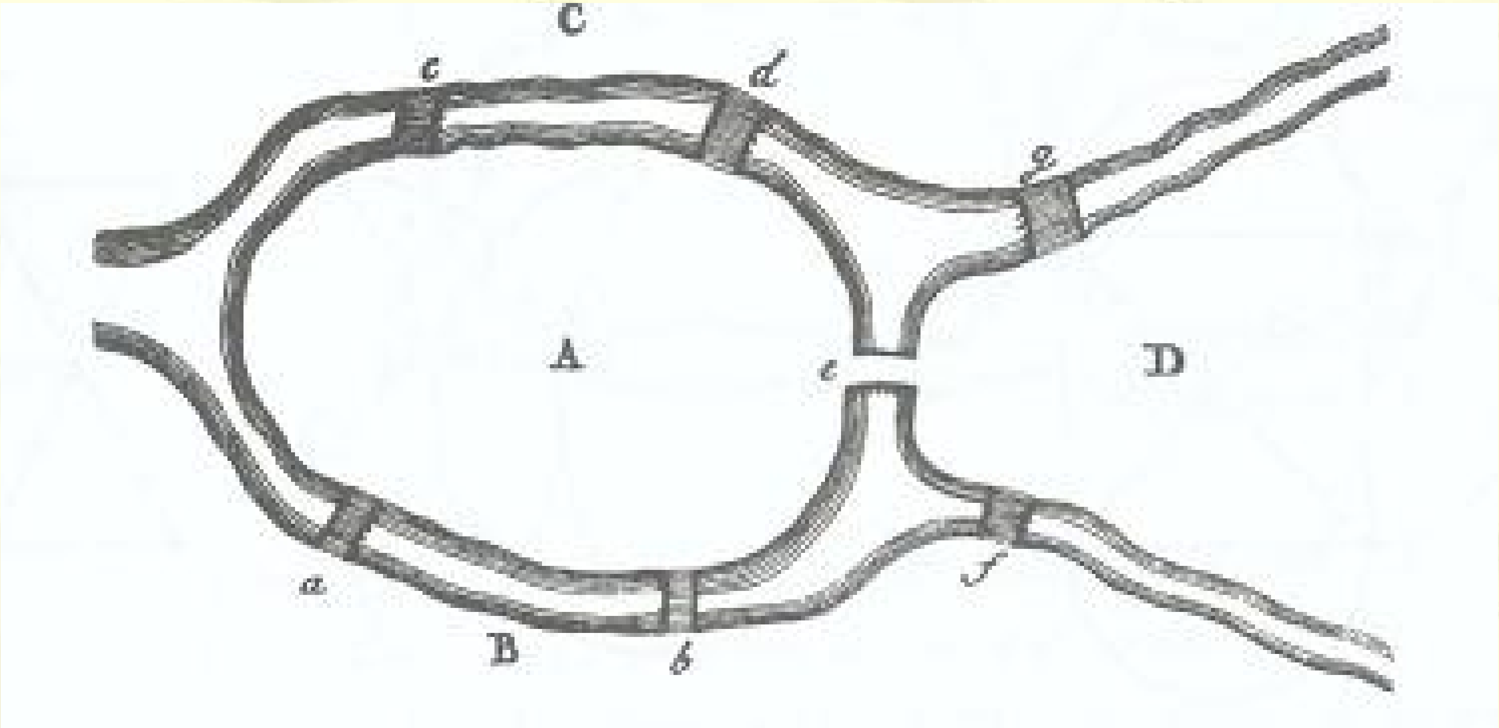
7-4 欧拉图与哈密尔顿图

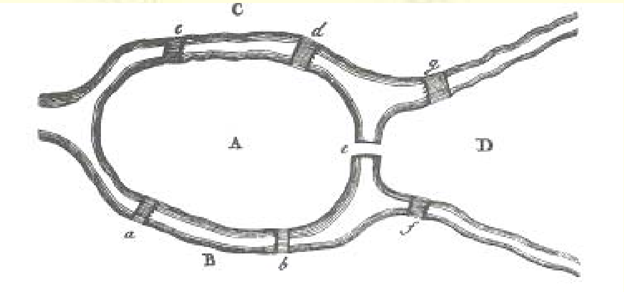
1736 年瑞士数学家列昂哈德·欧拉 **(leonhard Euler)**发表了图论的第一篇论文"哥尼斯堡七桥问题"。这个问题是这样的：哥尼斯堡**(Konigsberg)**城市有一条横贯全城的普雷格尔**(Pregel)** 河，城的各部分用七座桥连接，每逢假日，城中的居民进行环城的逛游，这样就产生一个问题，能不能设计一次"逛游"，使得从某地出发对每座跨河桥走一次，而在遍历了七桥之后却又能回到原地。

这个问题可用图7-4.1 表示。



Leonhard Euler

- Leonhard Euler(1707~1783):
  - 人类有史以来最多产的数学家.
