7-2 路与回路
(path & circuit)

在现实世界界中,常常要考虑这样的一个问题:

如何从一个图*G*中的给定的结点出发,沿着一些边连续移动，达到另一个指定的结点,这种依次由点和边组成的序列，就形成路的概念。

定义7-2.1 路(path)

给定图$G=\langle V,E\rangle$,设v_0，v_1，…，$v_n \in V$, e_1，e_2，…，$e_n \in E$,其中e_i 是关联结点v_{i-1},v_i的边,交替序列$v_0e_1v_1e_2…e_nv_n$ 称为联结v_0到v_n 的路。

路:$v_1e_2v_3e_3v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_7v_3$

[定义] 路的长度

v_0和v_n 分别称作路的起点和终点, 边的数目 n称作路的长度。

[定义] 回路(circuit)

当$v_0=v_n$ 时, 这条路称作回路。

[定义] 迹(trace)

若一条路中所有的边e_1，e_2，…，e_n均不相同,称作迹。

(边不相同，但结点可以重复)

迹:$v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3e_2v_4$

[定义] 通路

若一条路中所有的结点v_0，v_1，…，v_n 均不同,则称作通路。

(1)通路:$v_4e_8v_5e_6v_2e_1v_1e_2v_3$

(2)在简单图中的一条通路必定也是迹

[定义] 圈(cycle)

闭的通路,即除$v_0=v_n$ 外,其余的结点均不相同的路,就称作圈。

圈:$v_2e_1v_1e_3v_3e_7v_5e_6v_2$

例如在图**7-2.1**中有

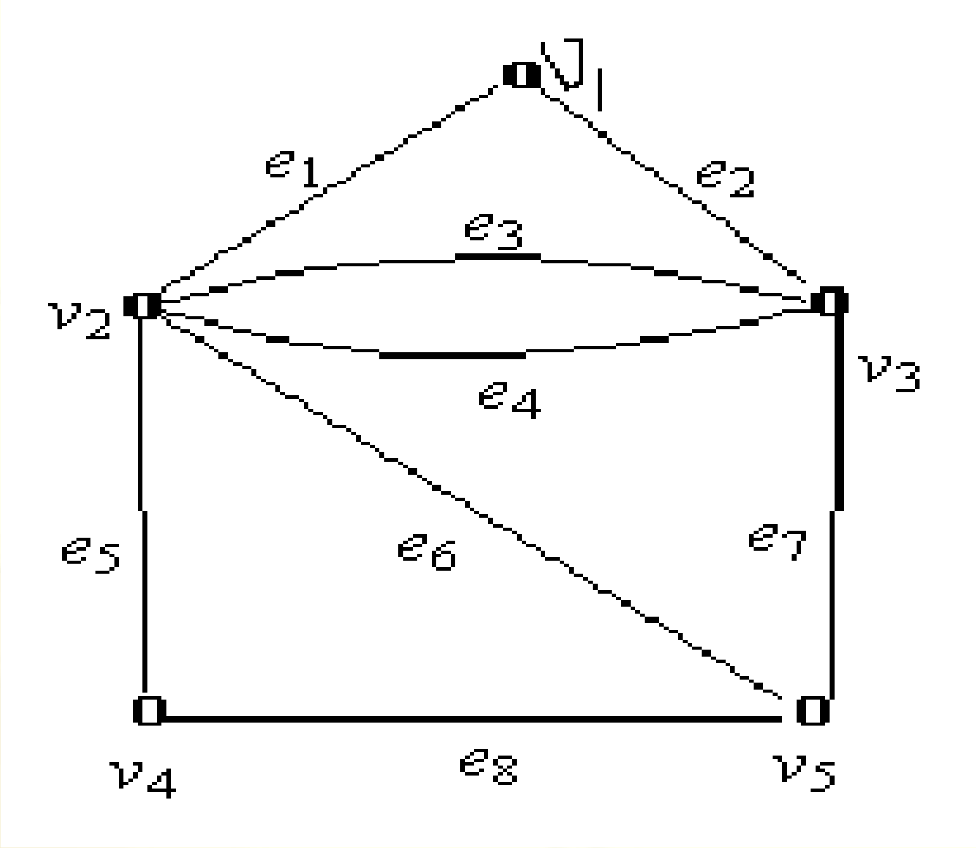

图7-2.1 路的例子

路:$v_1e_2v_3v_2e_3v_3e_4v_2e_6v_5e_7v_3$

迹:$v_5e_8v_4e_5v_2e_6v_5e_7v_3e_2v_4$

通路:$v_4e_8v_5e_6v_2e_1v_1e_2v_3$

圈:$v_2e_1v_1e_3v_3e_7v_5e_6v_2$

在简单图中一条路$v_0e_1v_1e_2\ldots e_nv_n$，由它的结点序列$v_0v_1 \ldots v_n$确定,所以简单图的路,由可由其结点序列$[v_0v_1 \ldots v_n]$表示。在有向图中,结点数大于1的一条路可由边序列$[e_1e_2 \ldots e_n]$表示。

