7-3 图的矩阵表示

矩阵是研究图的一种有力工具，特别是利用计算机来处理有关图的算法时，首先遇到的难题是如何识别图？在前面我们也用有向图来表示集合***A***中元素的关系***R***，这种图被称为关系图，表示了集合***A***中元素的邻接关系，只要将集合***A***中的元素进行编号，这样的邻接关系同样可以用矩阵表示。识别一个图等价于识别一个矩阵。我们要讨论前面的有关图的概念，如何在矩阵中表达出来。

我们讨论的是简单图，并令图的结点已经编号。

定义7-3.1

设***G***=〈***V***，***E***〉为简单图，它有***n***个结点***V***={$v_1, v_2, \ldots v_n$ }，，则***n***阶方阵***A***(***G***)=(a_{ij})称为***G***的邻接矩阵。

其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_i \quad adj \quad v_j; \\ 0, v_i \quad nadj \quad v_j \text{ 或 } i=j.\end{cases}$$

adj 表示邻接，***nadj*** 表示不邻接。

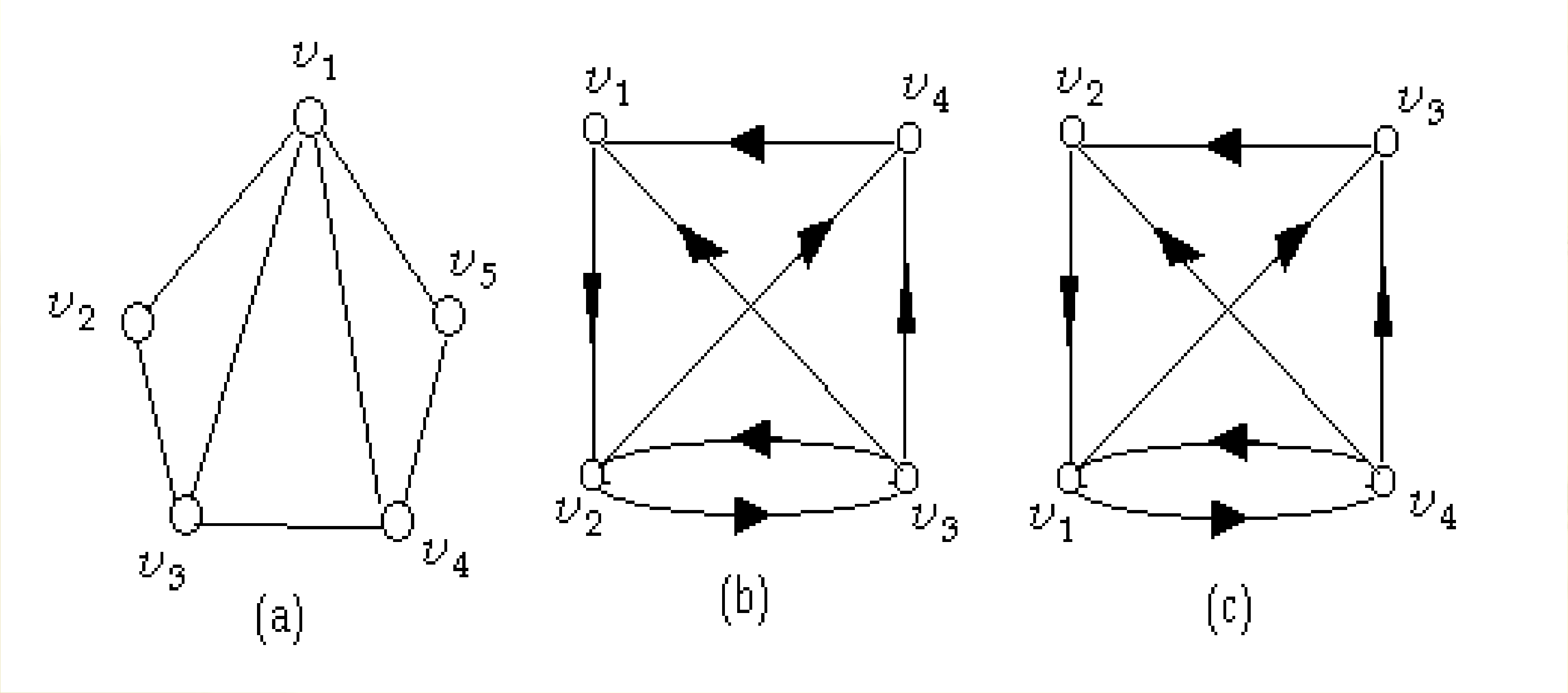

图7-3.1

例如图**7-3.1 (a)**的邻接矩阵为：

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

当给定的简单图是无向图时，邻接矩阵为对称的，当给定的图是有向图时，邻接矩阵不一定对称。图*G*的邻接矩阵显然与结点标定的次序有关，例如在图**7-3.1**的两个图**(b)**与图**(c)**中的结点v_1和v_2的次序对调,那么新的邻接矩阵由原来的邻接矩阵的第一行和第二行对调, 第一列和第二列对调而得到。

