离散数学

第 六 章

黄发良
软件学院

引　言

对于计算机科学来说，格与布尔代数是两个重要的代数系统。

在开关理论计算机的逻辑设计，及其它一些科学领域中，都直接应用了格与布尔代数。

此两个系统有一个重要特点：强调次序关系。

6.1 格

一． 格的定义

1． 偏序集合的一些概念

若集合A上的二元关系满足自反性、对称性、传递性，称A为**偏序集合**。

aRb记为a≤b, 它可用哈斯图表示。

一． 格的定义

设〈A，≼〉是偏序集合，B是A的子集。

若$\forall\ b\in B, b\preccurlyeq a$，则a是子集B的上界。

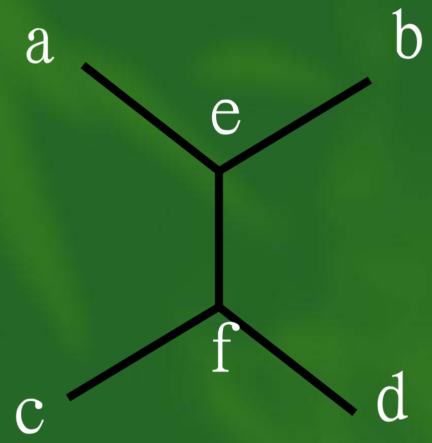
若a'也是B的上界，有$a\preccurlyeq a'$，称a是子集B的最小上界，记为lub（B）；

若$\forall\ b\in B, a\preccurlyeq b$，则a是子集B的下界。

若a'也是B的下界，有$a\succcurlyeq a'$，称a是子集B的最大下界，记为glb(B).

最大下界、最小上界若存在，则唯一

一. 格的定义



则 $\mathrm{lub}(a, b)=\Phi$　　$\mathrm{glb}(a, b)=e$

$\mathrm{lub}(a, e)=a$　　$\mathrm{glb}(a, e)=e$

$\mathrm{lub}(c, d)=f$　　$\mathrm{glb}(c, d)=\Phi$

一. 格的定义

1. 定义

设〈L，≤〉是偏序集合，若∀a，b∈L都有最大下界、最小上界;

则称〈L，≤〉是个格，且记glb(a,b)=a∧b,

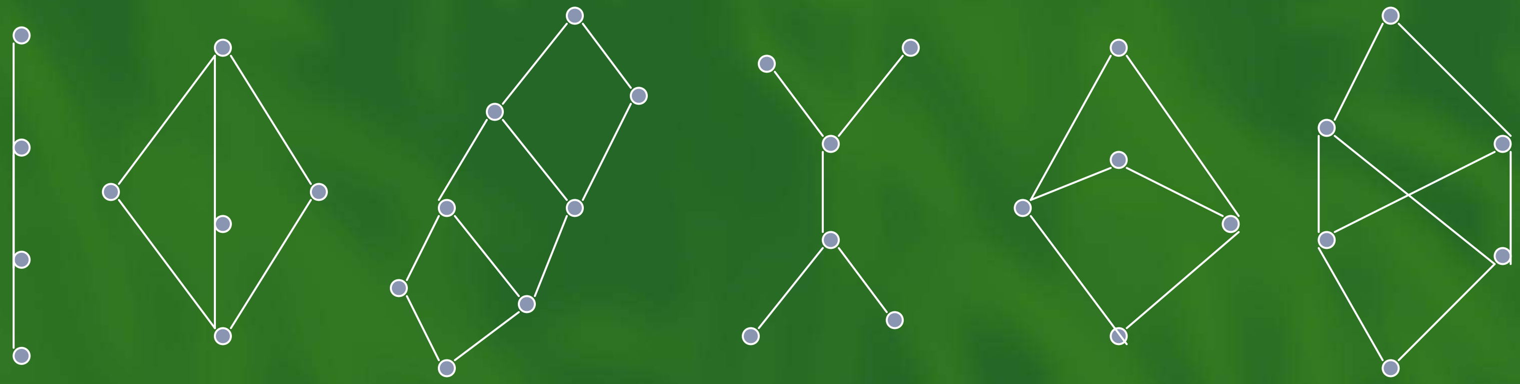
lub(a,b)=a∨b,并称它们为交和并。

注1: 由于最大下界、最小上界若存在则唯一，所以交、并是二元运算;