定理7-2.1

在一个具有n个结点的图中，如果从结点v_j到结点v_k存在一条路，则从结点v_j到结点v_k存在一条不多于n-1条边的路。

证明　如果从结点v_j到结点v_k存在一条路，则该路上的结点序列是$[v_j \ldots v_i \ldots v_k]$，如果在这路上有$l$条边，则序列中必有$l$+1个结点，若$l>n$-1，结点数>n，则必有结点$v_s$，它在序列中不止一次出现，即必有序列$[v_j \ldots v_s \ldots v_s \ldots v_k]$，在路中去掉从$v_s$到$v_s$的这些边，仍然得到一条从结点$v_j$到结点$v_k$的路，但此路比原来的路的边数要少。如此重复进行下去，必得到一条从结点v_j到结点v_k不多于n-1条边的路。

推论 在具有n个结点的圈中，若从结点v_j到结点v_k存在一条路，则存在一条从结点v_j到结点v_k不多于n条边的路。

定义7-2.2 连通

在无向图G中，结点u和v之间若存在一条路，则结点u和v称为是连通的。

结点u和v之间连通，用$[u，v]$表示。

一个图G中的路、迹、圈可以说是图G的一部分，也是图，但并一定是G的子图，但称它为图G的广义子图。

定理7-2.2

在一个简单无向连通图中，以下结论成立：

(1)[*u*，*u*]为真。

(2)若[*u*，*v*]为真，则[*v*，*u*]为真。

(3)若[*u*，*v*]为真且[*v*，*w*]为真，则[*u*，*w*]为真。

定理的证明可以由连通性的定义直接推出。

反过来，设结点集*V*上的连通性定义一个关系 $R=\{\langle u, v\rangle \mid u, v \in V\}$，对于 $\langle u, v\rangle \in R$，当且仅当[*u*，*v*]为真。显然*R*是一个等价关系，根据等价关系*R*进行关于*V*的等价分类，则关于*V*的等价类为关于*V*的一个划分。

定义7-2.3 连通分支(connected component)

根据图*G*中的一个结点*v*定义图*G*的子图$[v]_G$如下：

$[v]_G = \langle V(v), E(v) \rangle$，

其中$V(v)=\{x \mid [v, x]$为真$\}$；$E(v)$包含所有连结$V(v)$中结点的边。$[v]_G$为$V(v)$的一个等价类，称它为*G*的一个连通分支。

定理7-2.3

图*G*的不同的连通分支构成一个关于集合*V*的划分,即。

①对于任意$v\in V$，$[v]_G\neq\varnothing$。

②$[a]_G\neq[b]_G$且$[a]_G\cap[b]_G=\varnothing$。

③ $\bigcup_{v\in V}[v]_G = V$ 。

证明 因为$v\in[v]_G$，所以①成立。

②：假定$[a]_G\cap[b]_G\neq\varnothing$，则需证明$[a]_G=[b]_G$。令$x\in[a]_G\cap[b]_G$，则结点*x*与结点*a*和*b*都连通，则在*a*和*b*之间存在着一条*G*的路，则$b\in[a]_G$，这意味着$[b]_G\subseteq[a]_G$。

同样的方法证明$[a]_G\subseteq[b]_G$。即$[a]_G=[b]_G$。

③的正确性是由于：

$$V \supset \bigcup_{v \in V} [v]_G \supset \bigcup_{v \in V} \{v\} = V$$

图$G=\langle V，E\rangle$可以分解为若干个连通分支$G_i=\langle V_i，E_i\rangle$(i=1，2，…，$k$)，$G$的连通分支数用$W(G)$来表示。

在连通分支中两个存在着通路[u，v]的结点u和v之间定义它们的距离。用l[u，v]表示从结点u到v之间存在某一条路的长度，结点u和v之间的距离用$d(u，v)$来表示，并$d(u，v)=\min l[u，v]$。结点u和v之间的距离是从u到v的最短迹的长度。

对于距离有如下明显的结果：

①$d(u，u)=0$，若$u \neq v$，则$d(u，v)>0$。

②$d(u，v)= d(v，u)$。

③$d(u，v)+ d(v，w) \geqslant d(u，w)$。

因此在连通分支上的结点的距离是可测的。

[定义]

