第三篇 代数系统
(algebraic system)

代数系统

数据类型

基本数据类型

结构体

抽象数据类型

针对某个具体问题选用适宜的数学结构去进行较为确切的描述，这就是所谓的“数学模型”。可见，数学结构在数学模型中占有极为重要的位置。我们这里所要研究的是一类特殊的数学结构—由集合上定义若干个运算而组成的系统。我们通常称它为代数系统。它在计算机科学中有着广泛的应用。

第五章 代数结构
(algebraic structure)

本章将从一般代数系统的引入出发，研究一些特殊的代数系统，而这些代数系统中的运算具有某些性质，从而确定了这些代数系统的数学结构。

5-1 代数系统的引入

运算-特殊的函数

例1：f：R→R　　　　g:R→R

f(a)=1/a ， a≠0　　　　g(x)=[y]

将这些映射称为在集合R上的一元运算(unary operation)；

例2：　f：R^2→R　　　　g：R^2→R

f(<x, y>)=x+y,　　　　g(<x, y>)=x*y,

x+y=z　　　　x*y=s

在集合R上，对任意两个数所进行的普通加法和乘法，都是集合R上的二元运算(binary operation)　；

也可以看作是将R上的每二个数映射成R中的一个数;

至于对集合R上的三个数x，y，z，ALGOL算法语言中的条件算术表达式:

```
if x=0 then y else z,
```

这就是集合R上的三元运算(triple operation)。

上述一些例子，有一个共同的特征，就是其运算结果都是在原来的集合R中，我们称那些具有这种特征的运算是封闭的，简称闭运算。相反地，没有这种特征的运算就是不封闭的。

定义5-1.1 [n元运算]

对于集合A，一个从A^n到B的映射，称为集合A上的一个n元运算。如果B⊆A，则称该n元运算是封闭的。

定义5-1.2[代数系统] (algebraic system) 一个非空集合**A**连同若干个定义在该集合上的运算$f_1, f_2, \ldots, f_k$所组成的系统就称为一个代数系统，记作$\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$。

正整数集合I_+以及在该集合上的普通加法运算“+”组成一个代数系统$<I_+, +>$。

又如，一个有限集S，由S的幂集$\mathcal{P}(S)$以及在该集合上的集合运算“∪”、“∩”、“~”组成一个代数系统$<\mathcal{P}(S),\cup,\cap,\sim>$。

虽然，有些代数系统具有不同的形式，但是，他们之间可能有一些共同的运算规律。

容易找到与<I,+>具有相同运算规律的一些代数系统，如表所示：

见P177 表5-1.2

	<I, .>	<R,+>	<P(S),∪>	<P(S), ∩ >
集合运算封闭性 交换律 结合律	I为整数集合 ·为普通乘法 $x \cdot y \in I$ $x \cdot y = y \cdot x$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	R为实数集合 +为普通加法 $x+y \in R$ $x+y=y+x$ $(x+y)+z=x+(y+z)$	P(S)是S的幂集 ∪为集合的“并” $A \cup B \in P(S)$ $A \cup B = B \cup A$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	P(S)是S的幂集 ∩为集合的“交” $A \cap B \in F(S)$ $A \cap B = B \cap A$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

5-2 运算性质

定义5-2.1[运算封闭]

设*是定义在集合A上的二元运算，如果对于任意的x,y∈A,都有x*y∈A,则称二元运算*在A上是封闭的。

定义5-2.2[运算可交换]

设*是定义在集合A上的二元运算，如果对于任意的x,y∈A,都有x*y=y*x，则称该二元运算*是可交换的，或运算满足交换律。

定义5-2.3[运算可结合]

设*是定义在集合A上的二元运算，如果对于任意的$x,y,z\in A$都有$(x*y)*z=x*(y*z)$,则称该二元运算*是可结合的，或运算满足结合律。

定义5-2.4[运算可分配]

设*，Δ是定义在集合A上的两个二元运算，如果对于任意的x,y,z∈A都有

$$x*(y\Delta z)=(x*y)\Delta(x*z)$$

$$(y\Delta z)*x=(y*x)\Delta(z*x)$$

则称运算*对于运算Δ是可分配的。

例题1 设$A=\{x|x=2^n,n\in N\}$,问乘法运算是否封闭？对加法运算呢？

解：对于任意的$2^r,2^s\in A$; $r,s\in N$;

$2^r\cdot 2^s=2^{r+s}\in A$(因为$r+s\in N$)