注2: 称<L, ∧,∨>为由格〈L，≤〉所诱导的代数系统。

一. 格的定义

例1:



格　　　　　不是格的偏序集合

黄发良

一． 格的定义

2. 设n是一正整数，Sn是n的所有因子的集合，D是整除关系，则<Sn, D>是个格。

n=8　　Sn={1，2，4，8}　　见图1

n=24　Sn={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}　见图2

图1

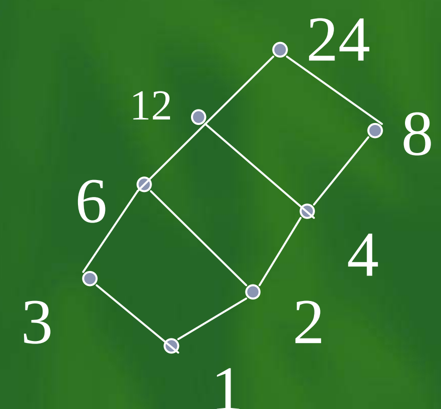


图2

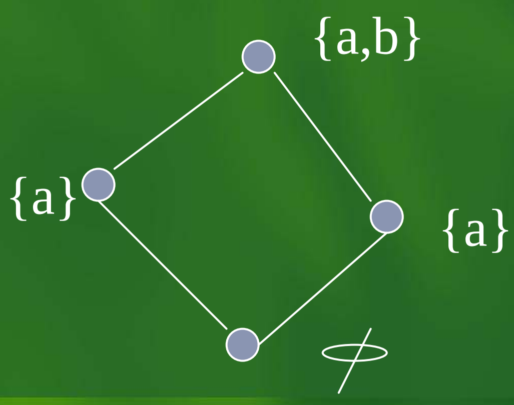
一. 格的定义

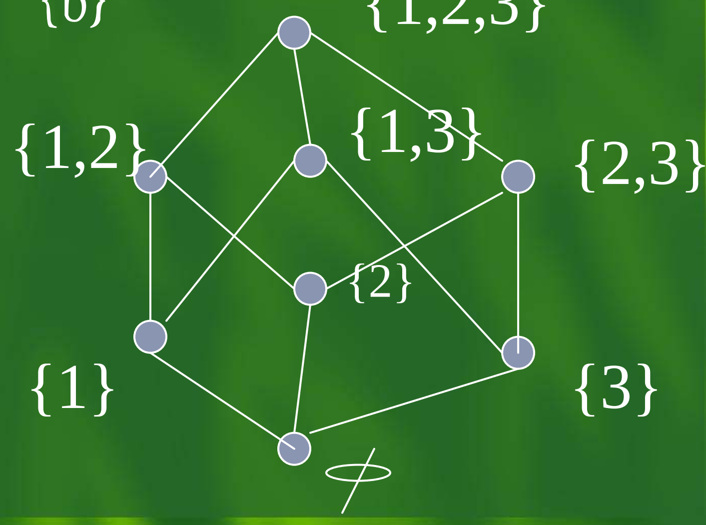
设S是任意集合，ρ(S)是幂集， 偏序集合 $\langle S, \subseteq \rangle$是个格，其中

$\forall A,B \in \rho(S)$, $A*B=A\cap B$, $A\vee B=A\cup B$.