令$G=\langle V,E\rangle$为任意图，如果对于任意$(u, v)\in E$，皆有$(v, u)\in E$，则G称为是对称的。

任何一个无向图都是对称的。

对称的有向图，相邻的两个结点，必然存在着两条方向相反的连结它们的边。

因此，任何一个对称的有向图，可以用一个无向图来表示，相反，任何一个无向图都可以将它变换成对称的有向图。

[定义] 连通图(concatenation graph)

若图*G*=〈*V*,*E*〉的任意两个结点皆有路连通，则*G*称为连通图。

有一个平凡的结论：图*G*=〈*V*，*E*〉是连通的，当且仅当*G*只有唯一个连通分支。

[定义]

设无向图$G=\langle V,E\rangle$为连通的，若对于图G中的两个结点x，y的任何通路，皆通过结点a，则称结点a为结点x，y的关节点。换言之，

$\cap\{[x, y]\}=\{a\}$。

这样在图中连通的两个结点，当删除它们的关节点后，它们将不连通。

定义7-2.4 点割集(vertex set)和割点(cut vertex)

设无向图$G=\langle V,E\rangle$为连通的，若有结点集$V_1\subseteq V$，使得图G删除了V_1所有结点后，所得的子图是不连通的，而删除了V_1的任意真子集后，所得的子图仍然是连通图。则称集合V_1为图G的点割集。若某一结点就构成点割集，则称该结点为割点。

这样，一个连通图，将删除它的一个点割集后，将分成两个或多于两个连通分支。

若 G 不是完全图，我们定义 $k(G)=\min\{|V_1| \mid V_1$是$G$的点割集$\}$为$G$的点连通度(或连通度connectivity)。连通度$k(G)$是为了产生一个不连通图需要删去的点的最少数目。

于是，一个不连通图的连通度等于0，存在着割点的连通图的连通度为1。完全图K_p中删去任何m个($m<p-1$)点后仍然连通，但是删去了$p-1$个结点后产生一个平凡图，故$k(K_p)=p-1$。

定义7-2.5 边割集(edge cut)、割边(cut edge)

设无向图$G=\langle V,E\rangle$为连通的，若有边集$E_1\subseteq E$，使得图G删除了E_1所有边后，所得的子图是不连通的，而删除了E_1的任意真子集后，所得的子图仍然是连通图。则称集合E_1为图G的边割集。若某一边构成边割集，则称该边为割边(或桥)。

G的割边也就是G中的一条边e使得$W(G-e)>W(G)$。与点连通度相似，我们定义非平凡图G的边连通度为：$\lambda(G)=\min\{E_1$是G的边割集$\}$，边连通度$\lambda(G)$是为了产生一个不连通图需要删去边的最少数目。

对于平凡图$\lambda(G)=0$，此外一个不连通图也有$\lambda(G)=0$。

定理7-2.4 对于任何一个图$G=\langle V,E\rangle$，有
$k(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$

证明 若G不连通，则$k(G)=\lambda(G)=0$，故上式成立。

若G连通，

①证明$\lambda(G)\leqslant\delta(G)$。若G是平凡图，则$\lambda(G)=0\leqslant\delta(G)$，若G是非平凡图，则因每一结点的所有关连边构成一个边割集，故$\lambda(G)\leqslant\delta(G)$。

②再证$k(G)\leqslant\lambda(G)$

(a) 设 $\lambda(G)=1$，即G有一割边，显然此时$k(G)=1$，上式成立。

(b) 设$\lambda(G)\geqslant 2$，则必可删去某$\lambda(G)$条边，使G不连通，而删除$\lambda(G)-1$条边，它仍然连通，而且有一条桥$e=(u，v)$。对$\lambda(G)-1$条边中每一条边都选取一个不同于u，v的端点，将这些端点删去必至少删去$\lambda(G)-1$条边。若这样产生的图是不连通的，则$k(G)\leqslant\lambda(G)-1\leqslant\lambda(G)$，若这样产生的图是连通的，则$e=(u，v)$仍然是桥，此时再删去$u$，$v$，就必产生一个不连通图，故$k(G)\leqslant\lambda(G)$。

由此得$k(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$。

定理7-2.5

一个连通无向图*G*=〈*V*,*E*〉的某一点*v*是图*G*的割点，当且仅当它是某对结点*u*，*w*的关节点。

证明　必要性：若结点*v*是*G*的割点，则删去它后，必然有两个以上的连通分支。*u*和*w*分别在不同的连通分支上取，显然*v*是结点*u*，*w*的关节点。

充分性：若是结点*u*，*w*的关节点，则*u*到*w*的每一条路都通过*v*，删除*v*后*u*到*w*已不连通，故*v*是图*G*的割点。

定理7-2.6

设无向图*G*=〈*V*,*E*〉，将其中的边分成互不相交的类E_1，E_2，…，E_k，使得，同属于一类的任意两条边是相关的，则E_1，E_2，…，E_k为等价类。

