债券价值与到期期限的关系：基于Excel模型推导

谷增军

（山东工商学院会计学院，山东烟台 264005）

【摘要】学术界通常认为在其他条件相同的情况下，债券价值随着债券到期日的临近回归到债券面值，但是债券价值是如何回归到面值的并没有做详细探讨。本文借助Excel工具，通过案例分析和理论推导，详细论证了债券价值与到期时间之间的规律关系，最终得出债券价值随着债券到期日的临近加速回归债券面值的规律。

【关键词】平息债券；债券估价；到期时间；折现现金流量；折现率

债券的价值是指债券未来现金流入量的现值，即债券各期利息收入的现值加上债券到期偿还本金的现值之和。国内许多关于债券价值与到期时间关系的相关文献论述中，虽然得出了较一致的结论，即随着时间向到期日临近债券价值逐渐提高（折价发行）、减少（溢价发行）或不变（等价发行），但鲜有文献对这一结论做详细论述。本文以平息债券（指利息在到期时间内平均支付的债券）为研究对象，对债券价值与到期时间关系进行更深一步的探讨。

一、债券估价的基本原理

债券估价是计算债券公平价格的过程，和其他的资本投资一样，债券的公平价格是它将来预期现金流的现值。对于债券而言，其未来的现金流量主要包括持有期间获得的利息以及持有至到期得到的债券本金或债券未到期出售得到的收入。

在对债券进行估价时，首先要确认一张债券在偿还期内所有的现金流量，即每期票面利息与到期支付的本金；然后选择与各期现金流量相匹配的折现率，与债券相关的未来现金流量和折现率确定后，利用货币时间价值原理计算出与债券相关的未来现金流量现值之和，即债券的内在价值。估价公式为：

$$PV=\sum_{t=1}^{mn}\frac{\frac{1}{m}(F\times i)}{\left(1+\frac{k}{m}\right)^{t}}+\frac{F}{\left(1+\frac{k}{m}\right)^{mn}} \tag{1}$$

式（1）中：V为债券的价值；F为债券的面值；i为债券的年票面利率；k为投资者要求的最低年必要收益率；n为债券的期限；m为每年付息的次数。

二、问题的提出——债券价值与到期时间关系图

债券价值不仅受提前赎回条款、税收待遇、流通性、必要报酬率的影响，而且受债券到期时间的影响。债券的到期时间是指当前日到债券到期日之间的时间间隔。那么到期收益率及其他因素不变的条件下，债券价值与到期时间存在什么样的关系呢？

为了便于分析问题，假设某一每年计息一次的债券从发行至到期时间为n期，PV_m、PV_{m+1}分别表示债券已流通时间为m、m+1期、剩余流通时间（到期时间）为n-m、n-m-1期，已经支付了当期利息之后的平息债券价值。两者的关系为：

$$\begin{aligned}PV_m-PV_{m+1}&=\left[\sum_{t=1}^{n-m}\frac{(F\times i)}{(1+k)^t}+\frac{F}{(1+k)^{n-m}}\right]-\left[\sum_{t=1}^{n-m-1}\frac{(F\times i)}{(1+k)^t}+\frac{F}{(1+k)^{n-m-1}}\right]\\&=\frac{F\times i}{(1+k)^{n-m}}+\frac{F}{(1+k)^{n-m}}-\frac{F}{(1+k)^{n-m-1}}\\&=\frac{F\times(i-k)}{(1+k)^{n-m}}\end{aligned} \tag{2}$$

