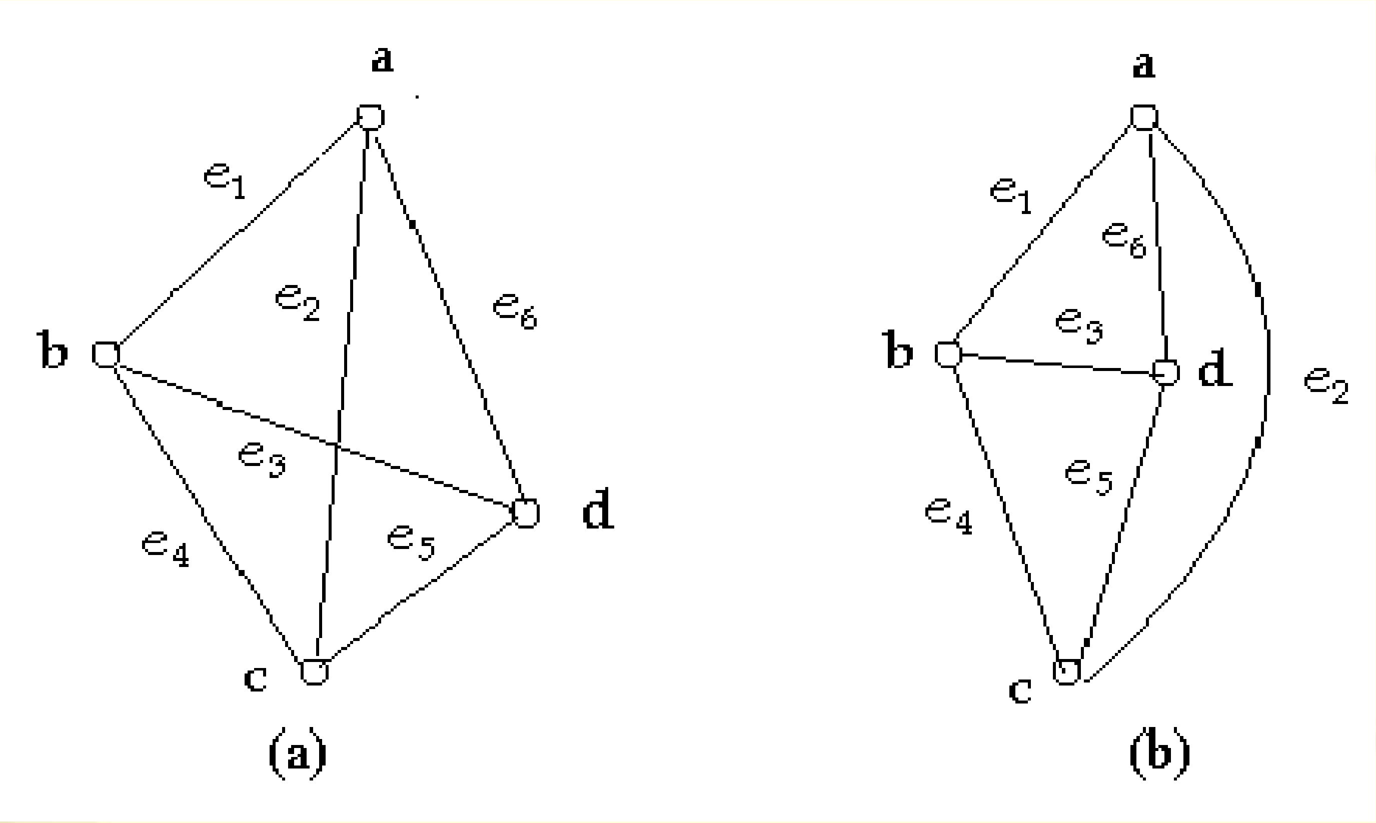
第七章 图论

7-1 图的基本概念

定义7-1.1 图(graph)

一个被称为图的结构是一个三元组〈V (G)，E(G)，ψ_G〉，其中V (G)是一个非空的结点集合，E(G)是边的集合，ψ_G为边集E到结点无序偶（有序偶）集合上的函数。若把图中的边看作总与两个结点关联，集合E(G)的元素e可表示为序偶〈v_i，v_j〉，在不强调边的方向时（即为无向边时，〈v_i，v_j〉又可表示为(v_i，v_j)）。在这样的约定下，可将图的定义简化为二元组〈V (G)，E(G)〉。

举例说明：



不同形状的图形表示同一图

定义： 无向边和有向边

若边e_i与无序偶(v_j,v_k)相关联,则称边为无向边 (undirected edge)。

若边e_i与有序偶$<v_j,v_k>$ 相关联,则称边为有向边 (directed edge) 。其中v_j 称为e_i 的起始结点; v_k 称为e_i的终止结点。