所以乘法运算是封闭的。

而对于加法运算是不封闭 的，因为至少有$2+2^2=6\notin A$。

例题2 设Q是有理数集合，Δ是Q上的二元运算，对任意的a，b∈Q, aΔb=a+b-a·b，问运算Δ是否可交换。

解：因为aΔb=a+b-a·b=b+a-b·a=bΔa，所以运算Δ是可交换的。

例题3 设A是一个非空集合，★是A上的二元运算，对于任意a,b∈A,有a★b=b,证明★是可结合运算。

证明： 因为对于任意的a,b,c∈A,

(a★b)★c=b★c=c,

而 a★(b★c)=a★c=c,

所以 (a★b)★c=a★(b★c)

例题 4 设集合A={α， β}，在A上定义两个二运算*和Δ如表所示。运算Δ对于运算*可分配吗？运算*对于运算Δ呢？

*	α	β
α	α	β
β	β	α

Δ	α	β
α	α	α
β	α	β

解：容易验证运算Δ对于运算*是可分配的。

但是运算*对于运算Δ是不可分配的，

因为 $\beta*(\alpha\ \Delta\ \beta)=\beta*\alpha=\beta$，

而 $(\beta*\alpha)\ \Delta\ (\beta*\beta)=\beta\ \Delta\ \alpha=\alpha$。

定义5-2.5[吸收律] (absorption law)

设*，Δ是定义在集合A上的两个可交换二元运算，如果对于任意的$x,y \in A$,都有

$$x*(x \Delta y)=x$$

$$x \Delta (x*y)=x$$

则称运算*和运算Δ满足吸收律。

定义5-2.6[运算等幂]

设*是定义在集合A上的一个二元运算，如果对于任意的$x \in A$,都有$x*x=x$,则称运算*是等幂的，或称运算满足等幂律。

定义5-2.7[幺元](identity)

设*是定义在集合A上的一个二元运算，如果有一个元素$e_l \in A$,对于任意的元素$x \in A$都有$e_l*x=x$,则称e_l为A中关于运算*的左幺元；如果有一个元素$e_r \in A$,对于任意的元素$x \in A$都有$x*e_r=x$,则称e_r为A中关于运算*的右幺元；

如果A中的一个元素e,它既是左幺元又是右幺元，则称e为A中关于运算*的幺元。显然，对于任一$x \in A$,有$e*x=x*e=x$。

例题**5**： 设集合**N**为自然数全体，在**N**上定义两个二元运算*和★，对于任意**x,y∈N,**有

$$x*y=\max(x,y)$$

$$x★y=\min(x,y)$$

验证运算*和★满足吸收律。

解： 对于任意**a,b∈N**，

$$a*(a★b)=\max(a,\min(a,b))=a,$$

$$a★(a*b)=\min(a,\max(a,b))=a$$

因此，*和★满足吸收律。

例题 6： 设集合S={α， β， γ， δ}，在S上定义的两个二元运算*和★如表示。试指出左幺元或右幺元。

*	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	α	β	γ	γ
δ	α	β	γ	δ

★	α	β	γ	δ
α	α	β	δ	γ
β	β	α	γ	δ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	δ	β	γ

解：由表可知：β， δ 都是S中关于运算*的左幺元，

而 α 是S中关于运算★的右幺元。

定理5-2.1

设*定义在集合A上的一个二元运算，且在A中有关于运算*的左幺元e_l和右幺e_r,则$e_l=e_r=e$,且A中的幺元是唯一的。

定义5-2.8[零元]

设*是定义在集合A上的一个二元运算，如果有一个元素$\theta_l \in S$，对于任意的元素$x \in A$都有$\theta_l * x = \theta_l$,则称θ_l为A中关于运算*的左零元，如果有一个元素$\theta_r \in A$，对于任意的元素$x \in A$都有$x * \theta_r = \theta_r$,则称θ_r为A中关于运算*的右零元；

如果A中的一个元素θ，它既是左零元又是右零元，则称θ为A中关于运算*的零元。显然，对于任一$x \in A$，有 $\theta * x = x * \theta = \theta$

定理5-2.2

设*是定义在集合A上的一个二元运算，且在A中有关于运算*的左零元θ_l和右零元θ_r，那么，$\theta_l=\theta_r=\theta$，且A中的零元是唯一的。