从式（2）可以得出，平息债券的价值在整个流通期间呈现出来的变动趋势为：

结论1：当$i>k$时，$PV_m>PV_{m+1}$，即溢价发行债券，其价值随债券到期时间的临近而逐渐减少，最终等于债券面值。

结论2：当$i<k$时，$PV_m<PV_{m+1}$，即折价发行债券，其价值随债券到期时间的临近而逐渐增加，最终等于债券面值。

结论3：当$i=k$时，$PV_m=PV_{m+1}$，即平价发行债券，其价值不随债券到期时间的临近而变化，始终等于面值。

根据上述结论，粗略地描绘出债券估价与到期时间关系图，如图1所示。

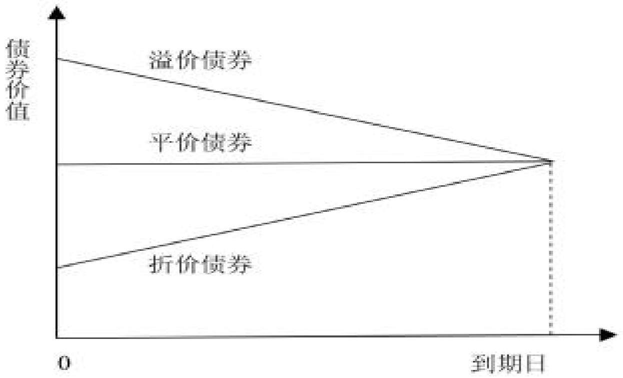

图1　债券估价与到期时间关系图

	A	B	C	D	E	F	G
1	债券基本信息				债券价值计算		
2	债券名称	A债券			到期年限	债券面值	债券价值
3	面值（元）	1000			10	1000	764.43
4	票面年利率	7%			9	1000	778.52
5	年限（年）	10			8	1000	794.16
6	每年付息次数（次）	1			7	1000	811.51
7	市场利率	11%			6	1000	830.78
8	发行方式	折价发行			5	1000	852.16
9					4	1000	875.90
10	垂直参考线				3	1000	902.25
11	11	0			2	1000	931.50
12	11	1000			1	1000	963.96
13	当市场利率=11%时，折价发行				0	1000	1000.00

图2　模型基本信息图

三、基于Excel函数的债券价值与到期时间关系图的推导

（一）模型概要

1. 变量特征：此处假设发行时市场的利率（最低必要收益率）为随机变量，债券面值、票面利率、期限为确定性变量。

2. 决策变量：债券价值、到期时间。

3. 决策方法：图形分析法。

4. 关键技术：微调器、趋势线的使用方法。

（二）问题描述

某公司现发行面值**1 000**元的**10**年期债券，票面利率为**7%**，利息支付方式为每年支付一次，当发行时市场的利率在［**1%**，**20%**］区间变动时，请做出债券价值与到期时间关系图并分析他们之间的关系。

（三）建模的技巧与步骤

1. 相关函数。现值函数——**PV**（**rate**，**nper**，**pmt**，**fv**，**type**）。其中：**rate**表示各期利率；**nper**为总期数；**pmt**为每期的付款金额；**fv**为未来值；**type**用以指定各期的付款时间是在期初还是期末。需要说明的是，**fv**与必**pmt** 参数不能同时省略。

逻辑判断函数——**IF**（判断语句，**a**，**b**）。其中**a**表示判断语句为**TRUE**时的返回值，**b**表示判断语句**FALSE**时的返回值。

2. 模型功能。本模型具有以下功能：计算债券价值；绘制债券价值与到期时间的关系图；动态观察调节每年付息次数、市场利率等变量，给出动态可调的结论。

3. 建模步骤。

（**1**）构思模型界面。根据问题描述，模型界面应包括数据区、计算区、结论区、绘图辅助区。

（**2**）建立模型框架。将初始信息输入到一张**Excel**工作表的单元格**A2**∶**B8**中；在单元格**B8**中输入"**=IF**（**B7>B4**，"折价发行"，**IF**（**B7=B4**，"平价发行"，"溢价发行"））"；在单元格**E2**、**F2**、**G2**中输入文字"到期年限"、"债券面值"和"债券价值"，在**E3**∶**E13**单元格区域中输入到期年限，如图**2**所示。