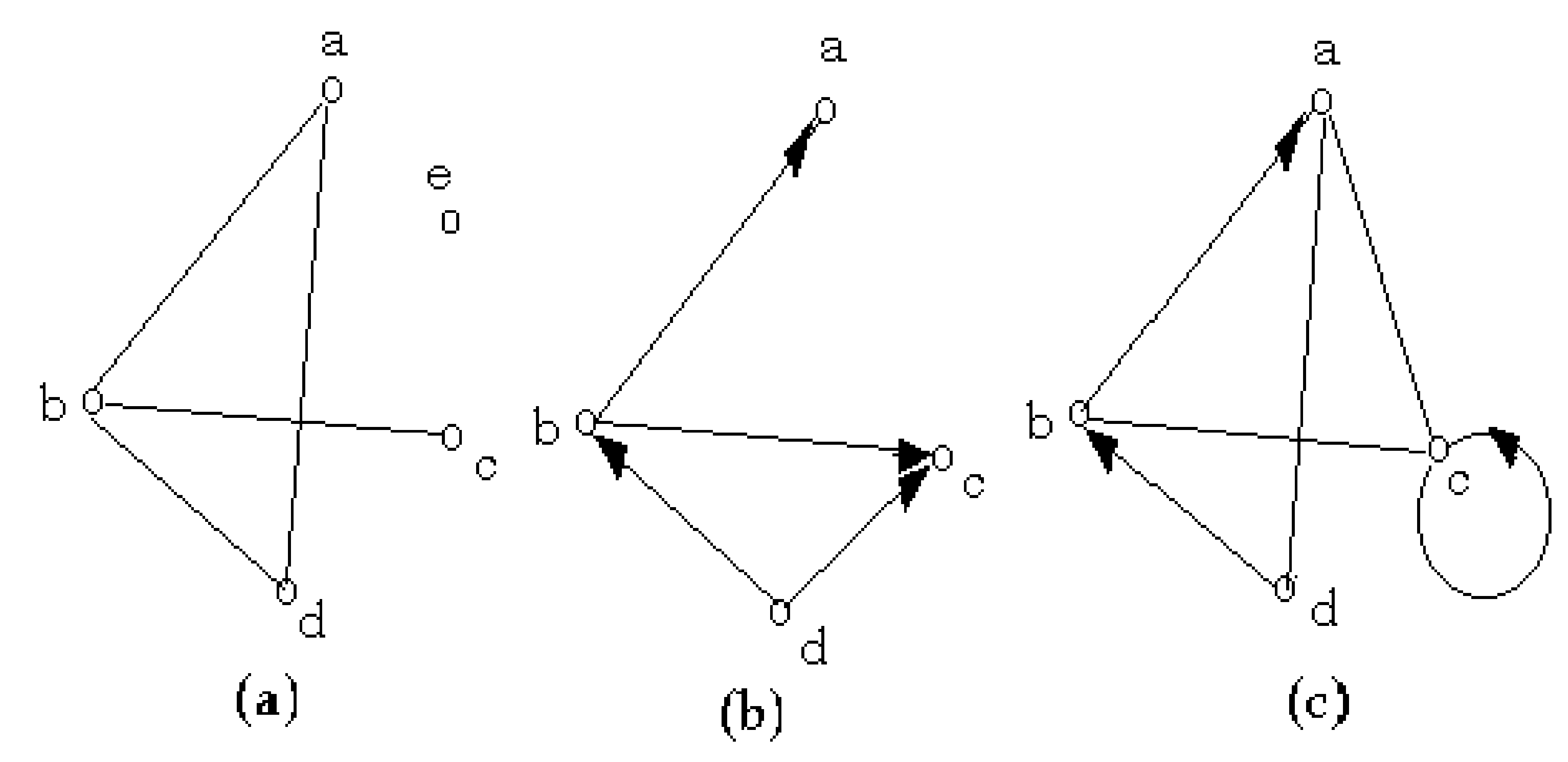


图7-1.2 无向图、有向图和混合图

[定义] 无向图，有向图和混合图

每一条边都是无向边的图称为无向图,如图7-1.2(a)所示，表示为：

G=<V,E>=<{a,b,c,d,e},{(a,b),(a,d),(b,c),(b,d)}>

每一条边都是有向边的图称为有向图,如图7-1.2 (b)所示，表示为：

G’=<V,E>=<{a,b,c,d},{<b,a>,<b,c>,<d,b>,<d,c>}>

如果在图中一些边是有向边,另一些边是无向边,这个图称为混合图,如图7-1.2 (c)所示，表示为：

G”=<V,E>=<{a,b,c,d},{(a,d),(a,c),(b,c),<c,c>,<b,a>,<d,b>}>

[定义] 邻接点

在一个图中，两个结点由一条有向边或无向边关联，则这两个结点称为邻接点。

[定义] 邻接边

在一个图中，关联于同一个结点的两个边称为邻接边。

[定义] 孤立点

在一个图中不与任何结点相邻接的结点，称为孤立点。

如图7-1.2(a)中的结点e。

[定义] 零图(null graph)

仅由孤立结点组成的图（E=∅）称为零图

[定义] 平凡图(trivial graph)

仅由一个孤立点构成的图(|V|=1)称为平凡图。

[定义] 自回路或环(loop)

关联于同一结点的一条边称为自回路或环。

如图7-1.2中(c,c)是环。环的方向是没有意义的，它既可以作为有向边，也可以作为无向边。

[定义]结点的度数(degree of vertex)

