7-5 平面图
(plane graph)

在现实生活中，常常要画一些图形，希望边与边之间尽量减少相交的情况，例如印刷线路板的布线，交通道路的设计等。

[定义] 平面图(plane graph)

设G＝〈V，E〉是一个无向图，如果能够把G的所有结点和边画在平面上，且使任何两条边除了端点外没有其它的交点，就称G是一个平面图。

应该注意，有些图形从表面上看有几条边是相交的，但不能就此肯定它不是平面图。例如图7-5.1(a)，表面上看有几条边相交，但把它画成图7-5.1(b)，则可看出它是一个平面图。

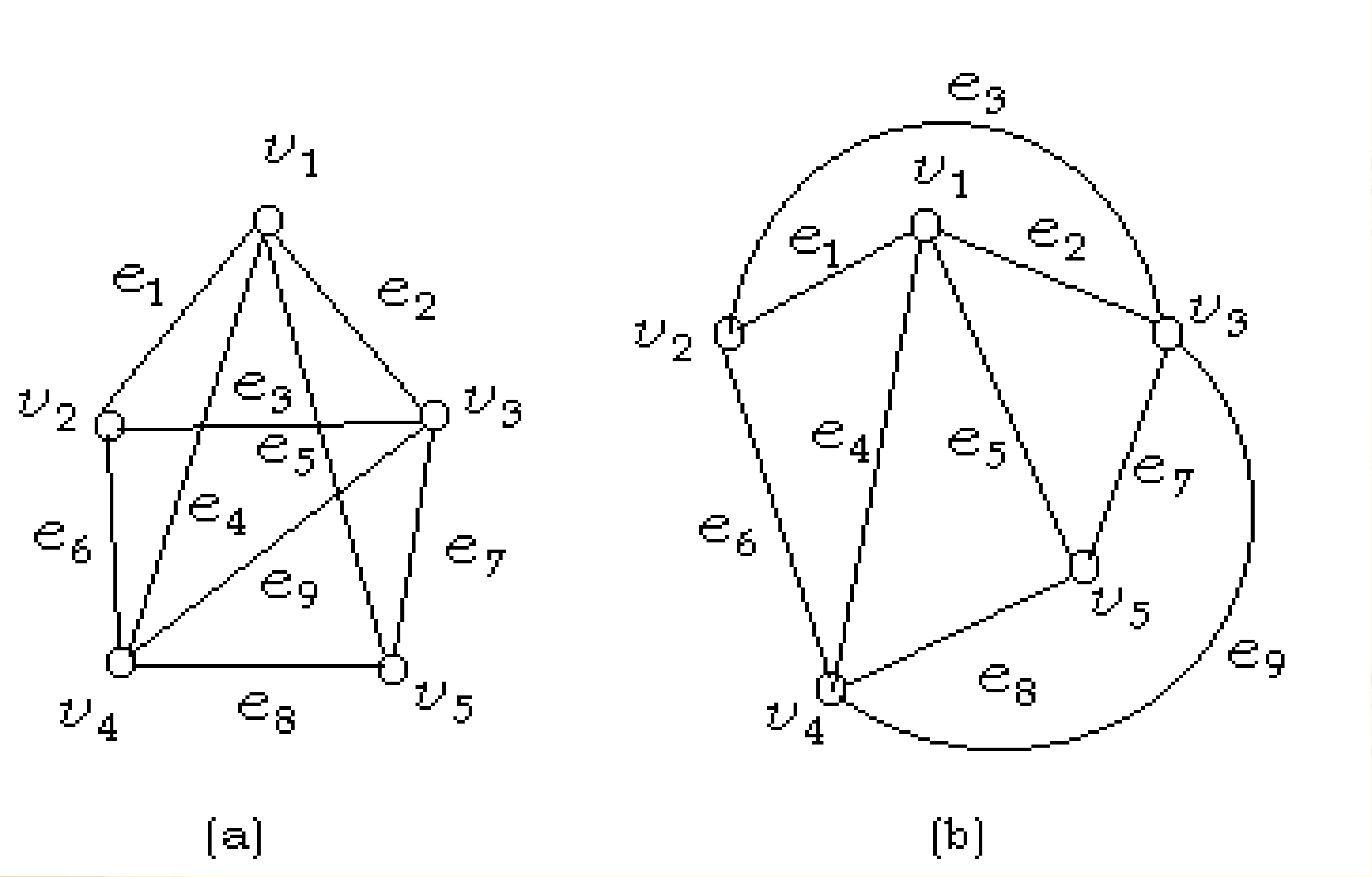


图7-5.1 改画的平面图

有些图形不论怎样改画，除去结点外，总有边相交。如有三间房子A_1、A_2、A_3，拟分别连接水、煤气和电三个接口，如图**7-5.2(a)**所示，这个图不论怎样改画，改画后至少有一条边与其它边在结点以外的地方相交，如图**7-5.2(b)**所示，故它不是一个平面图。

