

§ 6、Maxwell方程组的协变形式

根据Einstein的相对性原理，作为描述电磁体系物理规律的Maxwell方程组应与坐标系（参照系）的选取无关，因此应该是协变的。

下面讨论Maxwell方程组的四维协变形式：

一、四维电流矢量

电荷守恒定律是物理规律，因此应该是协变的，

即 $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 应该可以改写为四维形式。

已知 $x_\mu = (\vec{x}, ict)$ ，如果定义 $J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$ ，则方程可改写为 $\partial_\mu J_\mu = 0$ ，即协变形式。关键是 $J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$ 是否构成四维矢量，即不同坐标系间变换是否遵循Lorentz变换

证明如下:

- 1) **S**系中有一个体积元 dV , 其中电荷以速度 u 运动, 则 dV 中总电荷为 ρdV (ρ 为在**S**系中测量的电荷密度)
- 2) 在与电荷相对静止的参考系**S**₀中, 设电荷密度为 ρ_0 , 其体积元 dV_0 与**S**系中体积元 dV 间满足

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

电荷守恒要求 $\rho dV = \rho_0 dV_0$, 于是得到

$$\rho = \rho_0 / \sqrt{1 - u^2 / c^2} \quad \vec{J} = \rho \vec{u} = \rho_0 \vec{u} / \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

- 3) 引入新参照系**S'**, 设**S'**系相对于**S**系以速度 v 沿 x 轴运动, 利用速度变换公式, 电荷在**S'**系中运动的速度 u' 为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - u_x v / c^2}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - u_x v / c^2}$$

在**S'**中测得的电荷密度 ρ' 和电流密度 J' 为

$$\rho' = \rho_0 / \sqrt{1 - u'^2 / c^2} \quad \vec{J}' = \rho' \vec{u}' = \rho_0 \vec{u}' / \sqrt{1 - u'^2 / c^2}$$

$$J'_1 = J'_x = \frac{\rho_0 u'_x}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \left[\frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \right]$$

$$= \frac{\rho \sqrt{(1 - u^2/c^2)}}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}} \left[\frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \right]$$

$$\sqrt{(1 - u_x v/c^2)^2}$$

$$= \gamma \rho (u_x - v) = \gamma (J_1 + i\beta J_4) \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}, \beta = v/c$$

$$J'_2 = J'_y = \frac{\rho_0 u'_y}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2}$$

$$= \frac{\rho \sqrt{(1 - u^2/c^2)}}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}} \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - u_x v/c^2} = \rho u_y = J_2$$

$$J'_3 = J_3$$

$$\begin{aligned}
 J'_4 &= ic\rho' = ic \frac{\rho_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = ic\rho_0 \frac{1-u_x v/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}} \\
 &= ic\rho_0 \gamma \frac{1-u_x v/c^2}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} = ic\rho\gamma(1-u_x v/c^2) = -i\beta\gamma J_1 + \gamma J_4
 \end{aligned}$$

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} J'_1 \\ J'_2 \\ J'_3 \\ J'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \end{pmatrix}$$

正好与坐标的变换相同,也就是说上面定义的 J_μ 构成一个四维矢量。

二、电磁势方程的协变形式(势表示的麦氏方程组)

在Lorentz规范下, 即满足 $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ 下, 势方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0 \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

若定义四维势为

$$A_\mu = (\vec{A}, i\varphi/c)$$

规范条件化作

$$\partial_\mu A_\mu = 0$$

势方程化作

$$\diamond A_\nu \equiv \partial_\mu \partial_\mu A_\nu = -\mu_0 J_\nu$$

(为什么见下页)

而这些方程是用势表示的Maxwell方程组, 由此看出:
用电磁势来描写的电磁体系的Maxwell方程组是满足相对性原理的, 因此是协变的。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu &= (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) A_\mu = (\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) (\vec{A}, \frac{i}{c} \varphi) \\
&= \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 (\frac{i}{c} \varphi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\frac{i}{c} \varphi) \\
&= -\mu_0 \vec{J} + \frac{i}{c} (\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}) = -\mu_0 \vec{J} + \frac{i}{c} (-\frac{\rho}{\epsilon_0}) \\
&= -\mu_0 [\vec{J} + ic\rho] = -\mu_0 J_\mu
\end{aligned}$$

三、电磁场张量

(用场量表示的麦氏方程的协变形式)

由场量与电磁势函数之间的关系式

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

利用四维矢势 A_μ ，定义一个二阶反对称张量

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

矩阵形式

(为什么见下页)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1/c \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2/c \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3/c \\ iE_1/c & iE_2/c & iE_3/c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right) \\ E_2 = ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right) \\ E_3 = ic \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) \end{array} \right.$$

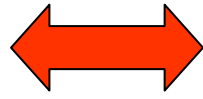
$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \\ B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{array} \right.$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

(为什么见下页)

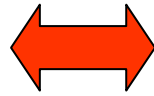
可以验证:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

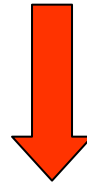


$$\partial_\mu F_{\nu\mu} = \mu_0 J_\nu$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$



$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0$$



$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_3/c & iE_2/c & B_1 \\ iE_3/c & 0 & -iE_1/c & B_2 \\ -iE_2/c & iE_1/c & 0 & B_3 \\ -B_1 & -B_2 & -B_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\alpha G_{\beta\alpha} = 0$$

$$E \rightarrow icB, icB \rightarrow E$$

F



G

协变形式麦氏方程组，**F**为电磁场张量，**G**为对偶场张量。形式不对称是由于磁荷不存在。若磁荷存在，则存在与其对应的磁流密度，则方程形式上完全一致。

推导

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$



$$\partial_{\mu} F_{\nu\mu} = \mu_0 J_{\nu}$$

$$\partial_{\mu} F_{\nu\mu} = \partial_1 F_{\nu 1} + \partial_2 F_{\nu 2} + \partial_3 F_{\nu 3} + \partial_4 F_{\nu 4}$$