（**3**）计算债券价值。在单元格**G3**∶**G13**求出某一贴现率下的债券现值。具体做法是：在单元格**F3**中输入公式"**=B$3**"，在单元格**G3**中输入公式"**=PV**（**B$7/B$6**，**$E3×B$6**，**-B$3×B$4/B$6**，**-B$3**）"，将单元格**G4**中的公式复制到单元格**F13**和**G13**。

（**4**）绘制图形。利用**E3**∶**G13**中的数据在当前工作表中绘制带数据标记的折线图形，具体步骤不再详述。设置数值**X**轴标题为"到期价值"，数值**Y**轴标题为"到期年限"，接下来可按照图形制作步骤进行相关操作，如图**3**所示。

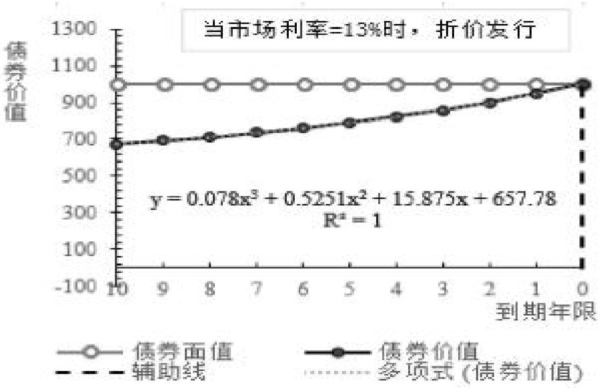

图3　债券价值与到期时间关系图

（**5**）添加控件。打开【窗体】工具栏，选择【微调器】按钮，在单元格**C6**的右侧绘制【微调器】控件，右击该控件，在【设置控件格式】对话框中设置"最小值"为"**1**"、"最大值"为"**12**"、"步长"为"**1**"、"单元格链接"为"**B6**"，从而建立了每年付息次数微调器。同理，在单元格**C7**的右侧绘制【微调器】控件，设置"最小值"为"**1**"、"最大值"为"**20**"、"步长"为"**1**"、"单元格链接"为"**B7**"，建立折现率微调器。可以看到，通过控件调节每年付息次数、贴现率时，债券价值会相应变动，图形也会做出相应改变。

（**6**）美化图形。合并**A13**∶**B13**单元格，输入公式"**=**"当市场利率="**&B7×100&**"%时，"**&B8**"，绘制一个显示单元格**A13**决策结论的文本框，当贴现率变化时，该文本框能随时反映当前的发行方式，操作步骤同前，将文本框移到

图形上，效果如图3所示。另外，可以为图形设置一条辅助线，设置数据系列格式等图形的美化操作不再赘述。

(7)结论判断。通过图3可以看出：随着到期日的临近债券折价和溢价逐渐向面值靠拢。但从图形中难以判断靠拢的程度，因此可以绘制趋势线来判断。

(8)绘制趋势线。在图表中单击任意一个数据点以选中数据系列，然后单击鼠标右键，在弹出的快捷菜单中选择"添加趋势线"命令，在"设置趋势线格式"选项卡中选中"显示公式"、"显示R平方值"，并可以依此选择线性、对数、多项式、乘幂、指数的趋势图"线性"趋势线类型。R平方值反映了趋势线的估计值与对应的实际数据之间的拟合程度，当R平方值等于或接近于1时，趋势线对于实际数据的拟合程度最高，此时的趋势线最可靠，通过此趋势线预测得到的数据也最准确。经过比较，"多项式"趋势线对应的R平方值1是其中的最大值。例如，当市场利率为13%时，预测的债券价值函数公式如下：y=0.078x3+0.525 1x2+15.875x+657.78。通过调整市场利率微调控件，可以得到对应的"多项式"趋势线函数。通过这些函数我们可以发现：随着到期日的临近，无论是折价发行还是溢价发行的债券均加速向面值靠拢。所以，溢价发行、折价发行的债券价值与到期日间的关系均为曲线变动关系，而非直线变化。