例： S={a, b} S={1, 2, 3}

{a} {b}





一. 格的定义

2. 格的对偶原理

①集合S的偏序关系≤的逆关系≥也是偏序关系，若A⊆S, 其中≤的glb(A)对应于≥的lub(A), ≤的lub(A)对应于≥的glb(A),

所以，若<S, ≤>是格，则<S, ≥>也是格，称这两个格互为对偶。

②因为<S, ≤>的交是<S, ≥>的并，<S, ≤>的并是<S, ≥> 的交，

所以，关于格的一般性质的任意命题，如用≥替换≤，用∨替换∧，用∧替换∨，格的一般性质的任意命题仍成立，这称为格的对偶原理

一. 格的定义

1) 自反性

$a \leqslant a$ 对偶: $a \geqslant a$

2) 反对称性

$a \leqslant b \wedge b \geqslant a \Rightarrow a=b$

对偶: $a \geqslant b \wedge b \leqslant a \Rightarrow a=b$

3) 传递性

$a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$

对偶: $a \geqslant b \wedge b \geqslant c \Rightarrow a \geqslant c$

4) 最大下界描述之一

$a \wedge b \leqslant a$ 对偶 $a \vee b \geqslant a$

$a \wedge b \leqslant b$ 对偶 $a \vee b \geqslant b$

5）最大下界描述之二

$c \leqslant a, c \leqslant b \Rightarrow c \leqslant a \wedge b$

对偶 $c \geqslant a, c \geqslant b \Rightarrow c \geqslant a \vee b$

一. 格的定义

6) 结合律

$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$

对偶 $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$

证： 令$R=a\wedge(b\wedge c)$,$R'=(a\wedge b)\wedge c$

则由4 $R\leqslant a,\ R\leqslant b\wedge c$

$\Rightarrow\ R\leqslant a,\ R\leqslant b,\ R\leqslant c$

$\Rightarrow\ R\leqslant a\wedge b,\ R\leqslant c$

$\Rightarrow\ R\leqslant(a\wedge b)\wedge c$

$\Rightarrow\ R\leqslant R'$

同理可证：$R\geqslant R'$

所以 $R=R'$

注:格的证明思路：总是利用反对称性。

一． 格的定义

7) 等幂律

$a \wedge a = a$ 对偶 $a \vee a = a$

8)吸收律

$a \wedge (a \vee b) = a$ 对偶 $a \vee (a \wedge b) = a$

证： 因为$a \leqslant a \vee b$, $a \leqslant a$

所以 $a \leqslant a \wedge (a \vee b)$

又 $a \geqslant a \wedge (a \vee b)$

所以$a = a \wedge (a \vee b)$

一．　格的定义

9)　$a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a$　　　　（证明）

$a \vee b = b$

证：$\Rightarrow$　$a \leqslant b$

$\therefore a \leqslant a,\ a \leqslant b$

$\therefore a \leqslant a \wedge b$

又 $a \geqslant a \wedge b$

$\therefore\ a = a \wedge b$

$\Leftarrow$　$a \wedge b = a$

若$b \leqslant a$且$b \neq a$，则与$a \wedge b = b$ 矛盾

若a,b不可比较，则与$a \wedge b = a$矛盾

$\therefore\ a \leqslant b$

一. 格的定义

10) $a \leqslant c, b \leqslant d \Rightarrow a \wedge b \leqslant c \wedge d$

$a \vee b \leqslant c \vee d$

证： $a \wedge b \leqslant a,\ a \leqslant c \Rightarrow a \wedge b \leqslant c$

$a \wedge b \leqslant b,\ b \leqslant d \Rightarrow a \wedge b \leqslant d$

$\Rightarrow a \wedge b \leqslant c \wedge d$

11）保序性（证明）

$b \leqslant c \Rightarrow a \wedge b \leqslant a \wedge c$

$a \vee b \leqslant a \vee c$

证： 因为$a \leqslant a,\ b \leqslant c$

由性质10) 知 $a \wedge b \leqslant a \wedge c$

即证。

一. 格的定义

12） 分配不等式（证明）

$$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

对偶 $a\wedge(b\vee c)\geqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

证: $a\leqslant a\vee b,\ a\leqslant a\vee c$

$\Rightarrow\ a\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

$b\leqslant a\vee b,\ c\leqslant a\vee c$

$\Rightarrow\ b\wedge c\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$（性质10)）

$\therefore\ a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

一. 格的定义

13）模不等式（证明）

$$a \leqslant c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$$

证：$\Rightarrow$ 若$a \leqslant c$ 则$a \vee c = c$

代入分配不等式

$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$

$\Leftarrow$ 若$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c$

因为$a \leqslant a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge c \leqslant c$

所以$a \leqslant c$

二. 格是代数系统

1. 作为代数系统的格的定义

设$\langle L, \wedge, \vee \rangle$是个代数系统，

$\wedge, \vee$是L上二个二元运算，

若二元运算$\wedge, \vee$均满足结合律、交换律、

吸收律$(a\vee(a\wedge b)=a, a\wedge (a\vee b)=a)$、

等幂律$(a\wedge a=a, a\vee a=a)$，

称$\langle L, \wedge, \vee \rangle$是格。

注：定义中的等幂律可以消除，因它可由吸收律推得。

$$a\wedge a= a\wedge(a\vee(a\wedge a))=a$$

二. 格是代数系统

2. 偏序集合的格、代数系统的格二者定义是等价的

定理4.若<L, $\wedge$,$\vee$>是一个格（作为代数系统）， 那么，L中存在一偏序关系≤,

使$\forall$a,b$\in$L ，有 $a\vee b=lub(a,b)$, $a\wedge b=glb(a,b)$.

