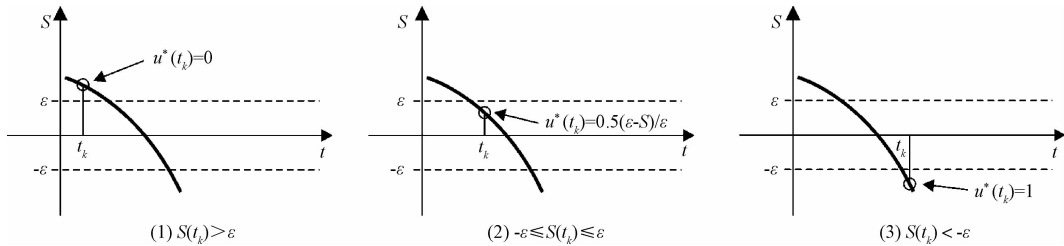


图2 最优推力幅值比 u^* 根据开关函数 S 位置的不同具有三种情况

Fig. 2 Optimal thrust magnitude ratio u^* with respect to the time-varying S

为方便讨论,将状态和协态变量合并为正则变量即 $\mathbf{y} = [\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\lambda}^T]^T$,并将状态方程(1)和协态方程(10)合并在一起称为正则方程,表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{m}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) - (\boldsymbol{\lambda}_v / |\boldsymbol{\lambda}_v|)uT_{\max}/m \\ -uT_{\max}/c_2 \\ -\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_v \\ -\boldsymbol{\lambda}_r - \mathbf{H}^T \boldsymbol{\lambda}_v \\ -|\boldsymbol{\lambda}_v|uT_{\max}/m^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (17)$$

至此,混合推进轨道优化问题被转换成两点边值问题。当给定 t_0 时刻 9 个未知的打靶变量 $[\boldsymbol{\lambda}_0^T, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}]^T$,通过积分隐含 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 和 u^* 的式(17)就能够得到终端时刻 t_f 的状态和协态变量。而所选择的 9 个打靶变量需使得 9 个打靶等式约束得到满足,与之对应的打靶函数 \mathbf{Z} 如式(18)所示。

一旦求解了最省能量问题(即 $\varepsilon = 1$),从 1 到 0 逐步降低同伦参数 ε ,并将当前步骤所得到的打靶变量作为初值带入到下一步中,最终能够得到所

$S)/\varepsilon$,此外该二次函数开口向上。根据 u_2 所在区间不同,最优推力幅值比 u^* 一共有三种情况。由于 $u_2 = (\varepsilon - S)/\varepsilon$,可进一步得到开关函数 S 和最优推力幅值比 u^* 的关系(见式(16)和图 2)。需说明的是,对最省燃料问题(即 $\pm \varepsilon = 0$), u^* 的选取只和开关函数 S 的符号有关,即当 S 为正时 $u^* = 0$,而当 S 为负时 $u^* = 1$ 。

$$u^* = \begin{cases} 0, & S > \varepsilon \\ 0.5(\varepsilon - S)/\varepsilon, & -\varepsilon \leq S \leq \varepsilon \\ 1, & S < -\varepsilon \end{cases} \quad (16)$$

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\lambda}_0^T, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}_f \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_f \\ \lambda_m(t_f) \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \boldsymbol{\kappa}} + \boldsymbol{\lambda}_0^T \frac{\partial \mathbf{x}_0(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \\ \boldsymbol{\lambda}_0^T \frac{\partial \mathbf{x}_0(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (18)$$

对应最省燃料问题的解。需要注意的是,为避免无穷转移时间问题,需要将飞行时间固定,而最省时间问题给出了飞行时间的下限(即 $t_f \geq t_{f\min}$),所以最省时间问题应先于最省能量和最省燃料问题进行求解。对于最省时间问题除了增加一个打靶变量 t_f 之外,还需再增加一个打靶约束,即哈密顿函数在 t_f 时刻的值 $H(t_f)$ 等于 0。由于篇幅所限,最省时间问题的一阶必要条件在此不再进行推导。

3 解析雅克比矩阵

如前所述,最优控制问题被转换成两点边值问题并通过打靶法进行求解,但与打靶法相关的牛顿法对于初始点的选取非常敏感。在本文中,为提高牛顿法的鲁棒性和收敛速度,解析的雅克比矩阵被