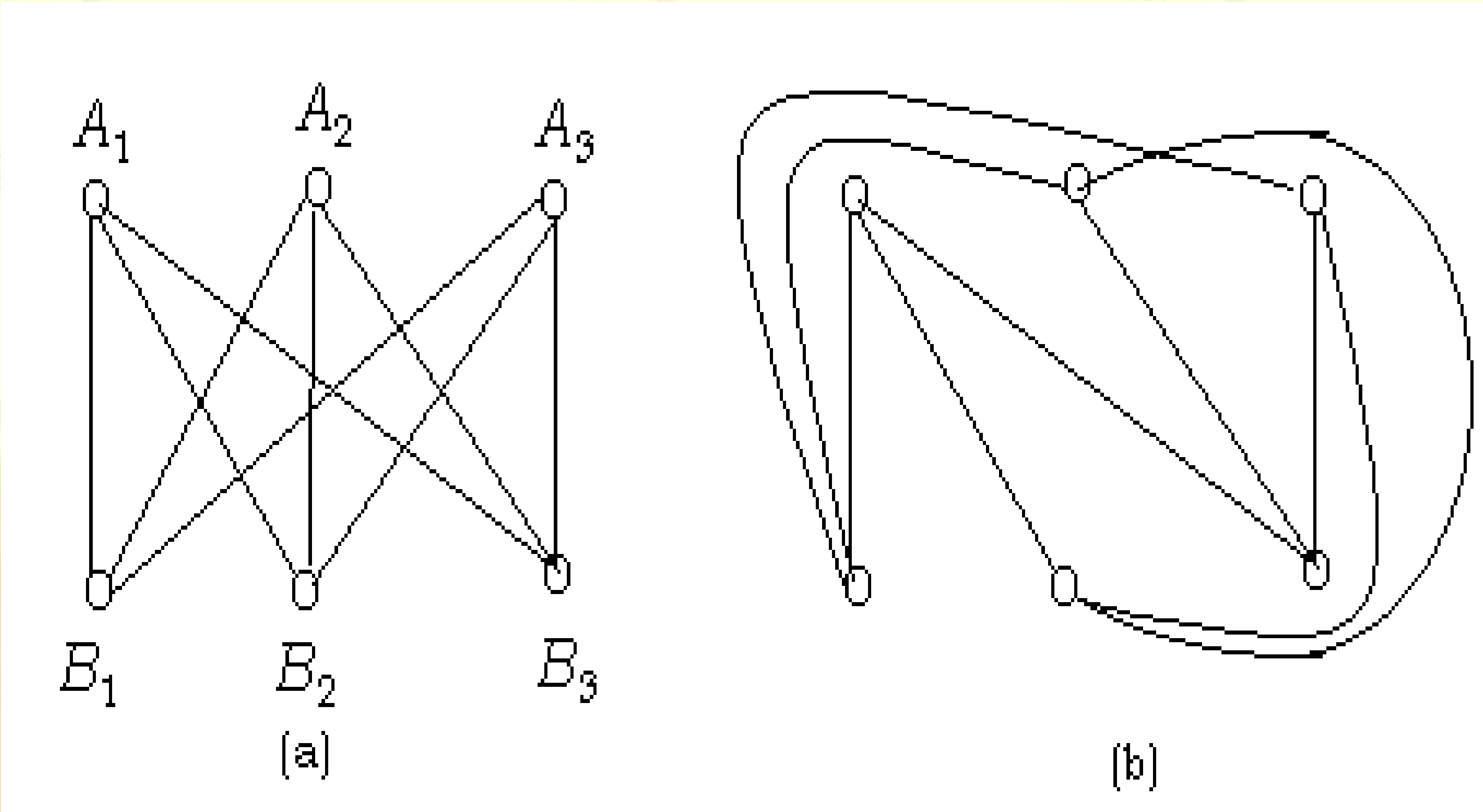


图7-5.2 不是平面图

[定义] 图G的面和边界

设G是一个连通平面图，由图中的边所包围的区域，在区域内既不包含图的结点，也不包含图的边，这样的区域称为图G的一个面，包围该面的诸边所构成的回路称为这个面的边界。

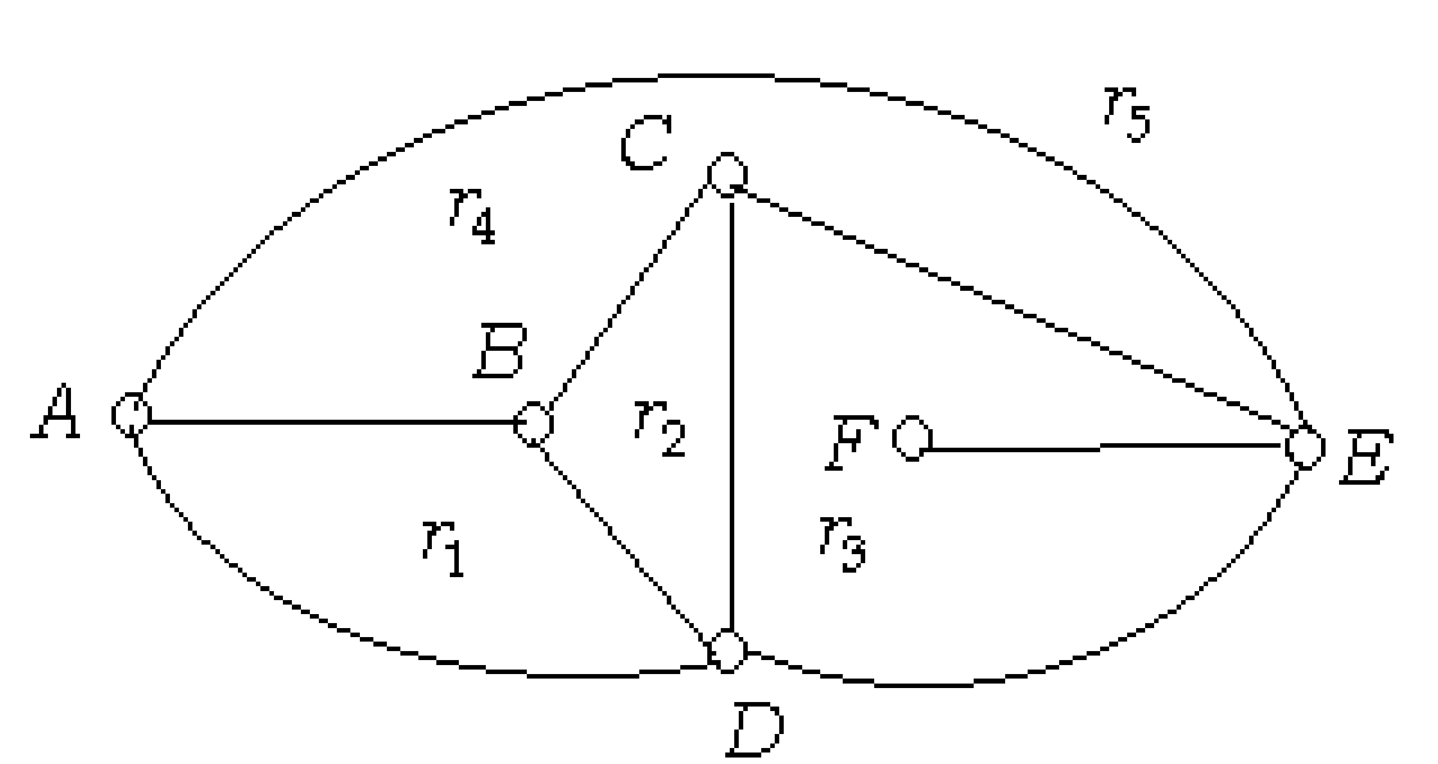


图7-5.3 面及其边界

例如图7-5.3，具有六个结点九条边，它把平面分成五个面。其中r_1、r_2、r_3、r_4四个面是由回路构成边界，如由回路***BADB***所围，r_3可看成从C点开始围绕r_3按反时针走，得到回路***CDEFFC***所围。另外还有一个面r_5在图形之外，不受边界约束，称作无限面。如果我们把图形看作包含在比整个平面还要大的一个矩形之内，那么在计算图形面的数目时，就不会遗漏无限面了。

