南京航空航天大学

2012年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷）

科目代码: 814 科目名称: 高等代数 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、(20 分) 设 $\alpha_1=(1,2,2)^T$，$\alpha_2=(3,0,0)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1)^T$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标分别是 $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$（这里“$T$”表示转置，以下各题相同）.

1．求向量 β_1,β_2,β_3；

2．在 R^3 中求一组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，使得从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为上三角矩阵.

二、(15 分) 设有两组向量

$$(\mathrm{I}):\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix};\quad (\mathrm{II}):\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}2\\b^2\\c+1\end{pmatrix}.$$

1．求参数 a，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

2．当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，求参数 b 和 c，使得向量组（I）和（II）等价.

三、(25 分) 设 R^3 的线性变换 T 使得

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a+1\\0\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a-1\\1\end{pmatrix}.$$

1．求 T 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,1,0)^T$，$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$ 下的矩阵 A；

2．如果 T 有三个线性无关的特征向量，求参数 a 和可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵；

3．如果 $\alpha=(-1,1,1)^T$ 是 T 的一个特征向量，证明 A 不能与对角矩阵相似，并求 A 的 Jordan 标准形.

四、(20 分) 设实二次型

$$f(X)=((1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n)^2+(2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n)^2 \\ +\cdots+(nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n)^2$$

的正惯性指数小于n，求参数a以及使得$f(X)=0$的全部n维向量X.

五、(15 分) 设A, B, C是三个n阶矩阵，且$AB=0,\ A+BC=E_n$，证明:

1．秩(A) + 秩$(B)=n$;

2．矩阵A与形如$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的矩阵相似，其中$E_k$表示$k$阶单位矩阵，$r$是矩阵$A$的秩.

六、(15 分) 设$f(x)=x^2+x+1$，n是自然数，证明:

1． $f(x)\,|\,x^{n+2}+a(x+1)^{2n+1}$的充分必要条件是$a=1$，这里“|”表示整除;

2．对任意多项式$g(x)$，$(f(x), g(x))=1$的充分必要条件是$(f^n(x), g^n(x))=1$.

七、(20 分) 设A是n阶正定矩阵，B是n阶实对称矩阵，证明:

1．存在n阶可逆矩阵P，使得$P^TAP=E_n$而P^TBP为对角矩阵;

2．存在正数t_0，当$t>t_0$时，$tA+B$也是正定矩阵;

3．如果B还是半正定矩阵，则$|A+B|\ge|A|$.

八、(20 分) 设A, B是两个n阶实对称矩阵，且$A=B^3$，证明:

1．方程组$AX=0$与$BX=0$同解;

2．对任意实数$c\neq 0$，矩阵$P=c^2E_n+cB+B^2$是正定矩阵;

3． A的特征向量都是B的特征向量.