用于提供打靶过程的梯度信息。状态转移矩阵(State Transition Matrix, STM)反映了正则变量 \mathbf{y} 在 t_0 时刻的扰动对 t 时刻所产生的影响。定义 STM 为 Φ , 其性质如下

$$\begin{aligned}\Phi(t, t_0) &= \partial \mathbf{y}(t) / \partial \mathbf{y}(t_0) \\ \dot{\Phi}(t, t_0) &= (\partial f_1 / \partial \mathbf{y})|_t \Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) &= \mathbf{I}_{14 \times 14}\end{aligned}\quad (19)$$

$$(\partial f_1 / \partial \mathbf{y})|_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{|\boldsymbol{\lambda}_v|} \frac{uT_{\max}}{m^2} & \mathbf{0} & -\frac{uT_{\max}}{m} \left(\frac{\mathbf{I}}{|\boldsymbol{\lambda}_v|} - \frac{\boldsymbol{\lambda}_v \boldsymbol{\lambda}_v^T}{|\boldsymbol{\lambda}_v|^3} \right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial(\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_v)}{\partial \mathbf{r}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -\mathbf{H}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{2|\boldsymbol{\lambda}_v|uT_{\max}}{m^3} & \mathbf{0} & -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v^T}{|\boldsymbol{\lambda}_v|} \frac{uT_{\max}}{m^2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\quad (20)$$

2) 当在一个积分步长内发动机推力幅值始终处于中等推力时, 由于 u^* 是 m , $\boldsymbol{\lambda}_v$ 以及 λ_m

$$(\partial f_1 / \partial \mathbf{y})|_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} & \Omega_1 & \mathbf{0} & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Omega_4 & \mathbf{0} & \Omega_5 & \Omega_6 \\ -\frac{\partial(\mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda}_v)}{\partial \mathbf{r}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -\mathbf{H}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Omega_7 & \mathbf{0} & \Omega_8 & \Omega_9 \end{bmatrix}\quad (21)$$

式中:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{|\boldsymbol{\lambda}_v|} \frac{uT_{\max}}{m^2} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_v cT_{\max}}{2\epsilon m^3} \\ \Omega_2 &= -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v \boldsymbol{\lambda}_v^T}{|\boldsymbol{\lambda}_v|^2} \frac{cT_{\max}}{2\epsilon m^2} - \frac{uT_{\max}}{m} \left(\frac{\mathbf{I}}{|\boldsymbol{\lambda}_v|} - \frac{\boldsymbol{\lambda}_v \boldsymbol{\lambda}_v^T}{|\boldsymbol{\lambda}_v|^3} \right) \\ \Omega_3 &= -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{|\boldsymbol{\lambda}_v|} \frac{T_{\max}}{2\epsilon m}, \quad \Omega_4 = -\frac{|\boldsymbol{\lambda}_v| T_{\max}}{2\epsilon m^2} \\ \Omega_5 &= -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v^T}{|\boldsymbol{\lambda}_v|} \frac{T_{\max}}{2\epsilon m}, \quad \Omega_6 = -\frac{T_{\max}}{2\epsilon c} \\ \Omega_7 &= \frac{2|\boldsymbol{\lambda}_v|uT_{\max}}{m^3} + \frac{|\boldsymbol{\lambda}_v|^2 cT_{\max}}{2\epsilon m^4} \\ \Omega_8 &= -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v^T}{|\boldsymbol{\lambda}_v|} \frac{uT_{\max}}{m^2} - \frac{\boldsymbol{\lambda}_v^T cT_{\max}}{2\epsilon m^3}, \quad \Omega_9 = -\frac{|\boldsymbol{\lambda}_v| T_{\max}}{2\epsilon m^2}\end{aligned}$$

需要注意的是, 上述状态转移矩阵只对动力学方程连续的正则变量进行映射, 即发动机始终保持开机、中等推力或者关机。然而如果推力幅值 u^* 在积分步

式中: 因 $(\partial f_1 / \partial \mathbf{y})|_t$ 与时间有关, 所以正则动力学方程 $\dot{\mathbf{y}}$ 需要连同 $\dot{\Phi}(t, t_0)$ 同时进行积分, 共 $14 + 14^2 = 210$ 维。需注意的是, 根据推力幅值的不同, $(\partial f_1 / \partial \mathbf{y})|_t$ 有两种情况:

1) 在一个积分步长内如果发动机始终处于开机或者关机状态(即 u^* 为标量), 则表示为^[8]