今后我们把面的边界的回路长度称作该面的次数，记为$deg(r)$，

在图7-5.3中$deg(r_1)=3$，$deg(r_2)=3$，$deg(r_3)=5$，$deg(r_4)=4$，$deg(r_5)=3$。

定理7-5.1一个有限平面图，面的次数之和等于其边数的两倍。

证明　因为任何一条边，或者是两个面的公共边，或者在一个面中作为边界被重复计算两次，故面的次数之和等于其边数的两倍。

$$\sum_{i=1}^{k} \deg(r_i) = 2e$$

如图7-5.3中 $\sum_{i=1}^{5} \deg(r_i)$ ＝18，正好是边数9的两倍。

在三维空间中，关于凸多面体有一个著名的欧拉定理，设凸多面体有v个顶点e条棱r块面，

则$v-e+r＝2$。

我们可以将这个定理推广到平面图上。

定理7-5.2(欧拉定理)（平面图的必要条件，用于判定某个图不是平面图）

设有一个连通平面图G，共有v个结点e条边r块面，则欧拉公式 $v-e+r=2$ 成立。

证明 (1)若G为一个孤立结点，则$v=1$，$e=0$，$r=1$，故$v-e+r=2$成立。

(2)若G为一条边，则$v=2$，$e=1$，$r=1$，则$v-e+r=2$成立。

(3)设G为k条边时，欧拉公式成立。

即$v_k-e_k+r_k=2$。下面考察G为$k+1$条边时的情况。

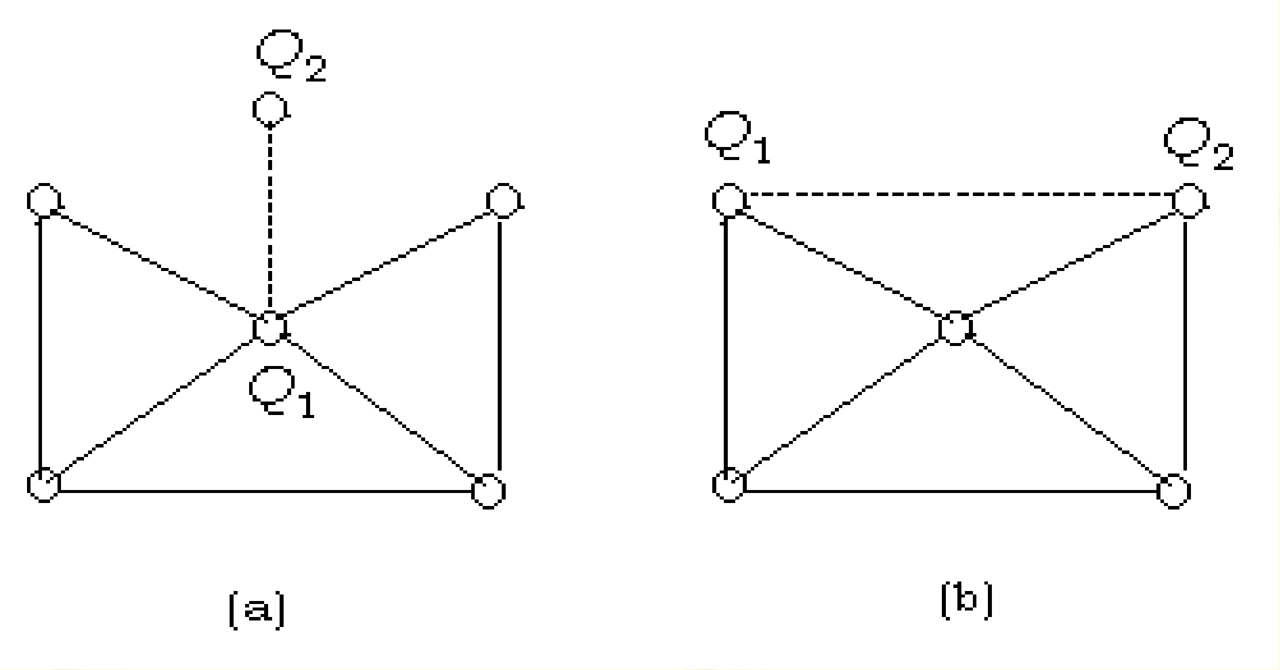


图7-5.4 欧拉定理证明的示意图