四、基于数学计算的债券价值与到期时间关系图的验证

由于只是个例的计算分析推导，上述对平息债券价值与到期时间关系的证明具有局限性，不能充分证明结论的准确性。因此，可以用数学公式来进行充分性推导。首先，对债券价值公式求一阶导数，用函数的单调性来证明关系图线的大致走势。其次，再对债券价值公式求二阶导数，用函数的凸性来证明关系图线的具体形状。

(一)对债券价值公式求一阶导数

根据数学等比数列求和公式，可以将式(1)整理成如下形式：

$$PV=(F\times i)\times\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k(1+k/m)^{n}}\right]+\frac{F}{(1+k/m)^{n}} \qquad (3)$$

对函数PV(n)求一阶导数，得：

$$\frac{dPV}{dn}=F\left(1-\frac{i}{k}\right)\times\left(\frac{1}{1+k/m}\right)^{n}\ln\left(\frac{1}{1+k/m}\right) \qquad (4)$$

在实际经济活动中，折现率k肯定是大于0的，平息债券每年的付息次数m≥1，所以$\left(\frac{1}{1+k/m}\right)^{n}\ln\left(\frac{1}{1+k/m}\right)$是小于0的。那么就出现了三种情况，即：

(1)$i>k$时，溢价发行，$\frac{dPV}{dn}>0$，关系图线斜率为负(一阶导数是依据自变量自小到大的方向判定单调性的，为便于观察，假设自变量n沿x轴增大的方向是逐渐减小的)，即随着到期日临近，债券价值向票面价值靠拢。

(2)$i<k$时，折价发行，$\frac{dPV}{dn}<0$，关系图线斜率为正，即随着到期日临近，债券价值向票面价值靠拢。

(3)$i=k$时，平价发行，$\frac{dPV}{dn}=0$，关系图线斜率为零，债券价值始终等于票面价值。

(二)对债券价值公式求二阶导数

对函数PV(n)求二阶导数，得：

$$\frac{d^2PV}{d^2n}=F\times\left(1-\frac{i}{k}\right)\times\left(\frac{1}{1+k/m}\right)^{n}\left[\ln\left(\frac{1}{1+k/m}\right)\right]^{2} \qquad (5)$$

因为在实际经济社会中折现率肯定是大于0的，即$i_2>0$，所以$\left(\frac{1}{1+i_2/m}\right)^{n}\left[\ln\left(\frac{1}{1+i_2/m}\right)\right]^{2}$是大于0的。那么也出现了三种情况，即：

(1)$i>k$时，溢价发行，$\frac{d^2PV}{d^2n}<0$，关系图线上凸，即随着到期日临近，债券价值是加速向票面价值靠拢。

(2)$i<k$时，折价发行，$\frac{d^2PV}{d^2n}>0$，关系图线下凸，即随着到期日临近，债券价值是加速向票面价值靠拢。

(3)$i=k$时，平价发行，$\frac{d^2PV}{d^2n}=0$，关系图线为一条直线，债券价值始终等于票面价值。

由此，根据上述数学推导，我们证明了本文结论1～3是正确的，并可以得出如下结论：当必要报酬率一直保持至到期日不变时，不管它高于或低于票面利率，随着到期时间的缩短，债券价值将加速接近其票面价值，至到期日债券价值等于债券面值。

五、小结

通过上述研究，可以得出债券价值随着到期日的临近是"曲线加速"向票面价值靠拢的结论，即在其他条件相同的情况下，债券价值随着债券到期日的临近加速回归到债券面值，而不是均匀地回归到面值。另外还可以证明：如果必要报酬率在债券发行后发生变动，债券价值也会因此而变动。随着到期时间的缩短，必要报酬率变动对债券价值的影响越来越小，即债券价值对必要报酬率特定变化的反映越来越不灵敏。

主要参考文献

高育清.到期时间对债券价值的影响分析[J].中国管理信息化，2010(3).

何晓蓉.债券估价应注意的问题[J].财会月刊，2007(12).

谷增军.Excel在债券价值评估与动态分析模型中的应用[J].财会通讯，2010(7).