的函数, 参见式(15)和式(16), 通过链式法则可得

长内发生切换, 则需考虑切换点 t_j 处的状态转移矩阵 $\Psi(t_j)$ ^[8]:

$$\Psi(t_j) = \mathbf{I}_{14 \times 14} + (\dot{\mathbf{y}}|_{t_j^+} - \dot{\mathbf{y}}|_{t_j^-}) \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{y}} \frac{1}{\dot{\mathcal{S}}} \right) \Big|_{t_j} = \frac{\delta \mathbf{y}(t_j^+)}{\delta \mathbf{y}(t_j^-)}\quad (22)$$

式中: t_j^- 和 t_j^+ 分别代表切换点 t_j 左右的瞬时时刻。假设在整个时间历程上存在 t_1, t_2, \dots, t_N 个开关函数切换点, 那么总的状态转移矩阵可通过链式法则表示为

$$\begin{aligned}\Phi(t_f, t_i) &= \Phi(t_f, t_N^+) \Psi(t_N) \Phi(t_N^-, t_{N-1}^+) \Psi(t_{N-1}) \cdots \times \\ &\Phi(t_2^-, t_1^+) \Psi(t_1) \Phi(t_1^-, t_i) = \frac{\partial \mathbf{y}(t_f)}{\partial \mathbf{y}(t_i)}\end{aligned}\quad (23)$$

至此, 式(23)中的状态转移矩阵 $\Phi(t_f, t_i)$ 就可用于构造 9 个打靶等式约束相对于 9 个打靶变量的雅可比矩阵, 表示如下(参见式(18))

$$\text{JM} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \boldsymbol{\lambda}_0} & \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{x}_0(t_0)} \frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \kappa} & \frac{\partial \mathbf{r}(t_f)}{\partial \mathbf{x}_0(t_0)} \frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{v}(t_f)}{\partial \boldsymbol{\lambda}_0} & \frac{\partial \mathbf{v}(t_f)}{\partial \mathbf{x}_0(t_0)} \frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \kappa} & \frac{\partial \mathbf{v}(t_f)}{\partial \mathbf{x}_0(t_0)} \frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \lambda_m(t_f)}{\partial \boldsymbol{\lambda}_0} & \frac{\partial \lambda_m(t_f)}{\partial \mathbf{x}_0(t_0)} \frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \kappa} & \frac{\partial \lambda_m(t_f)}{\partial \mathbf{x}_0(t_0)} \frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \theta} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \kappa} \right)^T & \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \kappa^2} + \boldsymbol{\lambda}_0^T \frac{\partial^2 \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \kappa^2} & \boldsymbol{\lambda}_0^T \frac{\partial^2 \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \kappa \partial \theta} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \theta} \right)^T & \boldsymbol{\lambda}_0^T \frac{\partial^2 \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \theta \partial \kappa} & \boldsymbol{\lambda}_0^T \frac{\partial^2 \mathbf{x}_0(\kappa, \theta)}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

4 仿真和结果

假设卫星初始位于近地点高度为 400 km 的圆轨道,卫星上面级施加一次脉冲 Δv 后,电推进发动机开始工作并不断提升卫星能量,最终卫星在 t_f 时刻与地-月 L_1 点附近 Halo 轨道上的一个固定点重合。表 1 给出了本文所用到的参数,其中长度、时间、速度以及质量都进行了归一化处理。

表 1 物理常量及含义

Table 1 Simulation parameters

符号	值	单位	含义
μ	$1.21506683 \times 10^{-2}$	—	地-月质量参数
m_0	3000	kg	初始卫星质量
I_{sp1}	300	s	化学发动机比冲
I_{sp2}	3000	s	电推进发动机比冲
g_0	9.80665	m/s^2	海平面重力加速度
c_1	2.941995	km/s	化学发动机燃气速度
c_2	29.41995	km/s	电推进发动机燃气速度
T_{\max}	10	N	电推进发动机最大推力
LU	3.84405×10^5	km	距离单位
TU	3.75676967×10^5	s	时间单位
VU	1.02323281	km/s	速度单位
MU	3000	kg	质量单位
r_0	6778	km	停泊轨道地心距
κ	[1, 1.4]	—	初始发射脉冲比
θ	[0, 2π]	km	初始发射相位角
A_z	8000	—	Halo 轨道 z 向幅值
$x(t_f)$	0.823385182067	—	终端约束 x 分量
$y(t_f)$	0	—	终端约束 y 分量
$z(t_f)$	-0.022277556273	—	终端约束 z 分量
$v_x(t_f)$	0	—	终端约束 v_x 分量
$v_y(t_f)$	0.134184170262	—	终端约束 v_y 分量
$v_z(t_f)$	0	— </tr	