因为在k条边的连通图上增加一条边，使它仍为连通图，只有下述两种情况：

①加上一个新的结点Q_2，Q_2与图上的一点Q_1相连(如图7-5.4(a)所示)，此时，v_k和e_k两者都增加1，而面数r_k未变，故

$$(v_k+1)-(e_k+1)+r_k=v_k-e_k+r_k=2$$

②用一条边连接图上的已知点Q_1和Q_2,如图7-5.4(b)所示，此时e_k和r_k都增加1，而结点数未变，故

$$v_k-(e_k+1)+(r_k+1)=v_k-e_k+r_k=2$$

定理7-5.3 设*G*为有*v*个结点*e*条边的连通平面图，若*v*≥3，则*e*≤3*v*-6。

证明 设连通平面图*G*的面数为r，当*v*＝3，*e*＝2时上式显然成立，除此之外，若*e*≥3，则每一个面的次数不小于3，由定理1得知各面次数之和为2*e*，因此

$$2e \geq 3r, \quad r \leq \frac{2}{3}e$$

代入欧拉定理：

$$2 = v - e + r \leq v - e + \frac{2}{3}e$$

$$2 \leq v - \frac{e}{3}$$

6≤3*v*-*e*

e≤3*v*-6

应用此定理可以判定某些图不是平面图。

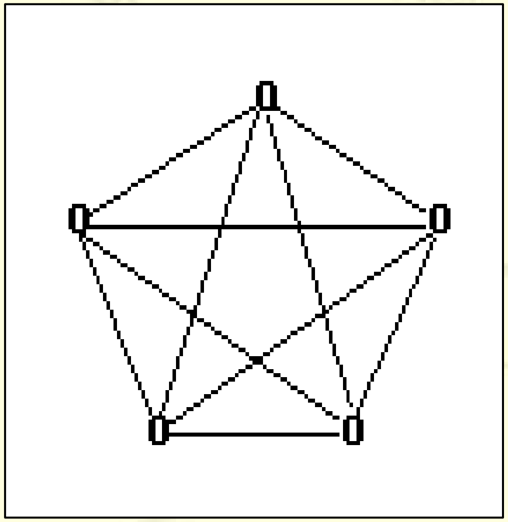


图7-5.5 K_5图

例1 设图G如图7-5.5所示，该图是K_5图。因为有5结点10条边，故$3\times5-6<10$，即$e\leqslant3v-6$对本图不成立，故K_5是非平面图。