定理5-2.3

设**<A,*>**是一个代数系统，且集合**A**中元素的个数大于**1**。如果该代数系统中存在幺元**e**和零元θ,则$\theta \neq$ **e**。

定义5-2.9[逆元]

设代数系统<A,*>，这里*是定义在A上的一个二元运算，且e是A中关于运算*的幺元。如果对于A中的一个元素a存在着A中的某个元素b,使得b*a=e,那么称b为a的左逆元；如果a*b=e成立，那么称b为a的右逆元；如果一个元素b,它既是a的左逆元又是a右逆元，那么就称b是a的一个逆元。

很明显，如果b是a的逆元，那么a也是b是逆元，简称a与b互为逆元。今后一个元素x的逆元记为x^{-1}。

例题 7： 设集合S={浅色，深色}，定义在S上的一个二元运算*如表所示，试指出零元和幺元。

*	浅色	深色
浅色	浅色	深色
深色	深色	深色

解：深色是S中关于运算*的零元，

浅色是S中关于运算*的幺元。

例题8： 设集合**S={** α , β , γ , δ **,}**，定义在**S**上的一个二元运算*****如表所示。试指出代数系统**<S,*>**中各个元素的左、右逆元情况。

*	α	β	γ	δ	ε
α	α	β	γ	δ	ε
β	β	δ	α	γ	δ
γ	γ	α	β	α	β
δ	δ	α	γ	δ	γ
ε	ε	δ	α	γ	ε

解： α 是幺元； β 的左逆元和右逆元都是 γ ；即 β 和 γ 互为逆元； δ 的左逆元是 γ 而右逆元是 β ； β 有两个左逆元 γ 和 δ ； ε的右逆元是 γ ，但没有左逆元。

定理5-2.4

设代数系统<A,*>, 这里*是定义在A上的一个二元运算，A中存在幺元e，且每一个元素都有左逆元。如果*是可结合的运算，那么，这个代数系统中任何一个元素的左逆元必定也是该元素的右逆元，且每个元素的逆元是唯一的。

证明：设a,b,c∈A,且b是a的左逆元，c是b的左逆元。

因为（b*a）*b=e*b=b （运算可结合）

所以 e=c*b=c*((b*a)*b)

=(c*(b*a))*b

=((c*b)*a)*b

=(e*a)*b

=a*b 因此，b也是a的右逆元。

设元素a有两个逆元b和c,那么

b=b*e=b*(a*c)

=(b*a)*c

=e*c

=c

因此，a的逆元是唯一的。

可以指出：<A,*>是一个代数系统，*是A上的一个二元运算，那么该运算的有些性质可以从运算表中直接看出。那就是：

1、运算*具有封闭性，当且仅当运算表中的每个元素都属于A。

2、运算*具有可交换性，当且仅当运算表关于主对角线是对称的。

3、运算*具有等幂性，当且仅当运算表的主对角线上的每一元素与它所在行（列）的表头元素相同。

4、A关于*有零元，当且仅当该元素所对应的行和列中元素都与该元素相同。

5、A关于*有幺元，当且仅当该元素所对应的行和列依次与运算表的行和列相一致。

6、设A中有幺元，a和b互逆，当且仅当位于a所在行，b所在列的元素以及其b所在行，a所在列的元素都是幺元。

例题9： 试构造一个代数系统，使得其中只有一个元素具有逆元。

解： 设$m,n \in I$,$T=\{x|x \in I, m \leqslant x \leqslant n\}$,那么，代数系统$\langle T,\max \rangle$中有一个么元是m,且只有m有逆元，因为$m=\max(m,m)$。

例题**10**： 对于代数系统**<R,·>**，这里**R** 是实数的全体，·是普通的乘法运算，是否每个元素都有逆元。

解： 该代数系统中的幺元是**1**，除了零元素**0**外，所有的元素都有逆元。

例题11： 对于代数系统$<N_k,+_k>$，这里$N_k=\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$,$+_k$是定义在$N_k$上的模k加法运算，定义如下：

对于任意$x,y\in N_k$，若 $x+y<k$，则 $x+y=x+y$；

若 $x+y\geq k$；则$x +_k y=x+y-k$，

试问是否每个元素都有逆元。

解： 可以验证，$+_k$是一个可结合的二元运算，N_k中关于运算$+_k$的幺元是0，N_k中的每一个元素都有唯一的逆元，即0的逆元是0，每个非零元素x的逆元是k-x。

作业 5-1，2

P178 (2)

P185 (1), (2), (5)