首先求解最省时间问题以确定飞行时间下限。假设卫星上面级提供一次固定大小的脉冲,求解到达 L_1 附近 Halo 轨道的电推进最省时间转移轨道,其仿真结果如表 2 所示。当 $\kappa = 1$ 时代

表卫星上面级不提供初始脉冲而只依靠电推进发动机提供动力,整个任务耗时 22.6467 天,最终剩余质量比为 0.7783,其转移轨道如图 3 所示。随着脉冲比 κ 从 1 逐渐增加到 1.4,任务时间从 22.6467 天缩短到了 3.3692 天,最终剩余质量从 0.7783 降低到 0.3200。当 κ 等于 1.4 时,卫星被施加了一个近似等于地球逃逸速度的脉冲,其转移轨道如图 4 所示。

表 2 发射脉冲固定的电推进最省时间问题收敛解

Table 2 Simulation results of minimum-time problem with fixed initial impulse and electronic propulsion

κ	t_{\min} / 天	脉冲后质量	最终剩余质量
1.00	22.6467	1.0000	0.7783
1.04	19.8482	0.9011	0.7068
1.08	17.3189	0.8119	0.6424
1.12	15.1308	0.7316	0.5835
1.16	12.9668	0.6593	0.5324
1.20	11.1052	0.5941	0.4854
1.24	9.3812	0.5353	0.4435
1.28	7.8363	0.4824	0.4057
1.32	6.2260	0.4347	0.3737
1.36	5.0336	0.3917	0.3424
1.40	3.3692	0.3529	0.3200

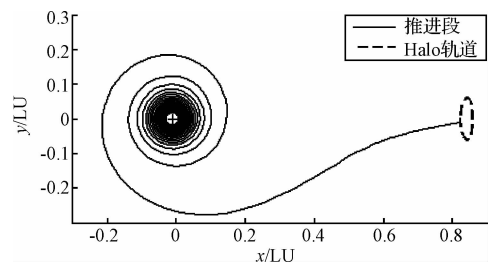


图 3 初始发射脉冲为零(即 $\kappa = 1, \theta = -2$)的最省时间电推进转移轨道

Fig. 3 Minimum-time low-thrust trajectory with initial impulse equal to zero (i. e., $\kappa = 1, \theta = -2$)

在得到不同 κ 对应的最短转移时间 t_{\min} 之后,可

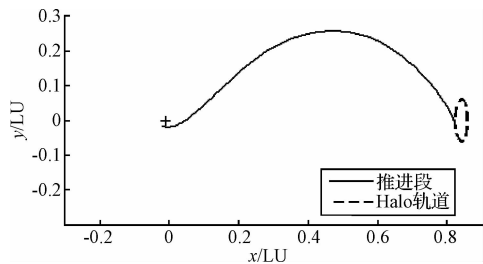


图 4 初始发射脉冲约为地球逃逸速度(即 $\kappa = 1.4$, $\theta = -2$)的最省时间电推进转移轨道

Fig. 4 Minimum-time low-thrust trajectory with high initial impulse (i. e., $\kappa = 1.4$, $\theta = -2$)

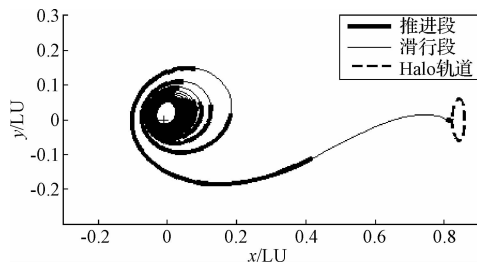


图 5 地-月旋转系下固定发射脉冲的最省燃料转移轨道 ($\kappa = 1.24$, $\theta = -2$ 且 $c_{if} = 1.2$)

Fig. 5 Minimum-fuel low-thrust trajectory in CRTBP with fixed initial impulse ($\kappa = 1.24$, $\theta = -2$ and $c_{if} = 1.2$)

进一步求解混合推进方式的最省能量和最省燃料问题。需说明的是,打靶过程中 κ 和 θ 的选取非常敏感,可先将其固定,找到收敛解后再将其依次设定为优化变量。此外为避免“无穷转移时间”问题,可通过引入标量 c_{if} 来固定飞行时间,即 $t_f = c_{if} t_{fmin}$ 。