需要注意定理7-5.3的条件并不是充分的，如图7-5.2所示的图，常称作$K_{3,3}$图，由于有6个结点9条边，故$3\times6-6\geqslant9$，即满足$e\leqslant3v-6$，但可以证明$K_{3,3}$也是非平面图。

例2 证明$K_{3,3}$图不是平面图。

如果$K_{3,3}$是平面图，因为在$K_{3,3}$中任意取三个结点，其中必有两个结点不邻接，故每个面的次数都不小于4，

由于，$4r \le 2e, r \le \frac{e}{2}$

即

$$v - e + \frac{e}{2} \ge 2, 2v - 4 \ge e$$

图中有6个结点9条边，故2×6－4＜9，即不是平面图。

如前面所讲，有些图形看来有边相交，但可以改画为平面图，有些图不论怎样改画，总会有边相交的。如果图的结点数和边数较多，改画起来比较麻烦，能否根据图所包含的子图来判定原图是否是平面图?

虽然欧拉公式有时能用来判定某一个图是非平面图，但是还没有简便的方法可以确定某个图是平面图。下面介绍库拉托夫斯基定理。

我们可以看到在给定的图**G**的边上，插入一个新的度数为**2**的结点，使一条边分成两条边，或者对于关联于一个度数为**2**的结点的两条边，去掉这个结点，使两条边化为一条边，这样不会影响图的平面性，如图**7-5.6(a)**和**(b)**。