在图$G=\langle V, E\rangle$中，与结点$v(v\in V)$关联的边数称为该结点的度数，记作$\deg(v)$。

例如在图7-1.3（b）中，结点A的度数为2，结点B的度数为3，我们约定：每一个环在其对应的结点上的度数增加2。故图7-1.3（b）中结点E的度数为5。

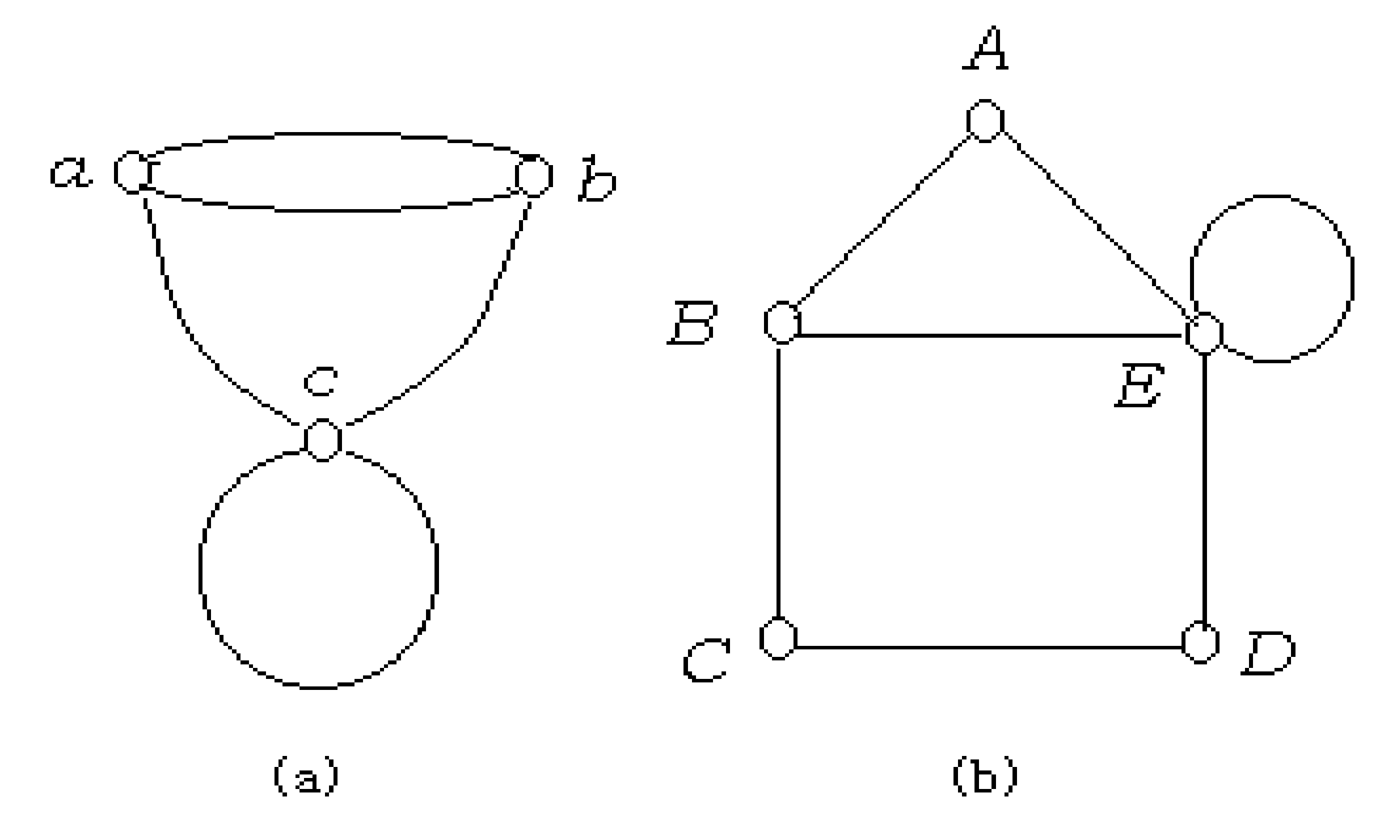


图7-1.3 度数示意图

[定义] 图G的最大度和最小度

$\Delta(G)=\max\{\deg(v) \mid v\in V(G)\}$,

$\delta(G)=\min\{\deg(v) \mid v\in V(G)\}$,

分别称$G=\langle V,E\rangle$的最大度和最小度。如图7-1.3（b）中, $\Delta(G)=5$, $\delta(G)=2$。

[定理7-1.1] 握手定理

每一个图结点度数的总和等于边数的两倍。

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

证明　因为每条边关联着两个结点,而每条边分别给这两个结点的度数为**1**。因此在一个图中，结点度数的总和等于边数的两倍。

[定理7-1.2] 在任意图中,度数为奇数的结点,必定是偶数个。

证明 设V_1为图G中度数为奇数的结点集,而V_2为图G中度数为偶数的结点集,则根据定理7-1.1,有

$$\sum_{v\in V_1}\deg(v)+\sum_{v\in V_2}\deg(v)=2|E|$$

由于 $\sum_{v\in V_2}\deg(v)$ 为偶数之和，是偶数, 又 **2|E|** 为偶数,

所以 $\sum_{v\in V_1}\deg(v)$ 必为偶数，所以$|V_1|$为偶数。

[定义] 结点的入度，结点的出度，结点的度数

在有向图中,射入一个结点的边数称为该结点的入度(indegree),由一个结点射出的边数称为该结点的出度(outdegree)。结点的出度和入度之和就是该结点的度数。