表 3 混合推进方式最省燃料问题部分收敛解

Table 3 Minimum-fuel solutions with hybrid propulsion system

t_f /天	$m_f(\kappa$ 和 θ 固定)	$m_f(\kappa$ 和 θ 自由)	m_f 提高百分比
3.7061	0.3306	0.3334	0.28%
4.0431	0.3341	0.3398	0.57%
4.3800	0.3365	0.3437	0.72%
5.5370	0.3617	0.3791	1.74%
6.0404	0.3677	0.3832	1.55%
6.5437	0.3700	0.3847	1.47%
6.8486	0.3935	0.4024	0.89%
7.4712	0.3978	0.4059	0.81%
8.0938	0.3991	0.4070	0.79%
8.6199	0.4264	0.4370	1.06%
9.4036	0.4307	0.4406	0.99%
10.1872	0.4322	0.4415	0.93%
10.3194	0.4602	0.4785	1.83%
11.2575	0.4671	0.4863	1.92%
12.1956	0.4694	0.4883	1.89%

表 3 列出了混合推进方式的部分收敛解,其中 t_f 为飞行时间, m_f 为最终剩余质量。通过设定 κ 和 θ 为优化变量, m_f 得到了不同程度的提高。下面选取一组收敛解对比转移轨道和电推进发动机的控制曲线。

1) 固定 $\kappa = 1.24$ 、 $\theta = -2$ 、飞行时间比 $c_{if} = 1.2$, 此时在 CRTBP 下最省燃料转移轨道如图 5 所示。其中粗实线代表电推进发动机推进段,细实线代表无动力滑行段,虚线代表 Halo 轨道。可以发现电推进发动机在近地点附近开机,并在远地点处关机用于节省燃料消耗。

图 6 为推力幅值比和开关函数随时间变化的曲线,推力幅值呈现“bang-bang”控制结构。通过计算可知,哈密顿函数在整个时间历程上都近似为常值,其最大误差在 10^{-10} 以内,从而证明了解的精确性。

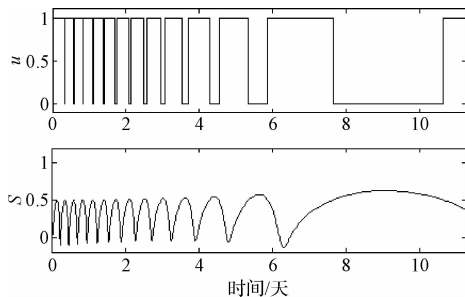


图 6 固定发射脉冲时推力幅值 u 和开关函数 S 随时间变化曲线 ($\kappa = 1.24$, $\theta = -2$ 且 $c_{if} = 1.2$)

Fig. 6 When the initial impulse is fixed, the time history of throttle factor u and switching function S ($\kappa = 1.24$, $\theta = -2$ and $c_{if} = 1.2$)

2) 设定 κ 和 θ 为优化变量,飞行时间比 $c_{if} = 1.2$,混合推进方式的转移轨道在地-月旋转系下的仿真图如图 7 所示。通过和图 5 对比发现,采用混合推进方式的卫星在初始时刻施加了一个相对较小的初始脉冲,但在近地空间内保持连续开机以提升轨道能量。此外还需要说明的是,接近目标周期轨道的无动力滑行段非常逼近从周期轨道上出发的一条稳定流形,即说明最优轨道能够自动沿着稳定流形运动以节省燃料。之所以在 Halo 轨道附近仍需施加一段推力弧段,是因为终端约束为 Halo 轨道上的一个固定点,如果最终不施加推力弧段,则卫星沿着稳定流形需要无穷长的时间才能最终进入 Halo 轨道,而在固定转移时间的前提下,卫星只能先沿着近似稳定流形的转移轨道逼近以节省燃料,最后发动机开机并最终进入 Halo 轨道。

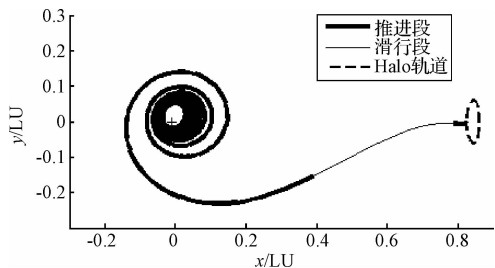


图 7 地 - 月旋转系下初始发射脉冲自由的最省燃料转移轨道(κ 和 θ 自由且 $c_{if} = 1.2$)