图7-3.1 图的邻接矩阵及置换

$$A(G_1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad A(G_2)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

一般地说，我们把一个*n*阶方阵*A*的某些列作一置换，再把相应的行作同样的置换，得到一个新的*n*阶方阵*A'*，我们称*A*和*A'*为置换等价。有向图的结点，按不同次序所写出来的邻接矩阵是彼此置换等价的，今后我们略去这种元素次序的任意性，可取任何一个邻接矩阵作为该图的矩阵表示。

从邻接接矩阵***A***中表示了图的基本概念和许多图的性质。第i行的元素是由结点v_i出发的边所决定的，第i行第j列为1的的元素，表示了在v_i和v_j之间有边相连，即存在$(v_i，v_j)$；第i行中值为1的元素的数目等于从v_i出发的出度；第j列中值为1的元素的数目等于从v_j进入的入度。

如果给定的图是零图，则其对应的矩阵中所有的元素都为零，它是一个零矩阵，反之亦然，即邻接矩阵为零矩阵的图必是零图。

用图形表示图的方法，关于结点间的通路很容易在图形中看出来，但在邻接矩阵中就需经过计算，不过，可以在计算机中处理。设有向图**G**的结点集 $V=\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$，它的邻接矩阵为：$A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$，现在我们来计算从结点$v_i$到结点$v_j$的长度为**2**的路的数目。注意到每条从结点$v_i$到结点$v_j$的长度为**2**的路的中间必经过一个结点$v_k$，即$v_i\to v_k\to v_j(1\leqslant k\leqslant n)$，如果图中有路$v_iv_kv_j$存在，那么$a_{ik}=a_{kj}=1$，即$a_{ik}\cdot a_{kj}=1$，反之如果图**G**中不存在路$v_iv_kv_j$，那么$a_{ik}=0$或$a_{kj}=0$，即$a_{ik}\cdot a_{kj}=0$，于是从结点$v_i$到结点$v_j$的长度为**2**的路的数目等于：

$$a_{i1}\cdot a_{1j}+a_{i2}\cdot a_{2j}+\cdots+a_{in}\cdot a_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{kj}$$

按照矩阵的乘法规则，这恰好是矩阵$(A(G))^2$中的第i行，第j列的元素。

$$(a_{ij}^{(2)})_{n\times n}=(A(G))^2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$(a_{ij}^{(2)})$表示从结点v_i到结点v_j的长度为2的路的数目。

$(a_{ii}^{(2)})$表示从结点v_i到结点v_i的长度为2的回路的数目。

从结点v_i到结点v_j的一条长度为3的路，可以看作从结点v_i到结点v_k的长度为1的路，在联结从结点v_k到结点v_j的长度为2的路，故从结点v_i到结点v_j的一条长度为3的路的数目：

$$a_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \bullet a_{kj}^{(2)}$$

即

$$(a_{ij}^{(3)})_{n\times n} = (A(G))^3 = (A(G))\bullet(A(G))^2$$ 。

一般地有

$$(a_{ij}^{(l)})_{n\times n} = (A(G))^l = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \overbrace{\cdots}^{l-2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

上述这个结论对无向图也成立。

定理7-3.1 设$A(G)$为图G的邻接矩阵，则$(A(G))^l$中的i行j列元素等于G中联结v_i与v_j的长度为l的路的数目。

证明 对l施归纳法

当$l=2$时，由上得知是显然成立。

设命题对l成立，由

$$(A(G))^{l+1}=A(G)\bullet(A(G))^l$$

故

$$a_{ij}^{(l+1)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot a_{kj}^{(l)}$$

根据邻接矩阵的定义a_{ik}表示联结v_i与v_k长度为1的路的数目，而是联结v_k与v_j长度为l的路的数目，上式的每一项表示由v_i经过一条边到v_k，再由v_k经过长度为l的路到v_j的，总长度为$l+1$的路的数目。对所有的k求和，即是所有从v_i到v的长度为$l+1$的路的数目，故命题对$l+1$成立。