当 $\nu=1$ 时

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F_{1\mu} &= \partial_1 F_{11} + \partial_2 F_{12} + \partial_3 F_{13} + \partial_4 F_{14} \\ &= \partial_y B_z - \partial_z B_y + \frac{\partial}{\partial(ict)} \left(-i \frac{E_x}{c} \right) \\ &= \left(\nabla \times \vec{B} \right)_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ &= \left(\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_x = \left(\mu_0 \vec{J} \right)_x \end{aligned}$$

四、电磁场分量的变换性质：

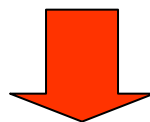
(为什么见12页)

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} F_{\alpha\beta} = a_{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} a_{\nu\beta} = a F a^T$$



按照直角
坐标系进
行分解

$$\begin{cases} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2) \end{cases} \quad \begin{cases} B'_1 = B_1 \\ B'_2 = \gamma(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3) \\ B'_3 = \gamma(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2) \end{cases}$$



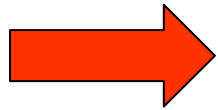
按照平行和
垂直于运动
速度方向进
行分解

$$\begin{cases} E'_{\parallel} = E_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E})_{\perp} \end{cases}$$

$F_{\mu\nu}$ 变换性质的证明:

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\sigma} = \delta_{\nu\sigma}$$

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu = \delta_{\nu\lambda} x_\nu / a_{\mu\lambda} = x_\nu / a_{\mu\nu}$$



$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

$$A'_\nu = a_{\nu\tau} A_\tau$$

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \frac{\partial A'_\nu}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\mu} \frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial x_\tau}{\partial x'_\nu} \frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\tau} \\ &= a_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} a_{\nu\tau} A_\tau - a_{\nu\tau} \frac{\partial}{\partial x_\tau} a_{\mu\lambda} A_\lambda \\ &= a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} \left(\frac{\partial A_\tau}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\tau} \right) = a_{\mu\lambda} a_{\nu\tau} F_{\lambda\tau} \end{aligned}$$

矩阵形式为 $F' = aF\tilde{a}$ ，即

$$\begin{pmatrix} 0 & B'_3 & -B'_2 & -\frac{i}{c}E'_1 \\ -B'_3 & 0 & B'_1 & -\frac{i}{c}E'_2 \\ B'_2 & -B'_1 & 0 & -\frac{i}{c}E'_3 \\ \frac{i}{c}E'_1 & \frac{i}{c}E'_2 & \frac{i}{c}E'_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_3 & B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ -B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

结果说明：同一电磁现象在不同惯性系中的测量结果不一样。

例如如果在一个惯性系中只测量到电场，但是在其他惯性系中既可以测量到电场，也可以测量到磁场，但是不能仅有磁场；同样在一个惯性系中只有磁场，变换到另一个惯性系时既有电场也有磁场，但是不能只有电场。

表面上看来Lorentz变换似乎可以使电磁场具有任意值。实际上这只是问题的一个方面，在这种相对性之中还包含着绝对性的一面——**场的不变量**。这也就是说为什么在一个惯性系中只有磁（电）场而变换到另一个惯性系中时不能只有电（磁）场的原因。

五、电磁场的不变量

对电磁场进行描述出现的张量为：电磁场张量 F 和对偶场张量 G ，可以构成的不变量---**Lorentz标量**---只有2个
($F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} G_{\mu\nu}$)，它们分别为

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = B^2 - E^2 / c^2, \quad \frac{i}{4} F_{\mu\nu} G_{\mu\nu} = \vec{B} \cdot \vec{E} / c \quad (\text{为什么见17页})$$

由此可以得到如下结论：

- 1) 若电场和磁场在某一个惯性系中的夹角为锐（钝）角，则在任意惯性系中均为锐（钝）角；
- 2) 若在某惯性系中 $E=cB$ ，则在任意惯性系中有 $E=cB$ ；
- 3) 若在某惯性系中 $E>cB$ ，则找不到一惯性系使 $E\leq cB$ ；

4) 若电场和磁场在某个惯性系中是垂直的，那么一定可以找到一个惯性系，使在其中只有电场或只有磁场，究竟该是电场还是磁场由相对大小决定。如果 $E > cB$ ，则只能有电场；反之，只能有磁场。同时这也解释了为什么若某个惯性系中只有电场，那么在其他惯性系中既可以有电场也可以有磁场，但是不能只有磁场；若某个惯性系中只有磁场，那么在其他惯性系中既可以有电场也可以有磁场，但是不能只有电场。

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= F_{11} F_{11} + F_{12} F_{12} + F_{13} F_{13} + F_{14} F_{14} \\
&+ F_{21} F_{21} + F_{22} F_{22} + F_{23} F_{23} + F_{24} F_{24} \\
&+ F_{31} F_{31} + F_{32} F_{32} + F_{33} F_{33} + F_{34} F_{34} \\
&+ F_{41} F_{41} + F_{42} F_{42} + F_{43} F_{43} + F_{44} F_{44} \\
&= 2(F_{23}^2 + F_{31}^2 + F_{12}^2 + F_{41}^2 + F_{42}^2 + F_{43}^2) \\
&= 2(B^2 - \frac{1}{c^2} E^2)
\end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} G_{\mu\nu} = -4i\vec{B} \bullet \vec{E} / c$$