证：在集合L上定义的二元关系如下：

$\forall a, b\in L$，若$a\leq b \Leftrightarrow a\wedge b=a$

分三步：

1）证明'≤'是L上的偏序关系

2）证明 $\forall a, b\in L$，{a, b}的最大下界存在，且 $a\wedge b=glb(a, b)$。

3）$\forall a, b\in L$，{a, b}的最小上界存在，且 $lub(a, b)=a\vee b$

二. 格是代数系统

1) 证明'≤'是L上的偏序关系

自反性：$\forall a \in L$ 由等幂律$a \wedge a=a$,

$\therefore\ a \leq a$

反对称性：$\forall a,b \in L$, 若$a \leq b$, $b \leq a$

则$a \wedge b=a, b \wedge c=b$

$\therefore a=a \wedge b=b \wedge a=b$

传递性：

$\forall a,b,c \in L$, 若 $a \leq b, b \leq c$

则$a \wedge b=a$, $b \wedge c=b$

$\therefore\ a \wedge c=(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)= a \wedge b=a$

$\therefore\ a \leq c$

二. 格是代数系统

偏序集合的格、代数系统的格二者定义是等价的证明

2）证明 $\forall a, b \in L$，$\{a, b\}$ 的最大下界存在，且 $a \wedge b = glb(a, b)$。

a) 因为 $(a\wedge b)\wedge a = (a\wedge a)\wedge b = a\wedge b$

$\therefore a\wedge b \leqslant a$

同理 $a\wedge b \leqslant b$

$\therefore a\wedge b$ 是a,b的下界。

b）设c 是a, b 的任一下界，

即 $c \leqslant b$，$c \leqslant a$

则 $c \leqslant a\wedge b$

因为 $c\wedge(a\wedge b) = (c\wedge a)\wedge b = c\wedge b = c$

$c \leqslant a\wedge b$

$\therefore a\wedge b$ 是a, b的下界

二. 格是代数系统

3) 同理可证：$\forall a, b \in L$,

$\{a, b\}$的最小上界存在，

且$lub(a, b)=a \vee b$

$\therefore$由1）2）3）知：$\langle L, \leqslant \rangle$是一个格。

$\therefore$ 以后可根据需要，

随意使用这二种定义和记法。

三 格同态

2 格同态

定义6-1.4 设$\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$和$\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$是两个格，由它们分别诱导的代数系统为$\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$和$\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$，如果存在着一个从$A_1$到$A_2$的映射f，使得对于任意的a，b∈$A_1$，有

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$$

$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$$

则称f为从$\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$到$\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$的**格同态**，亦可称$\langle f(A_1), \preccurlyeq_2\rangle$是$\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$的格同态象。此外，当f是双射时，则称f为从$\langle A_1, \vee_1, \wedge_1\rangle$到$\langle A_2, \vee_2, \wedge_2\rangle$的**格同构**，亦称$\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$和$\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$这两个格是同构的。

黄发良

福建师范大学 Fujian Normal University
软件学院 Faculty of Software
黄发良

2）格同态是保序的

定理6-1.8 设f是格$\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$到$\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$的格同态，则对任意的$x, y \in A_1$，如果$x \preccurlyeq_1 y$，必有$f(x) \preccurlyeq_2 f(y)$。

证明 因为$x \preccurlyeq_1 y$，所以 $x \wedge_1 y = x$

$$f(x \wedge_1 y) = f(x)$$

$$f(x) \wedge_2 f(y) = f(x)$$

故 $$f(x) \preccurlyeq_2 f(x)$$

定理6-1.8告诉我们格同态是保序的。但是定理6-1.8的逆命题是不一定成立的。如下例所述。

例7 设$\langle S, \preccurlyeq\rangle$是一个格，其中

$$S = \{a, b, c, d, e\}$$

如图6-1.5所示，

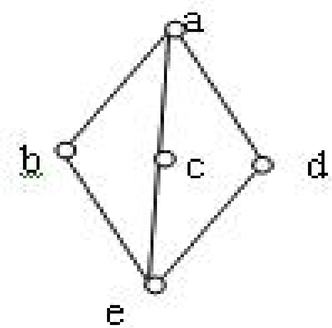


图 6-1.5

我们知道。$\langle \mathscr{P}(S), \subseteq\rangle$也是一个格，作映射$f: S \to \mathscr{P}(S)$，对任一$x \in S$，使得