[定理7-1.3] 在任意有向图中，所有结点入度之和等于所有结点出度之和，都等于边数。

$$\sum_{i=1}^{n}\deg^{+}(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\deg^{-}(v_i)=|E|$$

证明　因为每一条有向边必对应一个入度和一个出度,若一个结点具有一个入度或出度,则必关联一条有向边,所以,有向图中各结点入度之和等于边数,个结点出度之和也等于边数。因此任何有向图中, 入度之和等于出度之和。

在上面所讲的图的概念中，一个结点的度数可能大于 1，但是任何一对结点间常常不多于一条边。

[定义] 平行边**(parallel edge)**

连接于同一对结点间的多条边称为平行边。

[定义] 多重图**(multigraph)**

含有平行边的任何一个图称为多重图。

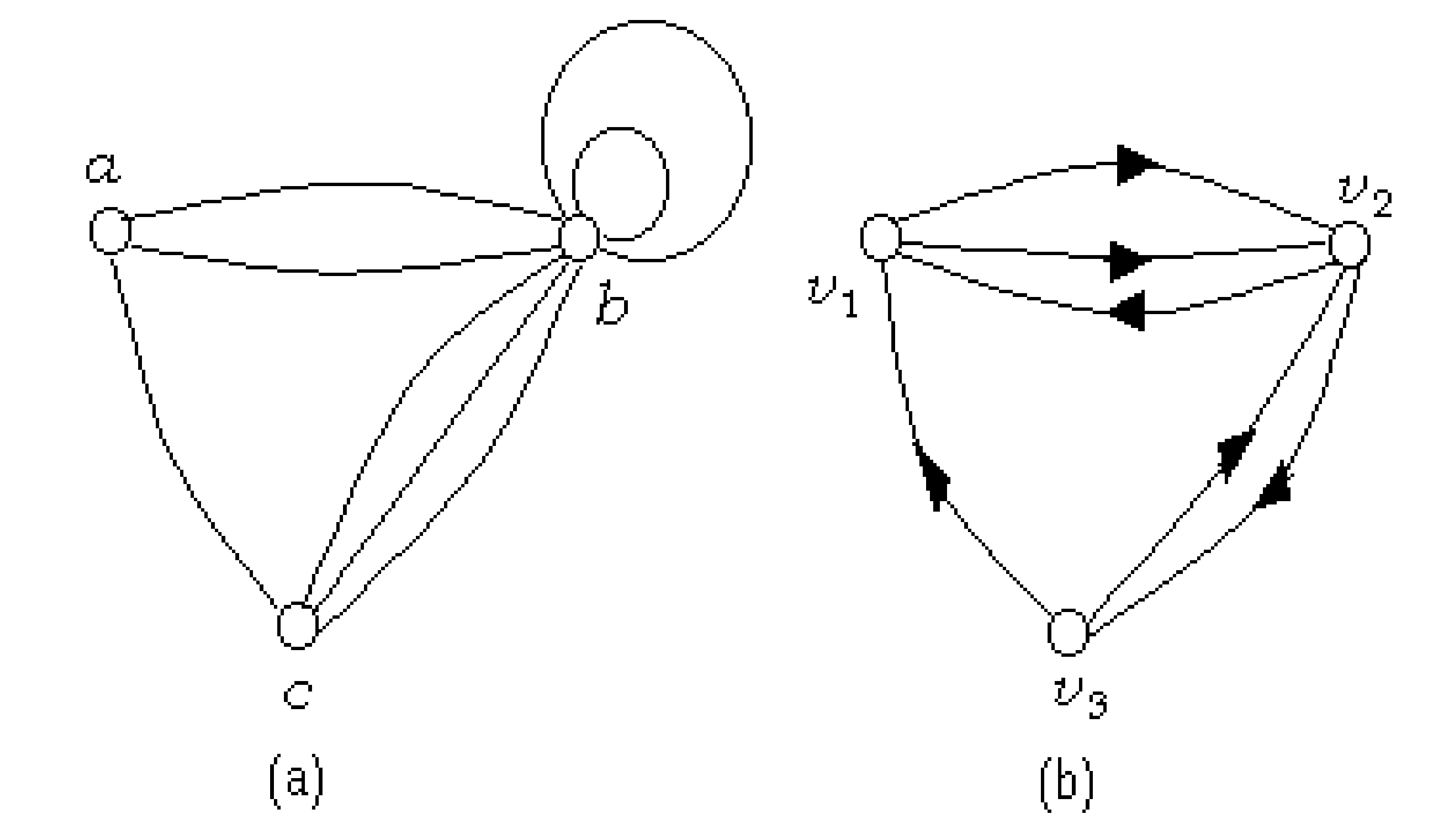


图7-1.4 多重图

[定义]简单图(simple graph)

把不含有平行边和环的图称为简单图。

[定义] 完全图(complete graph)

简单图G＝〈V,E〉中若每一对结点间都有边相连,则称该图为完全图。

有n个结点的无向完全图记作K_n。

定理7-1.4 n个结点的无向完全图 K_n 的边数为$n(n-1)/2$。

证明: 在 K_n 中,任意两个结点都有边相连,n个结点中任两个点的组合数为:

$$\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

故K_n的边数为 $|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$

如果K_n 中,对每一条边任意确定一个方向,就称该图为***n***个结点的有向完全图。显然,它的边数也为

$$|E| = \frac{1}{2}n(n-1)$$

什么叫做给一个图添加或删除一个结点和边呢?