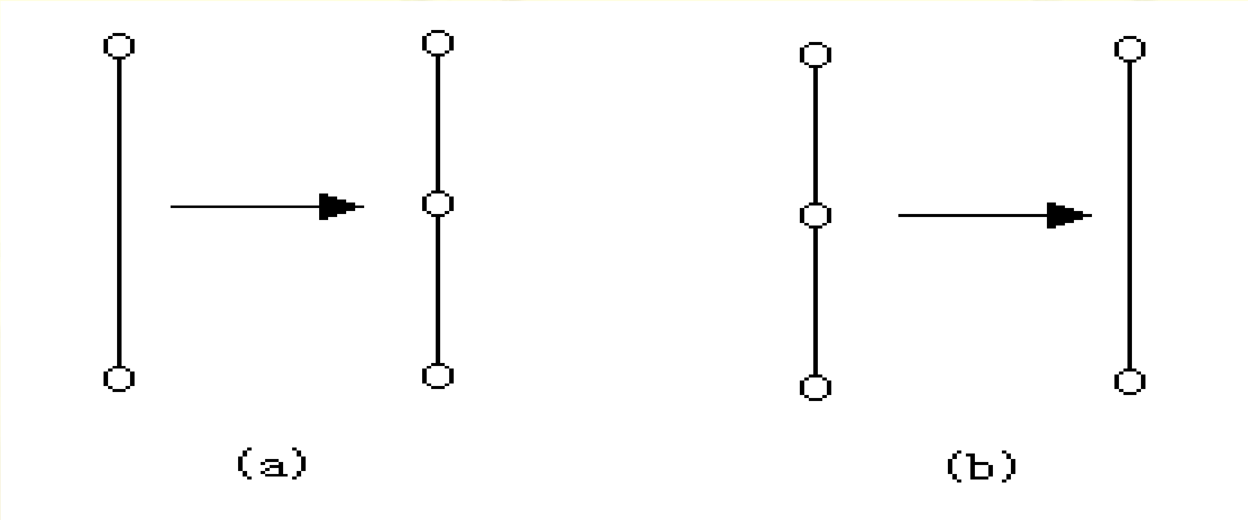


图7-5.6

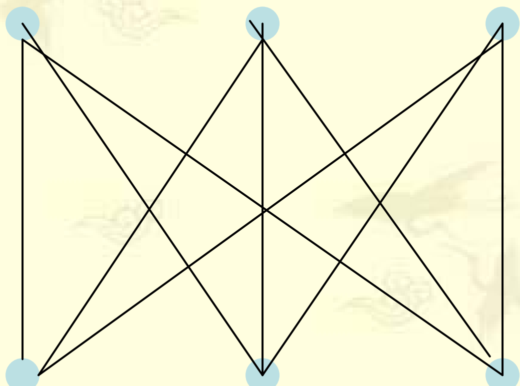
[定义]图是在2度结点内同构

给定两个图G_1和G_2，如果它们是同构的，或通过反复插入或删去度数为2的结点后，使G_1和G_2同构，则称该图是在2度结点内同构。

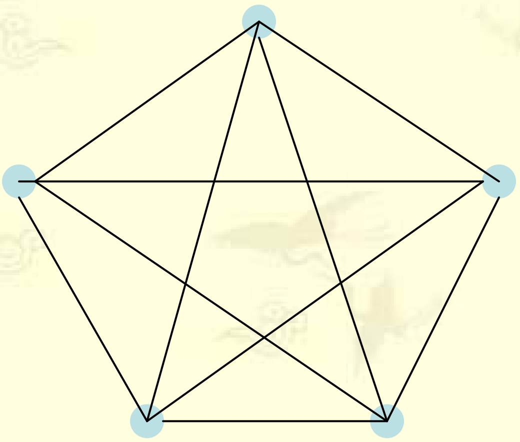
定理7-5.4(Kuratowski库拉托夫斯基定理)

一个平面图，当且仅当它不包含与$K_{3,3}$或K_5在2度结点内同构的子图。

库拉托夫斯基图(Kuratowski graph)



$K_{3,3}$



K_5

$K_{3,3}$和K_5(如图7-5.7所示)常称为库拉托夫斯基图，这个定理虽然很基本，但证明较长，故从略。

作业

P317 (1)

(2)

7-6 对偶图与着色 (dual graph & coloring)

与平面图有密切关系的一个图的应用是图形的着色问题，这个问题最早起源于地图的着色，一个地图的相邻的两个国家着于不同的颜色，那么最少需用多少种颜色？一百多年前，英国格色里(**Guthrie**)提出了用四种颜色即可对地图着色的猜想，**1879**年肯普(**Kempe**)提出了这个猜想的第一个证明，但到**1890**年希伍德(**Hewood**)发现肯普的证明是错误的，但他指出肯普的方法，虽不能证明地图着色用四种颜色就够了，但可证明用五种颜色就够了。此后四色猜想一直成为数学家感兴趣而未能解决的难题。直到**1976**年美国数学家阿佩尔和黑肯宣布：他们用电子计算机证明了四色猜想是成立的。所以从**1976**年以后就把四色猜想这个名词改为“四色定理”了。为了叙述图形着色的有关定理，下面先介绍对偶图的概念。

[定义]对偶图(dual graph)

给定平面图G＝〈V，E〉，它有面F_1，F_2，…，F_n，若有图G^*＝〈V^*，E^*〉满足下述条件：

(1)对于图G的任一个面F_i，内部有且仅有一个结点$v_i^* \in V^*$。

(2)对于图G的面F_i，F_j的公共边e_k，存在且仅存在一条边$e_k^* \in E^*$，使$e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$，且e_k^*和e_k相交。

(3)当且仅当e_k只是一个面F_i的边界时，v_i^*存在一个环e_k^*和e_k相交，则图G^*是图G的对偶图。

根据一个图得到它的对偶图实际上是将该图的结点改变成为对偶图的边，该图的边改变为对偶图的结点。

从这个定义看出，**G***是**G**的对偶图，则**G**也是**G***的对偶图。一个连通平面图的对偶图也必是平面图。

[定义]自对偶图

如果图**G**的对偶图**G***同构于**G**，则称**G**是自对偶的。

从对偶图的概念，我们可以看到，对于地图的着色问题，可以归纳为对于平面图的结点着色问题，因此四色问题可以归结为要证明对于任何一个平面图，一定可以用四种颜色对它的结点进行着色，使得邻接的结点都有不同的颜色。