$$f(x) = \{y \mid y \in , y \preccurlyeq x\}$$

即有 $f(a) = S$，$f(b) = \{b, e\}$，$f(c) = \{c, e\}$

$$f(d) = \{d, e\}, \quad f(e) = \{e\}$$

显然，当$x, y \in S$且$x \preccurlyeq y$时，有$f(x) \subseteq f(y)$，所以f是保序的。但是，对于$b, d \in S$，有

$$b \vee d = a$$

$$f(b \vee d) = f(a) = S$$

而 $$f(b)\cup f(d)=\{b,\ d,\ e\}$$

所以 $$f(b\vee d)\neq f(b)\cup f(d)$$

定理6-1.9 设两个格为$\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$和$\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$，f是从$A_1$到$A_2$的双射，则f是$\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$到$\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$的格同构，当且仅当对任意的$a, b\in A_1$，$a\preccurlyeq_1 b \Leftrightarrow f(a)\preccurlyeq_2 (b)$。

证明 设f是$\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$到$\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$的格同构。由定理6-1.8可知，如果对任意的$a, b\in A_1$，$a\preccurlyeq b$，则$f(a)\preccurlyeq_2 f(B)$，反之，设$f(a)\preccurlyeq_2 f(b)$。则$f(a)\wedge_2 f(b)=f(a\wedge_1 b)=f(a)$，由于f是双射，所以$a\wedge_1 b=a$，故$a\preccurlyeq_1 b$。

设对任意的$a, b\in A_1$，$a\preccurlyeq_1 b\Leftrightarrow f(a)\preccurlyeq_2 f(b)$，设$a\wedge_1 b=c$，则$c\preccurlyeq_1 a$，$c\preccurlyeq_1 b$，于是，

$$f(a\wedge_1 b)=f(c),\ f(c)\preccurlyeq_2 f(a),\ f(c)\preccurlyeq_2 f(b)$$

故有 $$f(c)\preccurlyeq_2 f(a)\wedge_2 f(b)$$

设 $$f(a)\wedge_2 f(b)=f(d)$$

则 $$f(c)\preccurlyeq_2 f(d),\ f(d)\preccurlyeq_2 f(a),\ f(d)\preccurlyeq_2 f(b)$$

故有$d\preccurlyeq_1 a$，$d\preccurlyeq_1 b$，于是，$d\preccurlyeq_1 a\wedge_1 b$即$d\preccurlyeq_1 c$，所以

$$f(d)\preccurlyeq_2 f(c)$$

因此 $$f(c)=f(d)$$

即 $$f(a\wedge_1 b)=f(a)\wedge_2 f(b)$$

类似地可证 $f(a\vee_1 b)=f(a)\vee_2 f(b)$

因此，f是$\langle A_1, \preccurlyeq_1\rangle$到$\langle A_2, \preccurlyeq_2\rangle$的格同构。

6.2 分配格

一般格只满足分配不等式:

$$a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

一. 定义

格 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$， 若 $\forall a, b, c \in L$ 有

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$， (1)

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$， (2)

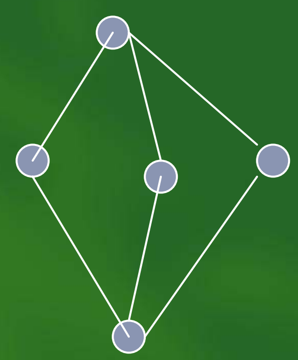
称 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 为分配格。