  - 1736年,“七桥问题”,图论和拓扑学诞生



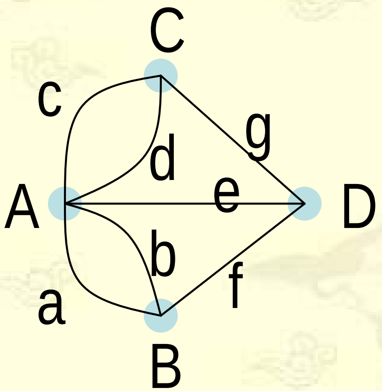
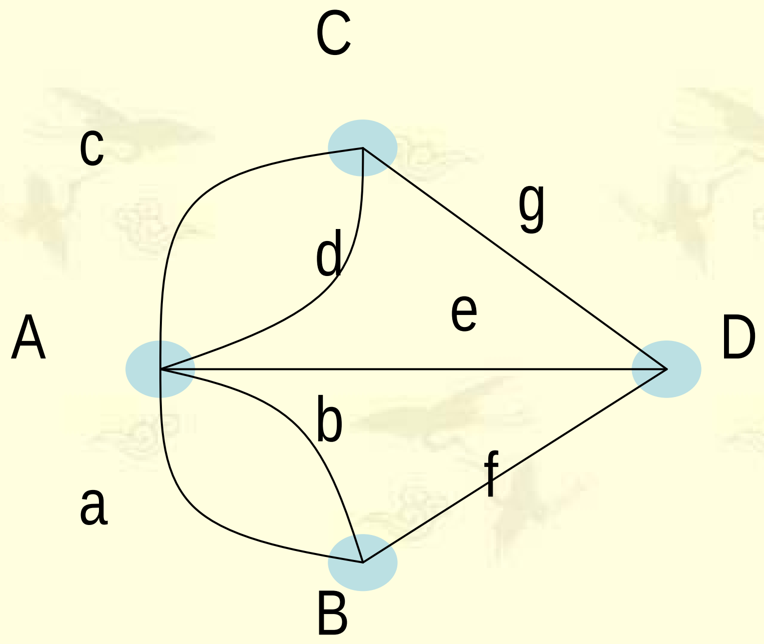


图7-4.2为七桥问题的图。



图中的结点***A*，*B*，*C*，*D***表示四块地，而边表示七座桥。哥尼斯堡七桥问题是在图中找寻经过每一条边且仅一次而回到原地的通路。

欧拉在1736年的一篇论文中提出了一条简单的准则，确定了哥尼斯堡七桥问题是不能解的。下面将讨论这个问题的证明。

[定义] 欧拉回路 给定无孤立点图G，若存在一条路，经过图中每边一次且仅一次，该条路称为欧拉路；若存在一条回路，经过图中的每边一次且仅一次，该回路称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图

