＄6、Maxwell方程组的协变形式

根据Einstein的相对性原理，作为描述电磁体系物理规律的Maxwell方程组应与坐标系（参照系）的选取无关，因此应该是协变的。

下面讨论Maxwell方程组的四维协变形式：

一、四维电流矢量

电荷守恒定律是物理规律，因此应该是协变的，

即 $\nabla \bullet \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 应该可以改写为四维形式。

已知 $x_\mu = (\vec{x}, ict)$，如果定义 $J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$，则方程可改写为 $\partial_\mu J_\mu = 0$，即协变形式。关键是 $J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$ 是否构成四维矢量，即不同坐标系间变换是否遵循Lorentz变换

证明如下：

1）S系中有一个体积元dV，其中电荷以速度u运动，则dV中总电荷为ρdV（ρ为在S系中测量的电荷密度）

2）在与电荷相对静止的参考系S_0中，设电荷密度为ρ_0，其体积元dV_0与S系中体积元dV间满足

$$dV = dV_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

电荷守恒要求$\rho dV=\rho_0 dV_0$，于是得到

$$\rho = \rho_0/\sqrt{1-u^2/c^2} \qquad \vec{J} = \rho\vec{u} = \rho_0\vec{u}/\sqrt{1-u^2/c^2}$$

3）引入新参照系S’,设S’系相对于S系以速度v沿x轴运动,利用速度变换公式，电荷在S’系中运动的速度u’为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-u_x v/c^2},\quad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2},\quad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2}$$

在S’中测得的电荷密度ρ’和电流密度J’为

$$\rho' = \rho_0/\sqrt{1-u'^2/c^2} \qquad \vec{J}' = \rho'\vec{u}' = \rho_0\vec{u}'/\sqrt{1-u'^2/c^2}$$

$$J'_1 = J'_x = \frac{\rho_0 u'_x}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}\left[\frac{u_x - v}{1-u_x v/c^2}\right]$$

$$= \frac{\rho\sqrt{(1-u^2/c^2)}}{\sqrt{\frac{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}{(1-u_x v/c^2)^2}}}\left[\frac{u_x - v}{1-u_x v/c^2}\right]$$

$$= \gamma\rho(u_x - v) = \gamma(J_1 + i\beta J_4) \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \beta = v/c$$

$$J'_2 = J'_y = \frac{\rho_0 u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}}\frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2}$$

$$= \frac{\rho\sqrt{(1-u^2/c^2)}}{\sqrt{\frac{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}{(1-u_x v/c^2)^2}}}\frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-u_x v/c^2} = \rho u_y = J_2$$

$$J'_3 = J_3$$

$$J'_4 = ic\rho' = ic\frac{\rho_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = ic\rho_0\frac{1-u_x v/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}}$$

$$= ic\rho_0\gamma\frac{1-u_x v/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} = ic\rho\gamma(1-u_x v/c^2) = -i\beta\gamma J_1 + \gamma J_4$$

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} J'_1 \\ J'_2 \\ J'_3 \\ J'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{pmatrix}$$

正好与坐标的变换相同,也就是说上面定义的J_μ构成一个四维矢量。

二、电磁势方程的协变形式(势表示的麦氏方程组)

在Lorentz规范下，即满足 $\nabla\bullet\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ 下，势方程为

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\rho/\varepsilon_0\\ \nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\end{cases}$$

若定义四维势为 $A_\mu=(\vec{A},i\varphi/c)$

规范条件化作 $\partial_\mu A_\mu=0$

势方程化作 $\Diamond A_\nu\equiv\partial_\mu\partial_\mu A_\nu=-\mu_0 J_\nu$ （为什么见下页）

而这些方程是用势表示的Maxwell方程组，由此看出：

用电磁势来描写的电磁体系的Maxwell方程组是满足相对性原理的，因此是协变的。

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}A_\mu=(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})A_\mu=(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})(\vec{A},\frac{i}{c}\varphi)$$

$$=\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\nabla^2(\frac{i}{c}\varphi)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{i}{c}\varphi)$$

$$=-\mu_0\vec{J}+\frac{i}{c}(\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2})=-\mu_0\vec{J}+\frac{i}{c}(-\frac{\rho}{\varepsilon_0})$$

$$=-\mu_0\left[\vec{J}+ic\rho\right]=-\mu_0 J_\mu$$

三、电磁场张量
（用场量表示的麦氏方程的协变形式）

由场量与电磁势函数之间的关系式

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

利用四维矢势A$_\mu$，定义一个二阶反对称张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

矩阵形式

（为什么见下页）

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E_1 = ic\left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) \\ E_2 = ic\left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial x_4}\right) \\ E_3 = ic\left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1 = \dfrac{\partial A_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ B_2 = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ B_3 = \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

可以验证： （为什么见下页）

$$\nabla \bullet \vec{E} = \rho / \varepsilon_0, \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 J_\nu$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_3/c & iE_2/c & B_1 \\ iE_3/c & 0 & -iE_1/c & B_2 \\ -iE_2/c & iE_1/c & 0 & B_3 \\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \partial_\alpha G_{\beta\alpha} = 0$$

$$\mathbf{F} \xleftrightarrow{E \to icB,\, icB \to E} \mathbf{G}$$

协变形式麦氏方程组，F为电磁场张量，G为对偶场张量。形式不对称是由于磁荷不存在。若磁荷存在，则存在与其对应的磁流密度，则方程形式上完全一致。

推导 $\nabla \bullet \vec{E} = \rho / \varepsilon_0, \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$ $\Leftrightarrow$ $\partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 J_\nu$

