2-6 前束范式(prenex normal form)

定义2-6.1 前束范式：

一个公式如果量词均包含在全式的开头，它们的作用域延伸到整个公式的末尾，则该公式叫做前束范式。

设**A**是一个谓词公式，如果**A**具有如下形式：

$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ \ldots(Q_nx_n)B$，其中$Q_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$为∃或∀，$x_i$为客体变元，**B**为不含量词的谓词公式，则称**A**是前束范式。

2-6 前束范式(prenex normal form)

定理2-6.1：任意一个谓词公式，均与一个前束范式等价。

转化方法：

1. 把条件或双条件联结词转化。
2. 利用量词否定等价公式，把否定深入到命题变元和谓词公式的前面。
3. 换名。
4. 利用量词作用域的扩张和收缩等价式，把量词提到前面。

前束合取范式

定义2-6.2 前束合取范式：

一个wff A如果具有如下形式，则称为前束合取范式：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)[(A_{11}\vee A_{12}\vee\ldots\vee A_{1k_1})\wedge(A_{21}\vee A_{22}\vee\ldots\vee A_{2k_2})\wedge\ldots\wedge(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\ldots\vee A_{mk_m})]$$

其中Q_i（$1\leqslant i\leqslant n$）为∃或∀，x_i为客体变元，A_{ij}是原子变元或其否定。

前束合取范式

定理2-6.2 ：每一个wff A都可转化为与其等价的前束合取范式。

转化方法：

1. 取消多余量词。
2. 换名
3. 消去条件联结词。
4. 利用量词转化公式，把否定深入到命题变元和谓词填式的前面。
5. 利用量词作用域的扩张和收缩等价式，把量词提到前面。

前束析取范式

定义2-6.3 前束析取范式：

一个wff A如果具有如下形式，则称为前束析取范式：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_nx_n)[(A_{11}\wedge A_{12}\wedge\ldots\wedge A_{1k_1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\ldots\wedge A_{2k_2})\vee\ldots\vee(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\ldots\wedge A_{mk_m})]$$

其中Q_i（$1\leqslant i\leqslant n$）为∃或∀，x_i为客体变元，A_{ij}是原子变元或其否定。

前束析取范式

定理2-6.3：每一个wff A都可转化为与其等价的前束析取范式。

转化方法同前。

例题4　将wff D：

$(\forall x)\,[(\forall y)P(x)\vee(\forall z)q(z,y) \rightarrow \neg(\forall y)R(x,y)]$

化为与它等价的前束合取范式。

解　第一步取消多余的量词。

$$D \Leftrightarrow (\forall x)\,[P(x)\vee(\forall z)q(z,y) \rightarrow \neg(\forall y)R(x,y)]$$

第二步换名。

$$D \Leftrightarrow (\forall x)\,[P(x)\vee(\forall z)q(z,y) \rightarrow \neg(\forall w)R(x,w)]$$

第三步消去条件联接词。

$$D \Leftrightarrow (\forall x)\,[\neg P(x)\vee(\forall z)q(z,y) \vee \neg(\forall w)R(x,w)]$$

第四步将¬深入

$$D \Leftrightarrow (\forall x)\,[(\neg P(x) \wedge (\exists z)\neg q(z,y)) \vee (\exists w)\neg R(x,w)]$$

第五步将量词推到左边

$$D \Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(\exists w)\,[(\neg P(x) \wedge \neg q(z,y)) \vee \neg R(x,w)]$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists z)(\exists w)\,[(\neg P(x) \vee \neg R(x,w)) \wedge (\neg q(z,y) \vee \neg R(x,w))]$$

2-7 谓词演算的推理理论

在谓词逻辑中，如果$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$是逻辑有效式，则称B是$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的有效结论，记作

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$

$A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \rightarrow B$是重言式

例如：$(\forall x)F(x) \Rightarrow (\exists x)F(x)$

2-7 谓词演算的推理理论

谓词演算的推理，是命题演算推理的扩展，命题演算中的推理规则，如**P,T**和**CP**规则同样可以在谓词演算的推理中使用。

但是在谓词推理中，前提和结论可能会受到量词的限制。所以需要在适当时候利用消去和添加量词的规则，使得谓词演算的推理过程类似于命题演算的推理那样进行。

(1)全称指定规则（universal instantiation）

全称量词消去规则，简称US规则。

$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$，

P是谓词，c为个体域中某个任意的客体。

例题1　证明$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))\wedge H(s) \Rightarrow M(s)$

这是著名的苏格拉底论证。

其中　$H(x)$：x是一个人。

$M(x)$：x是要死的。

s：苏格拉底。

证明

(1)	$(\forall x)(H(x)\rightarrow M(x))$	P
(2)	$H(s)\rightarrow M(s)$	US(1)
(3)	$H(s)$	P
(4)	$M(s)$	T(2),(3)I

(2)全称推广规则（universal generalization）

全称量词引入规则，简称**UG规则**。

$P(x) \Rightarrow (\forall x)P(x)$

如果能够证明对论域中每一个客体c，命题P(c)都成立，则全称推广规则可得到结论$(\forall x)P(x)$成立。在应用本规则时，必须能够证明前提P(x)对论域中每一可能的x是真。

(3)存在指定规则（existential instantiation）

存在量词消去规则，简称ES规则。

$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ ，这里c是论域中的某些客体。必须注意，应用存在指定规则，其指定的客体c不是任意的。

举例说明：

$(\exists x)P(x)$和$(\exists x)Q(x)$都为真，则对于某些c和d，可以断定$P(c)\wedge Q(d)$必定为真，但不能断定$P(c)\wedge Q(c)$是真。

(4)存在推广规则（existential generalization）

存在量词引入规则，简称EG规则。

$P(c) \Rightarrow (\exists x)P(x)$，这里c是论域中的一个客体，这个规则比较明显，对于某些客体c，若$P(c)$为真，则在论域中必有$(\exists x)P(x)$为真。

举例说明：

例１：

前提：$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$，$F(a)$

结论：$G(a)$

证明：

(1)	$F(a)$	P
(2)	$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$	P
(3)	$F(a)\rightarrow G(a)$	US(2)
(4)	$G(a)$	T(1)(3) I

例 2：

前提：$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$，$(\exists x)F(x)$

结论：$(\exists x)G(x)$

证明：

(1)	$(\exists x)F(x)$	P
(2)	$F(c)$	ES (1)
(3)	$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$	P
(4)	$F(c)\rightarrow G(c)$	US(3)
(5)	$G(c)$	T(2)(4) I
(6)	$(\exists x)G(x)$	EG(5)

注意证明过程为：

"先ES，后US"

证明: (1) $(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$ P

(2) $F(c)\rightarrow G(c)$ US (2)

(3) $(\exists x)F(x)$ P

(4) $F(c)$ ES (3)

注意：这个证明是错的. (3)(4)应当在(1)(2)之前，(4)中的c是特定的， (2)中的c是任意的。

例 3

前提: $\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$, $(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$,

结论: $(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$

证明:

(1)	$\neg(\exists x)(F(x) \wedge H(x))$	P
(2)	$(\forall x)(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T(1) E
(3)	$(\forall x)(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T(2) E
(4)	$H(y) \rightarrow \neg F(y)$	US(3)
(5)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow H(x))$	P
(6)	$G(y) \rightarrow H(y)$	US(5)
(7)	$G(y) \rightarrow \neg F(y)$	T(4)(6) I
(8)	$(\forall x)(G(x) \rightarrow \neg F(x))$	UG(7)

作业：(2-6,2-7)

P75 (1) b),

(2) a)

P79 (1) a)