[定理] 无向图G具有一条欧拉路，当且仅当G是连通的，且有零个或两个奇数度结点。

证明 必要性: 设G具有欧拉路，即有点边序列$v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_iv_ie_{i+1}\ldots e_kv_k$，其中结点可能重复出现，但边不重复，因为欧拉路经过图G中每一个结点，故图G必连通的。对任意一个不是端点的结点v_i，在一个欧拉路中每当v_i出现一次，必关联两条边，故虽然v_i可重复出现，但$deg(v_i)$必是偶数。对于端点，若$v_0=v_k$，则$deg(v_0)$为偶数，即G中无奇数度结点，若端点v_0与v_k不同，则$deg(v_0)$为奇数，$deg(v_k)$为奇数，G中就有两个奇数度结点。

充分性: 若图G连通，有零个或两个奇数度结点，我们构造一条欧拉路如下：

(1)若有两个奇数独结点，则从其中的一个结点开始构造一条迹，即从v_0出发关联e_1“进入”v_1，若$deg(v_1)$为偶数，则必由v_1再经过e_2进入v_2，如此进行下去，每次仅取一次。由于G是连通的，故必可到达另一奇数度结点停下，得到一条迹L_1：$v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_iv_ie_{i+1}\ldots e_kv_k$。若$G$中没有奇数度结点，则从任一结点$v_0$出发，用上述的方法必可回到结点$v_0$，得到上述一条闭迹$L_1$。

(2)若L_1通过了G的所有边，则L_1就是欧拉路。

⑶若G中去掉L_1后得到子图G'，则G'中每一点的度数为偶数，因原图是连通的，故L_1与G'至少有一个结点v_i重合，在G'中由v_i出发重复⑴的方法，得到闭迹L_2。

⑷当L_1与L_2组合在一起，如果恰是G，则即得欧拉路，否则重复⑶可得到闭迹L_3，以此类推直到得到一条经过图G中所有边的欧拉路。

推论

无向图G具有一条欧拉回路，当且仅当G是连通的，并且所有结点度数为偶数。

由于有了欧拉路和欧拉回路的判别准则，因此哥尼斯堡七桥问题立即有了确切的答案，因为有四个结点的度数皆为奇数，故欧拉路必不存在。

与七桥问题类似的还有一笔划的判别问题，要判定一个图G是否可一笔划画出，有两种情况：一是从图G中某一结点出发，经过图G的每一边一次且仅一次到达另一结点。另一种就是从G的某个结点出发，经过G的每一边一次且仅一次回到该结点。上述两种情况可以由欧拉路和欧拉回路的判定条件给予解决。

欧拉路和欧拉回路的概念，很容易推广到有向图上去。

定义7-4.2 给定有向图*G*，通过每边一次且仅一次的一条单向路(回路)，称作**单向欧拉路(回路)**。

定理7-4.2有向图G具有一条单向欧拉回路，当且仅当是连通的，且每个结点的入度等于出度。一个有向图G具有单向欧拉路，当且仅当是连通的，而且出两个结点外，每个结点的入度等于出度，但这两个结点中，一个结点的入度比出度大1。另一个结点的入度比出度小1。

这个定理的证明可以看作是无向图的欧拉路的推广，因为对于有向图的任意一个结点来说，如果入度与出度相等，则该结点的总度数为偶数，若入度和出度之差为1时，其总度数为奇数。因此定理的证明与定理7-4.1相似。

设有八个结点的有向图，如图**3.1.17**所示，

其结点分别记三位二进制码{000，001，010，011，100，101，110，111}，设，从结点可引出两条有向边0和1。按照上述的方法，对于八个结点的有向图共有16条边，在这种图的任一条路中，其邻接的边必是和的形式，即是第一条边标号的后三位与第二条边标号的头三位相同。因为图中的16条边被记成不同的二进制数，可见前述鼓轮转动所得的16个不同的位置触点的二进制码，即对应着图中的一条欧拉回路。图2.1.17每个结点的入度为2，出度也为2，图中的欧拉回路是{0000，0001，0010，0100，1001，0011，0110，1101，1010，0101，1011，0111，1111，1110，1100，1000}。根据相邻边的记法16个二进制数可写成对应的0-1码0000100110101111。将它安排成环状，既是所求的鼓轮。