$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \partial_1 F_{\nu 1} + \partial_2 F_{\nu 2} + \partial_3 F_{\nu 3} + \partial_4 F_{\nu 4}$$

当 ν =1时

$$\partial_\mu F_{1\mu} = \partial_1 F_{11} + \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} + \partial_4 F_{14}$$

$$= \partial_y B_z - \partial_z B_y + \frac{\partial}{\partial(ict)}\left(-i\frac{E_x}{c}\right)$$

$$= \left(\nabla \times \vec{B}\right)_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$= \left(\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_x = \left(\mu_0 \vec{J}\right)_x$$

四、电磁场分量的变换性质：

（为什么见12页）

$$F'_{\mu\nu}=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}=a_{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}a_{\nu\beta}=aFa^{T}$$

按照直角坐标系进行分解

$$\begin{cases} E'_1=E_1 \\ E'_2=\gamma(E_2-vB_3) \\ E'_3=\gamma(E_3+vB_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_1=B_1 \\ B'_2=\gamma\left(B_2+\dfrac{v}{c^2}E_3\right) \\ B'_3=\gamma\left(B_3-\dfrac{v}{c^2}E_2\right) \end{cases}$$

按照平行和垂直于运动速度方向进行分解

$$\begin{cases} E'_{//}=E_{//} \\ \vec{E}'_{\perp}=\gamma(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})_{\perp} \end{cases} \qquad \begin{cases} B'_{//}=B_{//} \\ \vec{B}'_{\perp}=\gamma\left(\vec{B}-\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)_{\perp} \end{cases}$$

$F_{\mu\nu}$ 变换性质的证明：

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\sigma} = \delta_{\nu\sigma}$$

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu = \delta_{\nu\lambda} x_\nu / a_{\mu\lambda} = x_\nu / a_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

$$A'_\nu = a_{\nu\tau} A_\tau$$

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\mu} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} \frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\tau}$$

$$= a_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{\nu\tau} A_\tau - a_{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x_\tau} a_{\mu\lambda} A_\lambda$$

$$= a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} \left(\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\tau} \right) = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau}$$

矩阵形式为 $\boxed{F' = aF\tilde{a}}$，即

$$
\begin{pmatrix}
0 & B_3' & -B_2' & -\frac{i}{c}E_1' \\
-B_3' & 0 & B_1' & -\frac{i}{c}E_2' \\
B_2' & -B_1' & 0 & -\frac{i}{c}E_3' \\
\frac{i}{c}E_1' & \frac{i}{c}E_2' & \frac{i}{c}E_3' & 0
\end{pmatrix}
=
$$

$$
\begin{pmatrix}
\gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 & B_3 & B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\
-B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\
-B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\
\frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma
\end{pmatrix}
$$

结果说明：同一电磁现象在不同惯性系中的测量结果不一样。

例如如果在一个惯性系中只测量到电场，但是在其他惯性系中既可以测量到电场，也可以测量到磁场，但是不能仅有磁场；同样在一个惯性系中只有磁场，变换到另一个惯性系时既有电场也有磁场，但是不能只有电场。

表面上看来Lorentz变换似乎可以使电磁场具有任意值。实际上这只是问题的一个方面，在这种相对性之中还包含着绝对性的一面---场的不变量。这也就是说为什么在一个惯性系中只有磁（电）场而变换到另一个惯性系中时不能只有电（磁）场的原因。

五、电磁场的不变量

对电磁场进行描述出现的张量为： 电磁场张量F和对偶场张量G，可以构成的不变量---Lorentz标量---只有2个（$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$，$F_{\mu\nu}G_{\mu\nu}$），它们分别为

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}=B^2-E^2/c^2,\qquad \frac{i}{4}F_{\mu\nu}G_{\mu\nu}=\vec{B}\bullet\vec{E}/c$$

（为什么见17页）

由此可以得到如下结论：

1）若电场和磁场在某一个惯性系中的夹角为锐（钝）角，则在任意惯性系中均为锐（钝）角；

2）若在某惯性系中E=cB，则在任意惯性系中有E=cB；

3）若在某惯性系中E>cB，则找不到一惯性系使E≤cB；

4）若电场和磁场在某个惯性系中是垂直的，那么一定可以找到一个惯性系，使在其中只有电场或只有磁场，究竟该是电场还是磁场由相对大小决定。如果E>cB，则只能有电场；反之，只能有磁场。同时这也解释了为什么若某个惯性系中只有电场，那么在其他惯性系中既可以有电场也可以有磁场，但是不能只有磁场；若某个惯性系中只有磁场，那么在其他惯性系中既可以有电场也可以有磁场，但是不能只有电场 。

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= F_{11}F_{11} + F_{12}F_{12} + F_{13}F_{13} + F_{14}F_{14} \\
&\quad + F_{21}F_{21} + F_{22}F_{22} + F_{23}F_{23} + F_{24}F_{24} \\
&\quad + F_{31}F_{31} + F_{32}F_{32} + F_{33}F_{33} + F_{34}F_{34} \\
&\quad + F_{41}F_{41} + F_{42}F_{42} + F_{43}F_{43} + F_{44}F_{44} \\
&= 2(F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{12}^2 + F_{41}^2 + F_{42}^2 + F_{43}^2) \\
&= 2(B^2 - \frac{1}{c^2}E^2)
\end{aligned}
$$

$$
F_{\mu\nu}G_{\mu\nu} = -4i\vec{B} \bullet \vec{E} / c
$$