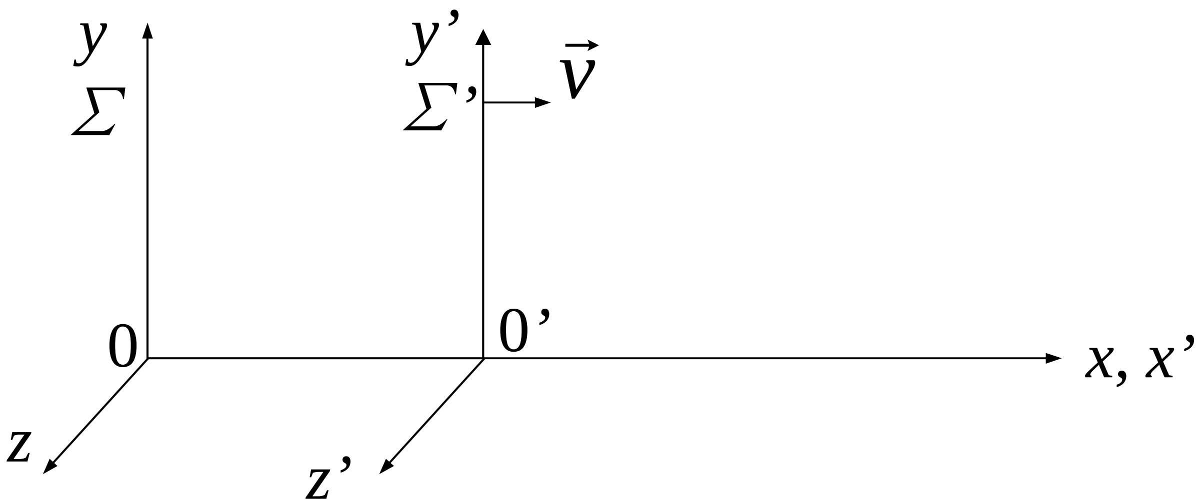
§6.3　闵可斯基空间和洛仑兹变换

本节将从爱因斯坦的两个基本假设出发，建立狭义相对论的理论框架。

1、间隔不变性

若有两个惯性参考系Σ和Σ’，Σ’相对于Σ沿x轴正向以匀速 $\vec{v}$ 运动，把两个坐标完全重合的时刻选作两个坐标系时间 t 和 t’的起算点。



当Σ’和Σ的坐标原点0’，0重合时（t=t’=0)发出一光脉冲，根据光速不变原理，在Σ系观察者看来，任何时间 t 光的波前皆为一球面，即

$$r^2 = c^2 t^2$$

也就是:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

而在Σ’系观察者看来，因为光脉冲也是在Σ’系的原点0’发出，根据光速不变原理，任何时刻 t’光的波前同样是球面，即

$$r'^2 = c'^2 t'^2$$

也就是：

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

因为时间和空间是均匀的，而且空间是各向同性的，这意味着Σ系和Σ’系之间的时空变换必须是线性的。通过线性变换可知：对于以光信号联系的两事件上的两个二次式，从两个惯性系观察都为零，因此必然相等。即

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

对于不以光信号联系的其他事件，从两惯性系观察，它们虽然不等于零，但由于时空坐标变换是线性的，这两个二次式至多只能相差一个系数A。即

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = A(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2)$$

其中系数A仅与两个惯性系的相对速度的绝对值有关，系数A不可能与坐标或时间有关，否则空间的不同点及时间的不同时刻就不等价了，这与时间空间的均匀性相矛盾。另外，系数A也不可能与惯性系的相对速度的方向有关。因为这与空间的各向同性的性质相矛盾。由此可见

$$A = A(v)$$

由于Σ’系相对Σ系的运动速度显然与Σ系相对Σ’系的运动速度相同，因此

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = A(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2)$$

从以上两个式子可看出：

$$A^2 = 1, \qquad \text{即} A = \pm 1$$

为了从两个值±1中选择一个，我们应注意：A只可以永远等于+1，或永远等于-1，假如A(v)真的对于某些速度为+1，而对于另外某些速度为-1，那么，就一定有些速度存在，与这些速度相应的A(v)是在+1与-1之间，而这是不可能的。既然如此，A(v)要么只取+1，要么只取-1，最后，我们取A(v)应该永远为+1，这是因为恒等式

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2}$$

是变换式

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = A(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2)$$

的一个特殊例子，可见其中A(v) = +1。

假如x_1，y_1，z_1，t_1及x_2，y_2，z_2，t_2是Σ系任何两个事件的坐标，定义

$$\boxed{S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

为这两个事件的间隔。

同理，在Σ’系中任何两个事件的间隔为：

$$\boxed{S'^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2}$$

由上述比例关系式得到

$$\boxed{S'^2 = S^2}$$

这称作间隔不变性。

如果两事件彼此无限地接近，那么间隔为：

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

也可得到

$$dS'^2 = dS^2$$

因此，我们得到一个很重要的结论：两个事件的间隔在所有惯性系里都是一样的，即当由一个惯性系变换到任何另一惯性系时，它是不变的。这也是光速不变的数学表示。

2、闵可夫斯基空间

由间隔不变性可知：

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=\text{constant}$$

令 $$x_4=ict \qquad (x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$$

根据爱因斯坦求和法则

$$x_u x_u=\text{inv.} \qquad (u=1,2,3,4)$$

如果把x_1, x_2, x_3, x_4看作一个四维空间坐标矢量的四个分量，那么间隔不变性意味着Σ系与Σ’系之间的变换是一个由线性变换式 $$x'_u=a_{uv}x_v$$ 所表征的四维空间旋转操作，通常把由这个x_1, x_2, x_3, x_4所组成的空间叫做闵可夫斯基空间。