添加一个结点，即集合*V*增加一个元素，在图形中画上一个点;

添加一条边即现有的图形中的两个结点加上一条边。

在现有的图中删除一条边是将图形中的一条边删除;

而删除一个结点不仅仅将此结点删去，而且要删去由此结点连接的所有边。

给定任意含有***n***个结点的图**G**,总可以把它补成一个具有同样结点的完全图,

方法是把那些没有联上边的结点添加上边。

[定义] 相对于完全图的补图

给定一个图G,由G中所有结点和所有能使G成为完全图的添加边组成的图,称为G的相对于完全图的补图,或简称为G的补图,记作G。

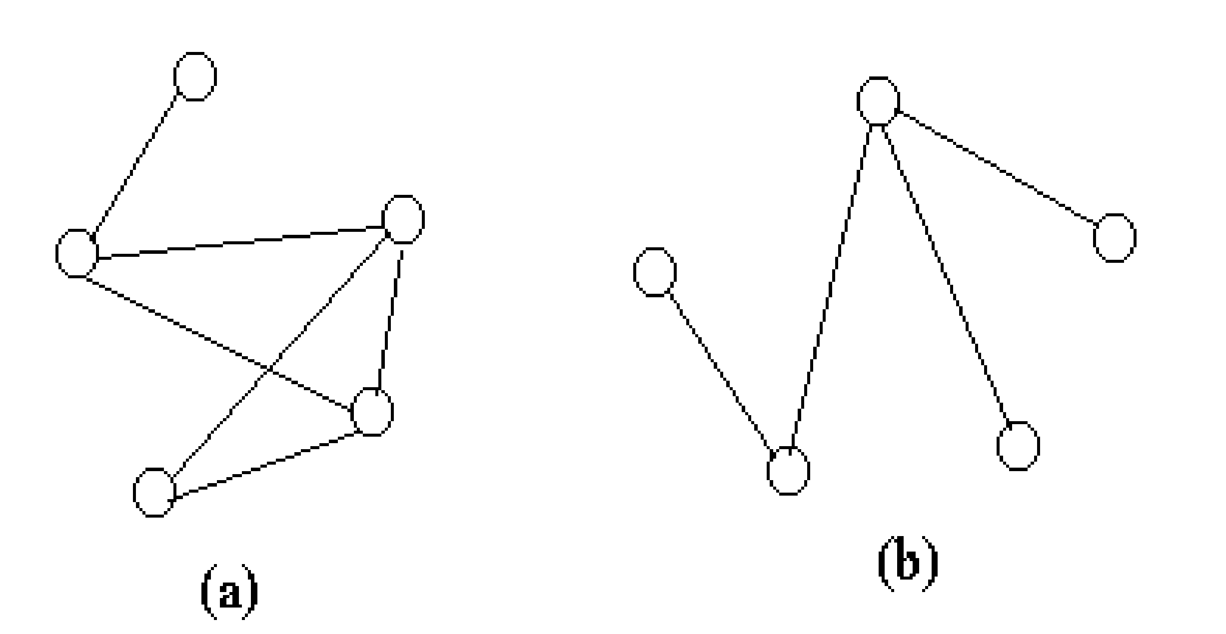


图7-1.6 相对于完全图的补图

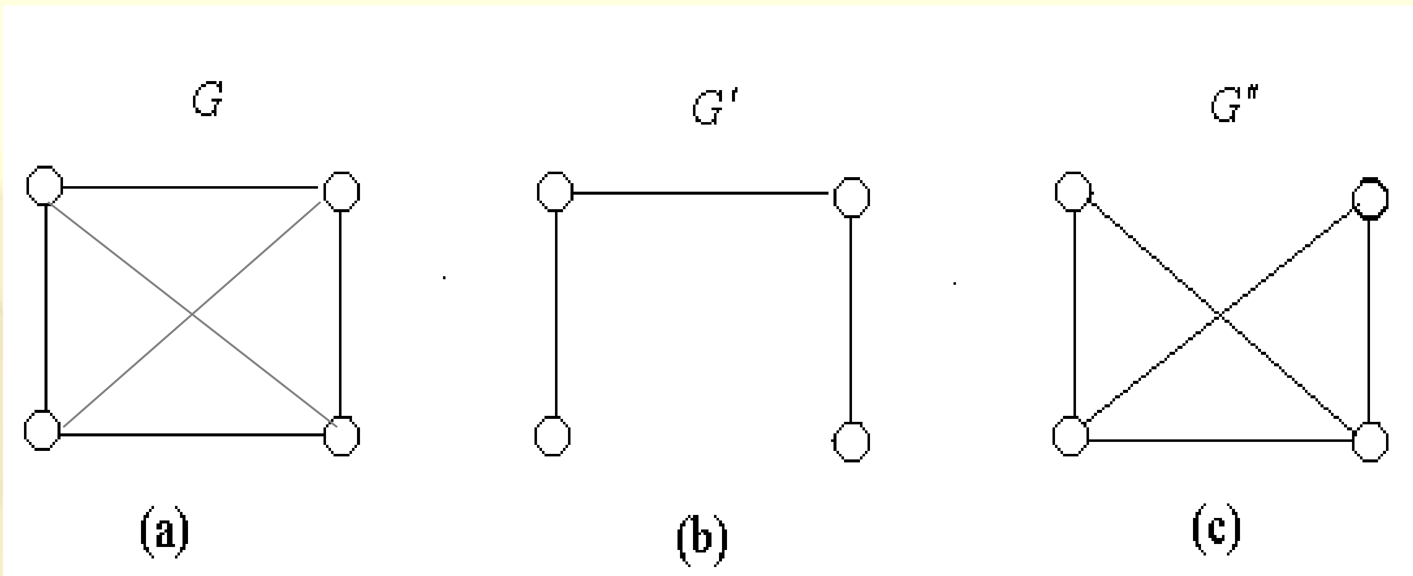
如图7-**1.6**中的**(a)**和**(b)**互为补图。

[定义] 子图(subgraph)

设图G=<V,E>，如果有图G'= <V',E'>，若有 V'$\subseteq$ V ， E' $\subseteq$ E，则称图G'是图G的子图。

