第五章　电磁波的辐射

一、电磁辐射

不稳定（时变）的电荷、电流激发的电磁场随时间变化。有一部分电磁场以波的形式脱离场源向外运动，这被称为电磁波的辐射。

本章主要研究给定高频交变电荷、电流分布所产生的电磁辐射，并简要讨论电磁场的动量。

二、引入矢势和标势求解电磁辐射问题

与静电场引入电势、静磁场引入矢势和磁标势相似，为了便于求解普适的场方程，在时变情况下仍然可以引入势的概念。但是由于时变电场的旋度不为零，这里引入的矢势、标势与静电场和静磁场情况有些差异。

三、辐射问题的本质也是边值问题

时变电荷、电流分布激发时变的电磁场，电磁场又反过来影响电荷、电流分布。空间电磁场的分布就是在这样一对相互制约的矛盾统一体下形成的。

变化的电荷、电流分布一般都分布在有限区域（具有边界），因此在求解时要考虑它们的边界条件和边值关系。但是一般情况下这种的边界很复杂，使得电荷、电流分布无法确定，因此使得求解问题无法进行。在本章我们仅讨论电荷、电流分布为已知的辐射问题。

本章主要内容

1、电磁场的矢势和标势的引入、规范不变性；

2、达朗伯方程及推迟势的物理意义；

3、矢势的展开和偶极辐射；

4、电磁场的动量守恒。

§5.1 电磁场的矢势和标势

一、电磁场的势描述

本节使用最普遍的电磁场方程引入矢势和标势，然后讨论电磁辐射问题（仅讨论均匀介质）。

（1）矢势的引入

由于 $\boxed{\nabla\cdot\vec{B}=0}$，与静电场相同，可以引入矢量势函数（矢势）$\vec{A}$，使得 $\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$

注意：① 与静电场不同，引入的矢势与时间相关；

② 意义与静电场情况相同，即：$\boxed{\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}$

（2）标势的引入

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

在变化电磁场情况，$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\neq 0$ ，不能象静电场那样直接引入标量势函数。

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\vec{A}=-\nabla\times\frac{\partial\overleftarrow{A}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

引入标量势函数φ

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \Rightarrow \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

二、规范变换和规范不变性

1．矢势和标势的不唯一性

同静电场相同，这里引入的矢势和标势也不唯一，但是矢势和标势在时变电磁场的情况下相互之间有一定的关系。

2．规范变换

- 规范：给定一组$(\vec{A},\ \varphi)$称为一种规范；
- 规范变换：不同规范之间满足的变换关系称为规范变换。
- 两种规范间变换关系：

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \qquad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}}$$

证明：由于$\vec{A}$和 $\vec{A}'$，φ 和 φ'不能改变电场和磁场强度，所以 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\nabla\psi = \nabla\times\vec{A}'$

$$\Rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\nabla(\varphi' + \frac{\partial\psi}{\partial t}) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$= -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

- 规范不变性：在规范变换下物理规律满足的动力学方程保持不变的性质（在微观世界是一条物理学基本原理）。
- 规范场：具有规范不变性的场称为规范场。

3．两种常用的规范

要使势函数减少任意性，必须给出 $\nabla\cdot\vec{A}$，它的值被称为规范的条件。$\nabla\cdot\vec{A}$ 值的选择是任意的，但若选择的好，可使电磁场的解简单，基本方程对称或物理意义明显。

- **库仑规范**　　规范条件：$\boxed{\nabla\cdot\vec{A}=0}$

在库仑规范下，$\vec{A}$为无源场（横场），$\nabla\varphi$ 为无旋场（纵场）。实际上电场E中的 $-\nabla\varphi$对应于库仑场，而 $-\partial\vec{A}/\partial t$ 部分对应于感应电场。

库仑规范下 ψ 满足的方程：$\boxed{\nabla^2\psi=0}$

证明：$\nabla\cdot\vec{A}'=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\nabla\psi=0 \Longrightarrow \boxed{\nabla^2\psi=0}$

● 洛仑兹规范　规范条件：$$\boxed{\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0}$$

后面将看到洛仑兹规范下，$\vec{A}$, φ 所满足的方程具有高度的对称性，这种对称性将满足相对论的协变性，有很重要的理论意义。

洛仑兹规范下 ψ 满足的方程：$$\boxed{\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0}$$

证明：$$\nabla\cdot\vec{A}'+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}=\nabla\cdot\vec{A}+\nabla\cdot\nabla\psi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=$$

$$(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t})+(\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2})=0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0}$$

三、达朗贝尔方程

1. 真空中的达朗贝尔方程

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

证明:将 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ $\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$代入麦克斯韦方程:

$$\nabla\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mu_0\vec{J},\quad \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

并利用: $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

得到达朗贝尔方程（详细证明过程由自己补齐）。

2. 库仑规范下的达朗贝尔方程

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\vec{J}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

可见φ满足泊松方程，与静电情况类似，即空间某处的φ在时刻t的值由电荷在时刻t的分布给出，不能直观的反映电磁相互作用传播是非超距的特性。

3. 洛仑兹规范下的达朗贝尔方程

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J} \qquad \nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- 反映了电磁场的波动性

洛仑兹规范下的达朗贝尔方程是两个波动方程，因此由它们求出的 $(\vec{A},\ \varphi)$ 及 $(\vec{E},\ \vec{B})$ 均为波动形式，反映了电磁场的波动性。

- 两个方程具有高度的对称性且相互独立

求出一个解，另一个解就迎任而解。在下一节我们将看到，洛仑兹条件下达朗贝尔方程的解直接反映出电磁相互作用需要时间。基于这些考虑，在研究辐射问题时，一般都是采用洛仑兹条件下的达朗贝尔方程。