3、洛仑兹变换

这里讨论闵可夫斯基空间的坐标变换的具体形式。因为要求在坐标变换下不改变闵可夫斯基空间的矢量长度，根据间隔不变性和变换式，我们看到：

$$x_u x_u = x'_u x'_u = \text{inv.} \qquad x'_u = a_{uv} x_v$$

可见变换系数 a_{uv} 服从下列正交条件：

$$a_{uv} a_{u\sigma} = \delta_{v\sigma}$$

变换系数的确定：

$$x'_u = a_{uv} x_v \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

由于沿x_2、x_3方向的两个坐标之间没有相对运动，因而

$$a_{22}=1\ ,\qquad a_{21}=a_{23}=a_{24}=0$$
$$a_{33}=1\ ,\qquad a_{31}=a_{32}=a_{34}=0$$

由于当t=t’=0时，∑和∑’完全重合，所以当x_1、x_4为零时，x_1’、x_4’也应为零，从而得到：

$$a_{12}=a_{13}=0\ ,\qquad a_{42}=a_{43}=0$$

于是有

$$x_1'=a_{11}x_1+a_{14}x_4 \qquad x_2'=x_2$$
$$x_2'=x_3 \qquad x_4'=a_{41}x_1+a_{44}x_4$$

间隔不变性要求

$$(a_{11}x_1+a_{14}x_4)^2+(a_{41}x_1+a_{44}x_4)^2=x_1^2+x_4^2$$

比较等式两边系数

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{41}^2 = 1 \\ a_{14}^2 + a_{44}^2 = 1 \\ a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44} = 0 \end{cases}$$

因为在 $x_1' = 0$ 的点应该是 $x_1 = vt$ 的点，即

$$0 = a_{11}vt + a_{14}\text{ict}$$

$$\Rightarrow \quad a_{14} = i\frac{v}{c}a_{11}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{14}x_4 = a_{11}(x_1 + i\frac{v}{c}x_4) \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \\ x_4' = a_{41}x_1 + a_{44}x_4 \end{cases}$$

a_{44}乘以第一式，$i\frac{v}{c}a_{11}$乘以第四式，两式相减得到

$$a_{44}x_1' - i\frac{v}{c}a_{11}x_4' = x_1(a_{11}a_{44} - i\frac{v}{c}a_{11}a_{41})$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{a_{44}x_1' - i\frac{v}{c}a_{11}x_4'}{a_{11}a_{44} - i\frac{v}{c}a_{11}a_{41}}$$

$$(\vec{v} \to -\vec{v})$$

$$x_1 = a_{11}(x_1' - i\frac{v}{c}x_4')$$

考虑空间各向同性，x_1的逆变换为

比较两式得到

$$\begin{cases} a_{11} = a_{44} \\ a_{11}a_{44} - i\frac{v}{c}a_{11}a_{41} = 1 \end{cases}$$

综合以上有各个系数间关系

$$0 = a_{11} vt + a_{14} \mathrm{ict}$$

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{41}^2 = 1 \\ a_{14}^2 + a_{44}^2 = 1 \\ a_{11} a_{14} + a_{41} a_{44} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{44} \\ a_{11} a_{44} - i \dfrac{v}{c} a_{11} a_{41} = 1 \end{cases}$$

由$a_{14}^2 + a_{44}^2 = 1$，$a_{11} = a_{44}$及$a_{14} = i\dfrac{v}{c} a_{11}$得到

$$\left(i\frac{v}{c} a_{11}\right)^2 + a_{11}^2 = 1$$

$$a_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = a_{44}$$

$$a_{14} = -a_{41} = i\frac{v}{c} a_{11}$$

即

$$a_{11}=a_{44}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad a_{14}=-a_{41}=\pm i\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

由于x轴和x’轴正向相同，变换系数a_{11}应取大于零；又由于时间t和t’的正向相同，a_{44}亦取大于零。因此

$$a_{11}=a_{44}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\qquad a_{14}=-a_{41}=i\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

于是，我们得到Σ和Σ’系之间的坐标变换关系为：

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x_2' = x_2$$

$$x_3' = x_3$$

$$x_4' = \frac{-i\frac{v}{c}x_1 + x^4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

相应的洛仑兹变换式为

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \end{cases}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

根据 $x'_u = a_{uv}x_v$，写成矩阵形式，即为：

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

如果把该式中的 v 改成 −v ，可得逆变换关系式：

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} & y = y' \\ z = z' & t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

矩阵的形式：$x_u = \tilde{a}_{uv}x'_v$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

Lorentz变换表明：

a） 空间和时间是统一的，时空的度量与物质运动密不可分。

b） 如果对Lorentz变换式中把c看成无穷大，即c→∞，则变换式立即成为：

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

所以说伽利略变换是洛仑兹变换在低速运动下的一个近似。

c） 以上所得到的洛仑兹变换式，是在一种特殊的运动条件下所构成的时空变换关系，即Σ’系相对于Σ系沿x正方向运动，而且x’与x平行，如果 Σ’系相对于 Σ系不是沿x正方向运动，那么以上洛仑兹变换式不能适用。