证明　我们只要证明相关关系是自反的、对称的和传递的就行了。

(1)根据相关性定义，图中的每一边都与自己相关，因此，相关关系是自反的。

(2)相关关系的对称性也是显然的。相关的两条边相同或都属于同一个回路。

(3)设e_1和e_2相关，e_2和e_3相关，如果相关的一对边中，有一对是相同的两个点，则传递性显然。若e_1和e_2相关，e_2和e_3相关分别存在着经过它们的回路P_1，P_2。而边e_2是P_1，P_2的公共边，去掉这条边仍然是一条回路，且经过e_1和e_3。因此e_1和e_3是相关的。

无向图的连通性不能直接推广到有向图。在有向图**G=**〈**V,E**〉中，从结点***u***到***v***有一条路，称为从***u***可达***v***。可达性是有向图的二元关系，它是自反的和传递的，但一般来说它不是对称的。关于有向图的结点的距离与无向图类似定义，它有：

①$d(u,u)=0$，若$u\neq v$，则$d(u,v)>0$。

②$d(u,v)+d(v,w)\geqslant d(u,w)$。

从***u***不可达***v***，则通常写成$d(u,v)=\infty$

但是若从***u***可达***v***而且从***v***可达***u***时，以下的等式$d(u,v)=d(v,u)$不一定成立。

今后我们将 $D=\max_{u,v\in V} d\langle u,v\rangle$

称作图**G**的直径。

定义7-2.6 强连通、单侧连通、弱连通

简单有向图*G*=〈*V*,*E*〉中，任意一对结点间，至少有一个结点到另一个结点是可达的，则称这个图为单侧连通。如果对于图*G*中的任意两个结点两者之间是互相可达的，则称这个图为强连通的。如果在图*G*中略去方向，将它看成是无向图，图是连通的，则称该有向图为弱连通的。

从前面的定义可以看出，强连通图必是单侧连通的，单侧连通必是弱连通的。它们的逆命题都不真。

定理7-2.7　一个有向图是强连通的，当且仅当G中有一个回路，它至少包含每个结点一次。

证明　充分性：如果图中有一条回路，它至少包含每个结点一次，则G中任意两个结点都是相互可达的，故G是强连通的。

必要性：若有向图G是强连通的，则任意两个结点都是可达的故必可作一回路经过图中的所有各点。若不然则必有一回路不包含某一结点v，因此，v与回路上的各结点就不是相互可达的了，与强连通的条件矛盾。

定义7-2.7

设在简单有向图中，具有强连通性质的最大子图，称为强分图；具有单侧连通性质的最大子图，称为单侧分图；具有弱连通性质的最大子图，称为弱分图。

定理7-2.8 在有向图$G=\langle V,E\rangle$中，它的每一个结点位于且仅位于一个强分图内。

证明 (1)设$v\in V$，令S是G中所有与v相互可达的结点的集合，当然S也包括v，而S是G中的一个强分图，因此G中的每一个结点必位于一个强分图中。

⑵设v位于两个不同的强分图S_1和S_2中，因为S_1中的每一个结点与v可达，而v与S_2中的每一个结点也相互可达，S_1中的每一个结点与S_2中的每一个结点通过v都相互可达，这与题设S_1为强分图矛盾，故G的每一个结点只能位于一个强分图中。

通过强分图的概念，我们可以将有向图$G=\langle V,E\rangle$的结点集分成等价类$V_i(1\leqslant i\leqslant r)$，使得结点$u$和$v$是相同等价类的，当且仅当有一条从$u$到$v$的路或从$v$到$u$的路。设$E_i(1\leqslant i\leqslant r)$是连接$V_i$中的结点的边的集合，则$G_i=\langle V_i, E_i\rangle (1\leqslant i\leqslant r)$为$G$的强分图。

设$G=\langle V,E\rangle$没有圈的非平凡强连通图。它的每一个结点都是某路的起点，同时也是某另一路的终点，对于每一个结点，至少有两条边与之连接。

定义7-2.8

在一个强连通图中，多于两条边连接的结点称为集结点，其余的结点称为非集结点。只有起点和终点是集结点的路称为分支。

定义7-2.9　没有圈的强连通图$G=\langle V,E\rangle$，如果它只有一个集结点，则G称为族。

族是一个十分简单的结构，不同的分支都由一个集结点开始和结束。

定义7-2.10　设图$G=\langle V,E\rangle$是强连通的，若删除任一边后失掉这个强连通性，则G称为最小强连通的。

很显然族是最小强连通图。

我们说图的结点子集$A \subset V$被集结，如果所有连接A中结点的边删除，所有A中的点变为1个点。这样得到一个关于G的P—图。

作业

P287 (5)

(7)

(8)