例1 给定一图$G=\langle V, E\rangle$如图7-3.3所示。
见P290

从上面的矩阵中我们可以看到一些结论，如v_1与v_2之间有两条长度为3的路，结点v_1与v_3之间有一条长度为2的路，在结点v_2有四条长度为4的回路。

在许多问题中需要判断有向图的一个结点v_i到另一个结点v_j是否存在路的问题。如果利用图G的邻接矩阵A，则可计算A，A^2，A^3，…，A^n，…，当发现其中的某个A^l的$a_{ij}^{(l)} \geqslant 1$，就表明结点v_i到v_j可达。但这种计算比较繁琐，且A^l不知计算到何时为止。从前面我们得知，如果有向图G有n个结点$V=\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$，v_i到v_j有一条路，则必有一条长度不超过n的通路，因此只要考察$a_{ij}^{(l)}$就可以了，其中$(1 \leqslant l \leqslant n)$。对于有向图$G$中任意两个结点之间的可达性，亦可用可达矩阵表达。

定义7-3.2

令 **$G=\langle V, E\rangle$** 是一个简单有向图，**$|V|=n$**，假定 **G** 的结点已编序，即 **$V=\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$**，定义一个 **$n\times n$** 矩阵 $P=(p_{ij})$。其中

$$P_{ij}=\begin{cases}1, \text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 至少存在一条路} \\ 0, \text{从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 不存在路}\end{cases}$$

称矩阵**P**是图**G**的可达性矩阵。

可达性矩阵表明了图中任意两个结点间是否至少存在一条路以及在任何结点上是否存在回路。

一般地讲可由图G的邻接矩阵A得到可达性矩阵P。即令$B_n = A + A^2 + \ldots + A^n$，在从$B_n$中将不为0的元素改为1，而为零的元素不变，这样改换的矩阵即为可达性矩阵P。

例题1 见P292

上述计算可达性矩阵的方法还是比较复杂，因为可达性矩阵是一个元素为0或1的布尔矩阵，由于在每个A^l中，对于两个结点间的路的数目不感兴趣，它所关心的是该两个结点间是否有路存在，因此我们可将矩阵A，A^2，…，A^n分别改为布尔矩阵A，$A^{(2)}$，…，$A^{(n)}$，故$P= A \vee A^{(2)} \vee \ldots \vee A^{(n)}$，其中$A^{(i)}$表示在布尔运算下$A$的$i$次方。

从本例的计算可以看到，如果把邻接矩阵看作是结点集*V*上关系*R*的关系矩阵，则可达性矩阵*P*即为M_{R^+}，因此可达矩阵亦可用**Warshall** 算法计算。

Warshall 算法略。

上述可达性矩阵的概念可以推广到无向图中，只要将无向图的每一条边看成是具有相反方向的两条边，这样，一个无向图就可以看成是有向图。无向图的邻接矩阵是一个对称矩阵，其可达矩阵称为连通矩阵,也是一个对称矩阵。

对于一个无向图**G**，除了可用邻接矩阵以外，还对应着一个称为图**G**的完全关联矩阵，假定图**G**无自回路，如因某种运算得到自回路，则将它删去。

定义7-3.3

给定无向图G，令$v_1,v_2,\ldots,v_p$ 和$e_1,e_2,\ldots,e_q$ 分别记为G的结点和边，则矩阵$M(G)=(m_{ij})$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1,\text{若 } v_i \text{ 关联 } e_j\\ 0,\text{若 } v_i \text{ 不关联 } e_j\end{cases}$$

称$M(G)$为完全关联矩阵。

(1)图中每一关联两个结点，故*M*(*G*)的每一列只有两个**1**。

(2)每一行元素的和数对应于结点的度数。

(3)一行中的元素全为**0**，其对应的结点为孤立点。

(4)两个平行边其对应的两列相同。

(5)同一图当结点或边的编序不同，其对应*M*(*G*)仅有行序、列序的差别。

当一个图是有向图时，亦可用结点和边的关联矩阵来表示。

定义7-3.4 给定简单有向图 $G=\langle V, E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\ldots v_p\}$，$E=\{e_1,e_2,\ldots e_q\}$，$p\times q$阶矩阵$M(G)=(m_{ij})$，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, \text{在}G\text{中}v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ -1, \text{在}G\text{中}v_i\text{是}e_j\text{的终点}\\ 0, \text{在}G\text{中}v_i\text{不关联}\ e_j\end{cases}$$

称$M(G)$为G的关联矩阵。

作业

P300 (3),

(4) 选作