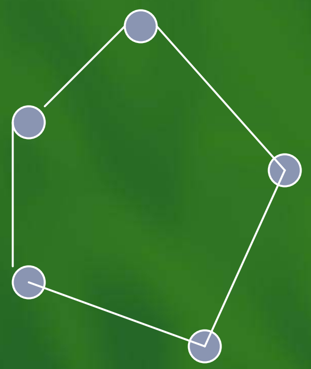
注(1)(2)式是互相等价的，由对偶原理，从一式可推得另一式。

6.2 分配格

二. 性质

1）一个格，当且仅当没有任何子格与图同构，该格是分配格





6.2 分配格

2.每个链是分配格

证：设$<L, \leqslant>$是一个链，$\forall a, b, c \in L$

1） $a \leqslant b$ 或 $a \leqslant c$

则$a \wedge (b \vee c) = a$，$(a \wedge b) \vee (a \vee c) = a$

2） $a \geqslant b$且$a \geqslant c$

$\therefore a \geqslant b \vee c$

则$a \wedge (b \vee c) = b \vee c$

$(a \wedge b) \vee (a \vee c) = b \vee c$

$\therefore < L, \leqslant >$是分配格。

6.2 分配格

(称为分配格的可约性)

3. 设$\langle L,\wedge,\vee\rangle$是分配格，则

$\forall a,b,c\in L\ \ (a\wedge b=a\wedge c)\wedge(a\vee b=a\vee c)\ \Rightarrow\ b=c$

证： $(a\wedge b)\vee c=(a\wedge c)\vee c=c$

$(a\vee c)\wedge(b\vee c)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)$ 交换律

$=(b\vee a)\wedge(b\vee c)$

$=b\vee(a\wedge c)$ 分配律

$=b\vee(a\wedge b)$ 代换

$=b$

6.2 分配格

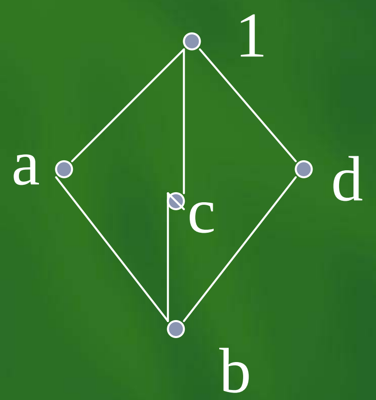
三. 模格

1.定义： 若<A,≤>是一个格,由它诱导的代数系统<A, ∨ ,∧>,如果对于任意的a,b,c∈A,有

$$b \leq a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c),$$

称<L, ≤>是模格。

例1:



它是模格，但不是分配格

$b \leq a$: $a \wedge (c \vee d) = a \wedge 1 = a$

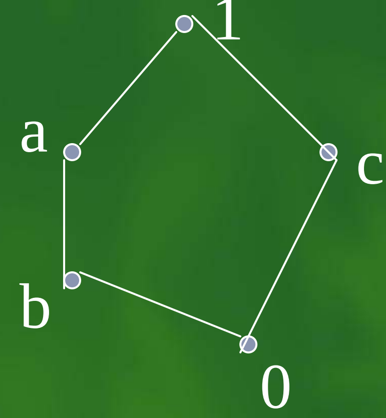
$(a \wedge c) \vee (a \wedge d) = b \vee b = b$