上述的例子可以推广到有***n***个触点的鼓轮。

汉密尔顿回路
Hamiltonian circuit

与欧拉回路非常类似的问题是汉密尔顿回路问题。**1859**年威廉·汉密尔顿爵士在给他的朋友的一封信中，首先谈到关于十二面体的一个数学游戏，能不能在下图中找到一条回路，使它含有这个图的结点？他把结点看作是一座城市，联结两个结点的边看成是交通线，于是它的问题是能不能找到旅行路线，沿着交通线经过每一个城市恰好一次，再回到原来的出发地？他把这个问题称为周游世界问题。

[定义] 汉密尔顿路，汉密尔顿回路

给定图G，若存在一条路经过图中的每一个结点恰好一次，这条路称作汉密尔顿路。若存在一条回路，经过图中的每一个结点恰好一次，这个回路称作汉密尔顿回路。

具有汉密尔顿回路的图称为汉密尔顿图。

[定理] 无向图具有汉密尔顿回路的必要条件

若图$G=\langle V, E\rangle$具有汉密尔顿回路，则对于结点集V的每一个非空子集S均有$W(G-S)\leq|S|$成立。其中$W(G-S)$是$G-S$中连通分支数。

证明　设C是G的一条汉密尔顿回路，则对于V的任何一个非空子集S在C中删去S中任一结点a_1，则$C-a_1$是连通非回路，若删去S中的另一个结点a_2，则$W(C-a_1-a_2)\leq 2$，由归纳法得知

$$W(C-S)\leq |S|$$

同时$C-S$是$G-S$的一个生成子图，因而

$$W(G-S)\leq W(C-S)$$

所以　$W(G-S)\leq |S|$

利用该定理可以证明某些图是非汉密尔顿图。如下图 **(a)**中取$\boldsymbol{S=\{v_1,v_4\}}$，则$\boldsymbol{G-S}$中有三个分图，故$\boldsymbol{G}$不是汉密尔顿图。

这个方并不是总是有效的。例如，著名的彼得森(**Pertersen**)图，如上图 **(b)** 所示，在图中删去任一个结点或任意两个结点，不能使它不连通；删去三个结点，最多只能得到有两个连通分支的子图；删去四个结点，最多只能得到有三个连通分支的子图；删去五个或五个以上的结点，余下的结点数都不大于**5**，故必不能有**5**个以上的连通分支数。所以该图满足$W(C-S)\leqslant|S|$，但是可以证明它非汉密尔顿图。

虽然汉密尔顿回路问题和欧拉回路问题在形式上极为相似，但对图G是否存在汉密尔顿回路还无充要的判别准则。下面我们给出一个无向图具有汉密尔顿路的充分条件。

[定理] 无向图具有汉密尔顿路的充分条件

设G具有n个结点的简单图，如果G中每一对结点的度数之和大于等于n-1，则在G中存在一条汉密尔顿路。

证明 我们首先证明G是连通的。若G有两个或更多互不连通的分图，设一个分图有n_1个结点，任取一个结点v_1，设另一个分图有n_2个结点，任取一个结点v_2，因为$d(v_1)\leq n_1-1$，$d(v_2)\leq n_2-1$，故$d(v_1)+d(v_2)\leq n_1+n_2-2<n-1$，这表明与题设矛盾，故$G$必连通。