[定义] 生成子图(spanning subgraph)

如果图*G*的子图G'包含*G*的所有结点,则称该图G'为*G*的生成子图。如图7-1.8中*G*'和*G*"都是*G*的生成子图。



[定义] 相对于图G的补图

设图G'＝〈V',E'〉是图G＝〈V,E〉的子图,若给定另外一个图G''＝〈V'',E''〉使得E''＝E-E',且V''中仅包含E''的边所关联的结点。则称G''是子图G'的相对于图G的补图。

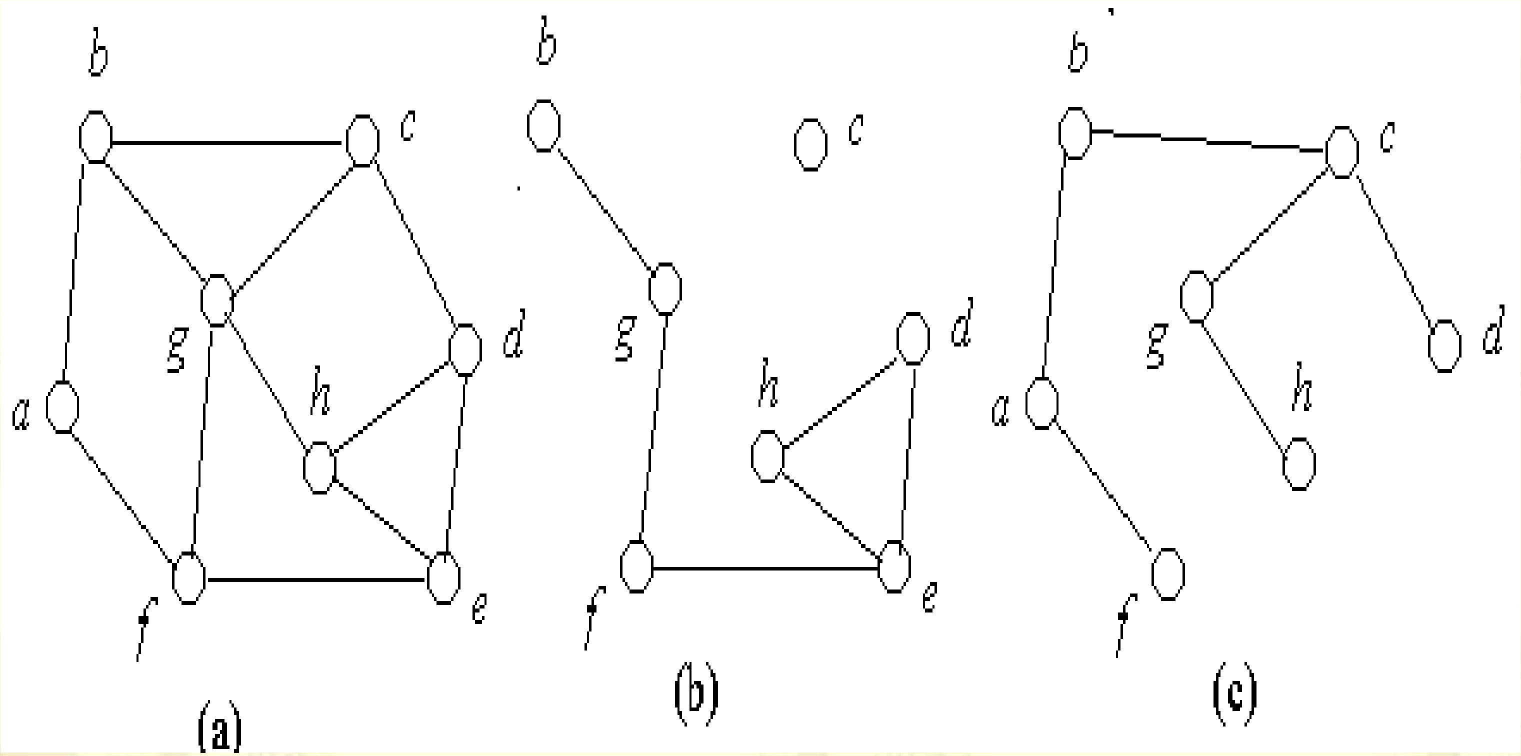


图7-1.7 **(c)**为**(b)**相对于**(a)**的补图

如图7-1.7中的图(c)是图(b)相对于图(a)的补图。而图(b)不是图(c)相对于图(a)的补图,因为图(b)中有结点c。在上面的一些基本概念中,一个图由一个图形表示,由于图形的结点的位置和连线长度都可任意选择,故一个图的图形表示并不是唯一的。下面我们讨论图的同构的概念。