6.2 分配格

例2：它不是模格，$b \leqslant a$，

但 $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$

$b \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$



3. 分配格是模格

证: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee (a \wedge c)$

6.3 有补格

1. 全上界（全下界）定义

给定格<L,≤>， 若存在a∈L，
使∀b∈L,有b≤a (a≤b),
称a为<L,≤>的全上界（全下界）。

注：一个格的全上界（全下界）是唯一的。

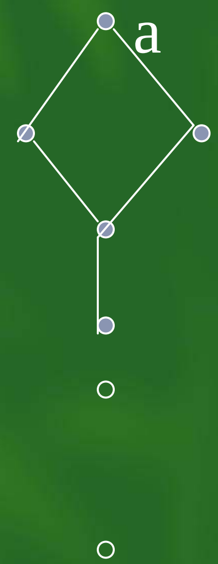
证：若存在两个全上界a,b，则a≥b,

又因为 b≥a

所以 b=a

6.3 有补格

例2：格



全上界为a，全下界不存在

黄发良

6.3 有补格

2. 有界格

定义：

存在全上界和全下界的格，称为有界格；

全上界记为1，全下界记为0，并称它们为格的界。

6.3 有补格

3. 补元

定义：

设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是有界格，$a \in L$，

若存在 $b \in L$，有 $a \wedge b = 0, a \vee b = 1$，

称 b 为 a 的补元

注：① 若a是b的补元，则b也是a的补元；

② 补元可以不存在，可以不唯一

6.3 有补格

例3

1) a的补元是b,c
   b的补元是a,c,
   c的补元是a,b

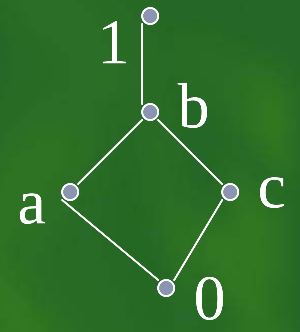


图1

2) a,b,c 均不存在补元

3)有界格中，0，1互为补元

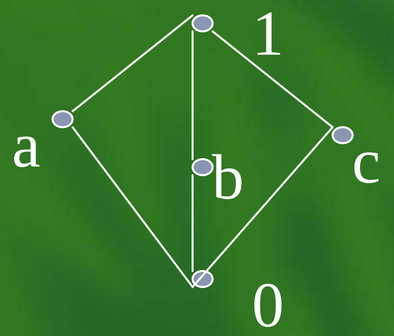


图2

证：因为 $0 \wedge 1 = 0$, $0 \vee 1 = 1$ ，
所以 0 ， 1 互为补元.

6.3 有补格

4. 有补格

定义1：

若在一个有界格中，每个元素至少有一个补元，则称此格为有补格。

定义2：

若一个格既是有补格，又是分配格， 则此格称为有补分配格。

有补分配格中，任何元素的补元是唯一的。

证明：设b，c都是a的补元，则

$a\wedge b=0=a\wedge c$，$a\vee b=1=a\vee c$

由分配格的可约性， $\therefore b=c$

6.3布尔代数

一. 基本概念

1 设<G, ≤>是一个有补格，同时还是一个分配格，那么称<G, ≤>为布尔格。

由布尔格<G，≤>，诱导出的代数系统<G，∧，∨， ￢ >为布尔代数。

例

(1) 集合代数<ρ(S)，∩，∪， >是布尔代数。

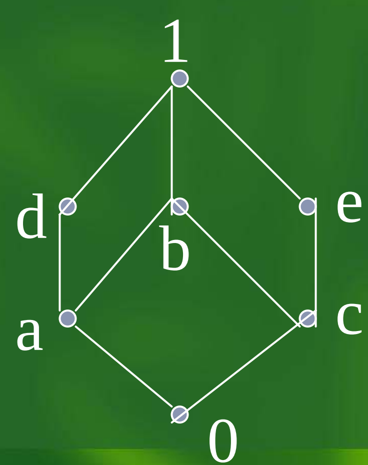
(2) 开关代数<{0, 1}，∧，∨，>是布尔代数，其中∧为与运算, ∨为或运算，￢为非运算。

6.3布尔代数

3.原子

设<A, ⩽> 是一个格，且具有全下界0，若有a盖住0，称a为原子。

例：1盖住d, e, b， 则 a, b, c为原子



6.3布尔代数

定理:

若$\langle A, \leqslant \rangle$为具有0的有限格，则

$\forall b \in A, b \neq 0$，$\exists a \in A$，$a$为原子，且$a \leqslant b$

证明:

若b为原子，则$b \leqslant b$　得证。

若b不是原子，则从b下降到0有一条链因为A有限），$b > b_1 > b_2 \ldots b_k > 0$，则 b_k为原子，且$b_k \leqslant b$。

6.3布尔代数

二、*stone定理*

引理1　设<A, ≤> 为有限布尔格,

$$b \leq c \Leftrightarrow b \wedge \neg c = 0$$

引理2　设<A, ∧, ∨, ¬ >是一个有限布尔代数, $\forall b \in A$, 不为零, $a_1, \ldots, a_k$是A中满足$a_i \leq b$的所有原子, 则 $b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$

引理3 设<A, ∧, ∨, ¬ >是一个有限布尔代数, $\forall b \in A$, 不为零, $a_1, \ldots, a_k$是A中满足$a_i \leq b$的所有原子, $b = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$是将b表示为原子的并的唯一形式, 其中$a_i \leq b$ 。

6.3布尔代数

二、stone定理

设$\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$是由有限布尔格$\langle A, \leqslant \rangle$所诱导的一个有限布尔代数，S是布尔格$\langle A, \leqslant \rangle$中的所有原子的集合，则$\langle A, \wedge, \vee, \neg \rangle$和$\langle \rho(S), \wedge, \vee, \neg \rangle$同构。