其次，我们从一条边出发构成一条路，证明它是汉密尔顿路。

设在**G**中有$p-1$条边的路，$p<n$，它的结点序列为v_1，v_2，…，v_p。如果有v_1或v_p邻接于不在这条路上的一个结点，我们可立即扩展这条路，使它包含这一个结点，从而得到p条边的路。否则，v_1和v_p都只能邻接于这条路上的结点，我们证明在这种情况下，存在一条回路包含结点v_1，v_2，…，v_p。若v_1邻接于v_p，则v_1，v_2，…，v_p，v_1即为所求的回路。假设与v_1邻接的结点集是{}，这里$2\leqslant l$，m，…，$t\leqslant p-1$，如果是邻接于v_{l-1}，v_{m-1}，…，v_{j-1}，…，v_{t-1}中之一，譬如说v_{j-1}，如图**1.1.20 (a)**所示，$v_1v_2v_3\ldots v_{j-1}v_pv_{p-1}\ldots v_jv_1$是所求的包含结点的回路$v_1$，$v_2$，…，$v_p$。

如果v_p不邻接于v_{l-1}，v_{m-1}，…，v_{j-1}，…，v_{t-1}中任一个，则v_p至少邻接于$p-k-1$个结点，$deG(v_p) \leqslant p-k-1$，$deG(v_1) \leqslant k$，故$deG(v_p)+deG(v_1) \leqslant p-k-1+k=p-1<n-1$，即$v_1$与$v_p$度数之和至多为$n-2$，得到矛盾。

至此，我们有包含所有结点v_1，v_2，…，v_p的一条回路，因为G是连通的，所以在G中必有一个不属于该回路的结点v_x与v_1，v_2，…，v_p中的每一个结点v_k邻接，如图1.1.20(b)所示，于是就得到一条包括p条边的路(v_x，v_k，v_{k+1}，v_{j-1}，v_p，v_{p-1}，v_j，v_1，v_2，v_{k-1})。如图3.1.20(c)所示，重复前述的构造方法，直到得到$n-1$条边的路。

容易看出，定理**7-4.4**的条件是图中的汉密尔顿路的存在的充分条件，但是并不是必要的条件。设图是n边形，如图所示，

其中n**=6**虽然任何两个结点度数的和是**4**＜**6**－**1**，但在G中有一条汉密尔顿路。

例题1:

考虑在七天内安排七们功课的考试，使得同一位教师所任的两们课程考试不安排在接连的两天里，试证如果没有教师担任多于四门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

证明　设G为七个结点的图，每一个结点对应一们功课的考试，如果这两个结点对应的课程的考试是由不同教师担任的，那么这两个结点之间有一条边，因为每个教师所任的课程不超过4，故每个结点的度数至少是3，任两个结点度数的和至少是6，故G总包含一条汉密尔顿路，它对应于一个七门考试课目的一个适当安排。

[定理] 无向图具有汉密尔顿回路的充分条件

设图G是具有n个结点的简单图，如果G中每一对结点的度数大于等于n，则在G中存在一条汉密尔顿回路。

证明　由定理7-4.4可知必有一条汉密尔顿路，设为$v_1v_2\ldots v_n$，如果v_1与v_n邻接，则定理得证。

如果v_1与v_n不邻接，假设v_1邻接，$2\leqslant i_j\leqslant n-1$，可以证明$v_n$必邻接于中之一。如果不邻接于中的任意一点，则$v_n$至多邻接于$n-k-1$个结点，因而$d(v_n)\leqslant n-k-1$，而$d(v_1)=k$，故$d(v_1)+d(v_n)\leqslant n-k-1+k=n-1$，与题设矛盾，所以必有汉密尔顿回路$v_1v_2\ldots v_{j-1}v_nv_{n-1}\ldots v_jv_1$。

给定图***G*=〈*V*，*E*〉**有***n***个结点，若将图***G***中度数之和至少是***n***的非邻接结点连接起来得图***G'***，对图***G'***重复上述步骤，直到不再有这样的结点为止，所得的图，称为原图***G***的闭包，记作***C*(*G*)**。

如图**3.1.23** 给出了六个结点的一个图，构造它的闭包过程。在这个例子中***C*(*G*)**是一个完全图。一般情况下，***C*(*G*)**也可能不是一个完全图。

作业7-4

P 311 (7)

(9)