[定义] 图的同构(isomorphism of graph)

设图$G=\langle V,E\rangle$和图$G'=\langle V',E'\rangle$，

如果存在一一对应的映射$g:V\rightarrow V'$

且$e=(v_i,v_j)$(或$\langle v_i,v_j\rangle$) $\in E$,当且仅当

$e'=(g(v_i),g(v_j))$(或$\langle g(v_i),g(v_j)\rangle$) $\in E'$,

则称G和G'同构,记作$G\cong G'$。

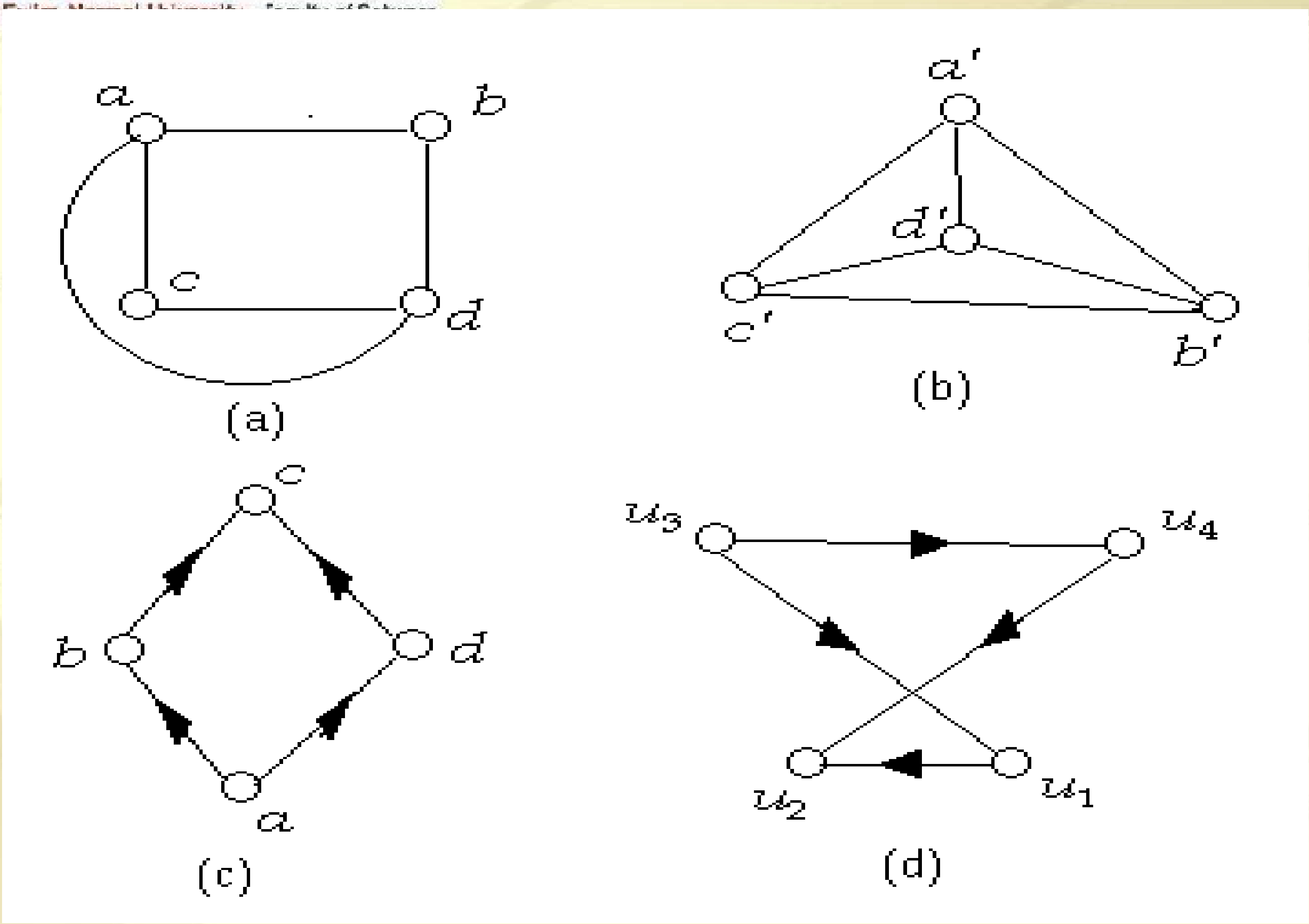


图7-1.8 图的同构

从这个定义可以看出,若**G**与**G'**同构,它的充要条件是:两个图的结点和边分别存在着一一对应,且保持关联关系,例如图**7-1.8**中,**(a)**与**(b)**是同构的,**(c)**与**(d)**也是同构的。从图**7-1.8**的**(c)**与**(d)**可以看出此两图在结点间存在着一一对应的映射G:$G(a)=u_3$,$G(b)=u_1$,$G(c)=u_2$,且有:$\langle a,c\rangle$,$\langle a,b\rangle$,$\langle b,d\rangle$,$\langle c,d\rangle$分别与$\langle u_3,u_4\rangle$,$\langle u_3,u_1\rangle$,$\langle u_1,u_2\rangle$,$\langle u_4,u_2\rangle$一一对应。