推论1 任何有限的布尔代数的元素的个数一定为2n个，其中n为原子数。

推论2 任何具有2n个元素的布尔代数是同构的。

6.3 布尔表达式

一．布尔表达式

1.定义:

设<A，∨，∧，－>是一个布尔代数，并在这个布尔代数上定义布尔表达式如下:

1．A中任何元素是一个布尔表达式。

2．任何变元是一个布尔表达式。

3．如果e1和e2是布尔表达式，那么，e1，(e1∨e2)和(e1∧e2)也都是布尔表达式。

4．只有通过有限次运用规则2和3所构造的符号串是布尔表达式。

6.3 布尔表达式

例: 设$<\{0, 1, 2, 8\}, \vee, \wedge, ->$是一个布尔代数，那么，$0 \wedge x1$，$(1 \vee x1) \wedge x2$，$((2 \vee 3) \wedge (x1 \vee x2)) \wedge (x1 \wedge x3)$都是布尔表达式，并且分别称为含有单个变元x1的布尔表达式，含有两个变元x1，x2的布尔表达式和含有三个变元x1，x2，x3的布尔表达式。

6.3 布尔表达式

一个含有n个相异变元的布尔表达式，称为含有n元的布尔表达式。记为E(x1,x2,…,xn),其中x1,x2,…,xn为变元。

布尔代数<A，∨，∧，－>上的一个含有n元的布尔表达式**E(x1，x2，…，xn)**的值是指：将A中的元素作为变元xi(i＝1，2，…，n)的值来代替表达式中相应的变元(即对变元赋值)，从而计算出表达式的值。

6.3 布尔表达式

例3 设布尔代数<{0，1}，∨，∧，－>上的布尔表达式为

$E(x1，x2，x3)＝$

$(x1 \vee x2)\wedge(x1\vee x2)\wedge(x2\vee x3)$，

如果变元的一组赋值为$x1＝1,x2＝0,$

$x3＝1$，那么便可求得

$E(1，0，1)＝(1\vee 0)\wedge(1\vee 0)\wedge(0\vee 1)＝1\wedge 1\wedge 0＝0$

6.3 布尔表达式

设布尔代数$<A, \vee, \wedge, ->$上两个n元的布尔表达式为$E1(x1, x2, \ldots, xn)$和$E2(x1, x2, \ldots, xn)$，如果对于n个变元的任意赋值$xi = xi$，$xi \in A$时均有$E1(x1, x2, \ldots, xn) = E2(x1, x2, \ldots, xn)$，则称这两个布尔表达式是等价的。记作$E1(x1, x2, \ldots, xn) = E2(x1, x2, \ldots, xn)$

思考:验证布尔表达式的等价

$E1(x1, x2, x3) = (x1 \wedge x2) \vee (x1 \wedge x3)$和

$E2(x1, x2, x3) = x1 \wedge (x2 \vee x3)$

6.3 布尔表达式

二、布尔析取（合取）范式

设<A，∨，∧，－>是一个布尔代数，一个从A^n到A的函数，如果它能够用<A，∨，∧，－>上的n元布尔表达式来表示，那么，这个函数就称为**布尔函数**。

定理　对于两个元素的布尔代数<{0,1}，∨，∧，－>，任何一个从$\{0,1\}^n$到{0，1}的函数都是布尔函数。

6.3 布尔表达式

例：

设 $f=a\wedge x1\vee(b\wedge x2)\vee x3\wedge x2$ 是布尔代数 $\langle\{a,b,0,1\},\wedge,\vee\rangle$ 的布尔表达式，求布尔合取范式

解：$f=(a\wedge x1)\vee(b\wedge x2)\vee(x3\wedge x2)$

$=(a\vee b)\wedge(a\vee x2)\wedge(x1\vee b)\wedge(x1\vee x2)\vee(x3\wedge x2)$

$=(1\wedge(a\vee x2)\wedge(x1\vee b)\wedge(x1\vee x2)\vee x3)$

$\wedge((a\vee x2)\wedge(x1\vee b)\wedge(x1\vee x2)\vee x2)$

$=(a\vee x2\vee x3)\wedge(b\vee x1\vee x2)\wedge(x1\vee x2\vee x3)\wedge(a\vee x2)$

$\wedge(b\vee x1\vee x2)\wedge(x1\vee x2)$