图*G*的正常着色(或简称为着色)是指对它的每一个结点指定一种颜色，使得没有两个相邻的结点有同一种颜色。如果图*G*在着色时用*n*种颜色，我们称*G*为*n*-色的。

对于图*G*着色时，需最少颜色数称为着色数，记作$x(G)$。

虽然到现在还没有一个简单通用的方法，可以确定任一图*G*是否是*n*-色的。但我们可用韦尔奇·鲍威尔法(Welch Powell)对图*G*进行着色，其方法是：

⑴将图G的结点按照度数的递减次序进行排列。(这种排列可能并不是唯一的，因为有些点有相同的度数)。

⑵用第一种颜色对第一点进行着色，并且按排列次序，对前面着色点不邻接的每一点着上同样的颜色。

⑶用第二种颜色对尚未着色的点重复⑵，用第三种颜色继续这种做法，直到所有的点全部着上色为止。

例1 用韦尔奇·鲍威尔法对图7-6.1着色。

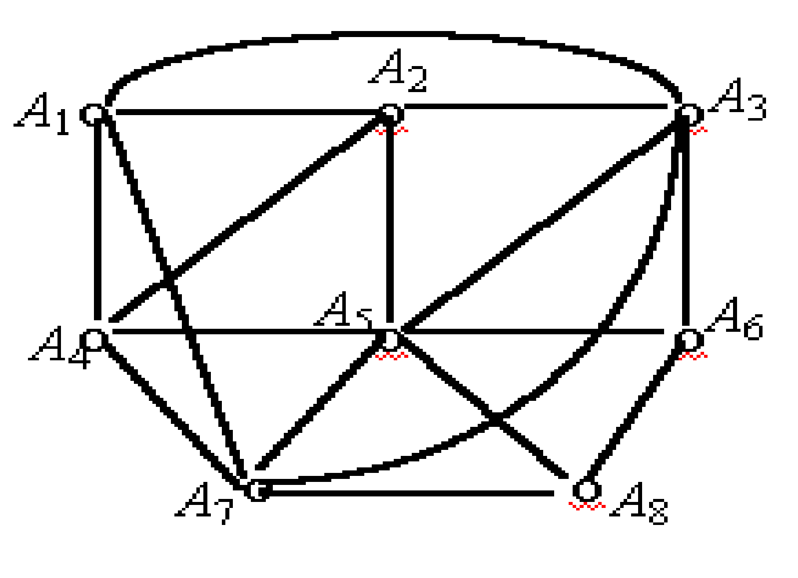


图7-6.1

解　(1)根据递减次序排列各点A_5，A_3，A_7，A_1，A_2，A_4，A_6，A_8。

(2)第一种颜色对A_5着色，并对不相邻的结点A_1也着第一种颜色。

(3)对A_3结点和它不相邻的结点A_4，A_8着第二种颜色。

(4)对A_7结点和它不相邻的结点A_2，A_6着第三种颜色。

因此图G是三色的。注意图G不可能是二色的，因为A_1，A_2，A_3相互邻接，故必须用三种颜色。所以$x(G)=3$。

定理7-6.1 对于n个结点的完全图K_n，有$x(K_n)=n$。

证明 因为完全图每一个结点与其它各结点都相邻接，故n个结点的着色数不能少于n，又n个结点的着色数至多为n，故有$x(K_n)=n$。

定理7-6.2 设G为至少有三个结点的连通平面图，则G中必有一个结点u，使得$\deg(u)\leqslant 5$。

证明 设$G=\langle V, E\rangle$，若G的每一个结点u，都有$\deg(u)\geqslant 6$，但

$$\sum_{i=1}^{v}\deg(v_i)=2e$$

因故$2e\geqslant 6v$，所以$e\geqslant 3v>3v-6$，与定理7-5.3矛盾。

定理7-6.3 任意平面图G最多是5-色的。