表7-1.1

结点	a	b	c	d	结点	v_1	v_2	v_3	v_4
出度	2	1	0	1	出度	1	0	2	1
入度	0	1	2	1	入度	1	2	0	1

分析本例还可以知道,此两图结点的度数也分别对应相等,如表**7-1.1**所示。

两图同构的一些必要条件:

1.结点数目相等;

3.边数相等;

3.度数相等的结点数目相等。

需要指出的是这几个条件不是两个图同构的充分条件,例如图**7-1.9**中的**(a)**和**(b)**满足上述的三个条件,但此两个图并不同构。

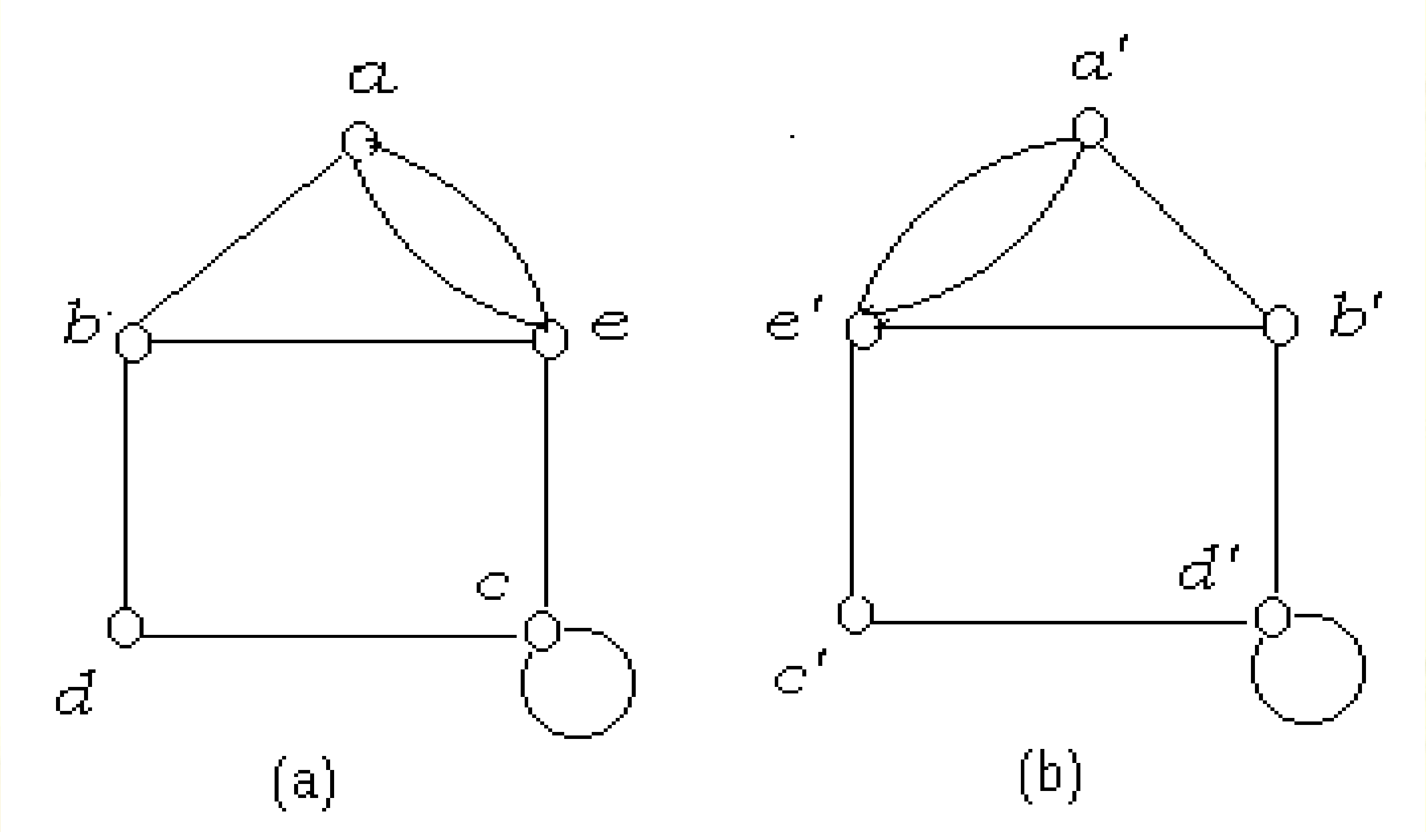


图7-1.9 不同构的图

作业

P279 (1)

(4)