Fig. 7 Minimum-fuel low-thrust trajectory in CRTBP with free initial impulse (free κ and θ , $c_{if} = 1.2$)

电推进发动机的推力幅值比和开关函数随时间变化的曲线如图 8 所示,可以发现设定 κ 和 θ 为优化变量之后,卫星在任务时间的两端保持开机,而只在仿真时间的中间部分关机。

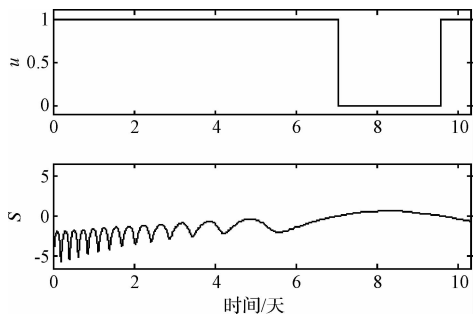


图 8 初始发射脉冲自由时推力幅值比 u 和开关函数 S 随时间变化曲线(κ 和 θ 自由且 $c_{if} = 1.2$)

Fig. 8 When the initial impulse is free, the time history of throttle factor u and switching function S (free κ and θ , $c_{if} = 1.2$)

5 结 论

本文基于混合推进方式探讨了地 - 月圆型限制性三体模型下最优转移轨道的设计问题。根据变分法推导了最优解的一阶必要条件。针对复杂动力学模型下多圈转移轨道带来的打靶迭代速度慢和分段连续的推力幅值导致打靶难以收敛的问题,在前人工作基础上,给出了最省能量问题解析的状态转移矩阵。上述方法被用于求解从近地圆轨道出发,到达地 - 月 L_1 附近 Halo 轨道的混合推进转移轨道。数值仿真表明,上述方法可以将化学发动机和电推进发动机的燃料消耗总和进行优化。此外由于给出了燃料消耗以及飞行时间不同的组合方式,混合推进方式使任务设计具有更大的灵活性。

参 考 文 献

- [1] Mingotti G, Topputo F, Bernelli Z F. Earth - Mars transfers with ballistic escape and low-thrust capture [J]. Celestial Mech. and Dyna. Astro. 2011, 110(2): 169 - 188.
- [2] 任远, 崔平远, 栾恩杰. 利用混合法进行地球 - 火星电推进轨道设计 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2007, 39(3): 359 - 362. [Ren Yuan, Cui Ping-yuan, Luan En-jie. An Earth-Mars low-thrust trajectory design based on hybrid method [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 39(3): 359 - 362.]
- [3] Jiang F H, Baoyin H X, Li J F. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach [J]. J. of Guid. Con. and Dyna. 2012, 35(1): 245 - 258.
- [4] Guo T D, Jiang F H, Baoyin H X, et al. Fuel optimal low thrust rendezvous with outer planets via gravity assist [J]. Sci. China Phys. Mech. and Astro. 2011, 54(4): 756 - 769.
- [5] 黄镐, 韩潮. 基于间接法的最优电推进逃逸轨道设计 [J]. 中国空间科学技术, 2013, 33(2): 25 - 31. [Huang Hao, Han Chao. Indirect optimization of low thrust escape trajectories [J]. Chinese Space Sci. and Tech. 2013, 33(2): 25 - 31.]
- [6] Ozimek M, Howell K. Low-thrust transfers in the Earth-Moon system, including applications to libration point orbits [J]. J. of Guid. Con. and Dyna. 2010, 33(2): 533 - 549.
- [7] Caillau J, Daoud B, Gergaud J. Minimum fuel control of the planar circular restricted three-body problem [J]. Celestial Mech. and Dyn. Astro. 2012, 114(1 - 2): 137 - 150.
- [8] Russell R. Primer vector theory applied to global low-thrust trade studies [J]. J. of Guid. Con. and Dyna. 2007, 30(2): 460 - 472.
- [9] Bertrand R, Epenoy R. New smoothing techniques for solving bang - bang optimal control problems numerical results and statistical interpretation [J]. Optimal Control Applications and Methods, 2002, 23(4): 171 - 197.
- [10] Lawden. Optimal trajectories for space navigation [M]. London UK: Butterworths, 1963.

作者简介:

张 晨(1986 -),男,博士生,主要从事导航及电推进轨道优化方向的研究。

通信地址:北京航空航天大学新主楼 C105 室(100191)

电话:(010)82339286

E-mail: chenzhang_buaa@gmail.com

(编辑:牛苗苗)