

# 第五章 电磁波的辐射

## 一、电磁辐射

不稳定（时变）的电荷、电流激发的电磁场随时间变化。有一部分电磁场以波的形式脱离场源向外运动，这被称为**电磁波的辐射**。

本章主要研究**给定**高频交变电荷、电流分布所产生的电磁辐射，并简要讨论电磁场的动量。

## 二、引入矢势和标势求解电磁辐射问题

与静电场引入电势、静磁场引入矢势和磁标势相似，为了便于求解普适的场方程，在时变情况下仍然可以引入势的概念。但是由于时变电场的旋度不为零，这里引入的矢势、标势与静电场和静磁场情况有些差异。

### 三、辐射问题的本质也是边值问题

时变电荷、电流分布激发时变的电磁场，电磁场又反过来影响电荷、电流分布。空间电磁场的分布就是在这样一对相互制约的矛盾统一体下形成的。

变化的电荷、电流分布一般都分布在有限区域（具有边界），因此在求解时要考虑它们的边界条件和边值关系。但是一般情况下这种的边界很复杂，使得电荷、电流分布无法确定，因此使得求解问题无法进行。在本章我们仅讨论电荷、电流分布为已知的辐射问题。

## ■ 本章主要内容

- 1、电磁场的矢势和标势的引入、规范不变性；
- 2、达朗伯方程及推迟势的物理意义；
- 3、矢势的展开和偶极辐射；
- 4、电磁场的动量守恒。

# § 5.1 电磁场的矢势和标势

## 一、电磁场的势描述

本节使用最普遍的电磁场方程引入矢势和标势，然后讨论电磁辐射问题（仅讨论均匀介质）。

### (1) 矢势的引入

由于  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，与静电场相同，可以引入矢量势函数（矢势） $\vec{A}$ ，使得  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

注意：① 与静电场不同，引入的矢势与时间相关；

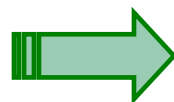
② 意义与静电场情况相同，即：
$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

## (2) 标势的引入

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

在变化电磁场情况， $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ ，不能象静电场那样直接引入标量势函数。

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{A} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

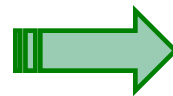


$$\nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

引入标量势函数  $\varphi$



$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$



$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

## 二、规范变换和规范不变性

### 1. 矢势和标势的不唯一性

同静电场相同，这里引入的矢势和标势也不唯一，但是矢势和标势在时变电磁场的情况下相互之间有一定的关系。

### 2. 规范变换

- 规范：给定一组  $(\vec{A}, \varphi)$  称为一种规范；
- 规范变换：不同规范之间满足的变换关系称为规范变换。

- 两种规范间变换关系：
$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

**证明：** 由于  $\vec{A}$  和  $\vec{A}'$ ， $\varphi$  和  $\varphi'$  不能改变电场和磁场强度，所以  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \vec{A}'$

$$\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla \left( \varphi' + \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{aligned}$$

- **规范不变性：** 在规范变换下物理规律满足的动力学方程保持不变的性质（在微观世界是一条物理学基本原理）。
- **规范场：** 具有规范不变性的场称为规范场。



### 3. 两种常用的规范

要使势函数减少任意性，必须给出  $\nabla \cdot \vec{A}$ ，它的值被称为规范的条件。 $\nabla \cdot \vec{A}$  值的选择是任意的，但若选择的好，可使电磁场的解简单，基本方程对称或物理意义明显。

● **库仑规范** 规范条件： $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

在库仑规范下， $\vec{A}$  为无源场（横场）， $\nabla \phi$  为无旋场（纵场）。实际上电场  $E$  中的  $-\nabla \phi$  对应于库仑场，而  $-\partial \vec{A} / \partial t$  部分对应于感应电场。

**库仑规范下  $\psi$  满足的方程：** $\nabla^2 \psi = 0$

**证明：**  $\nabla \cdot \vec{A}' = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \nabla \psi = 0 \longrightarrow \nabla^2 \psi = 0$

## ● 洛仑兹规范

规范条件:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

后面将看到洛仑兹规范下,  $\vec{A}$ ,  $\varphi$  所满足的方程具有高度的对称性, 这种对称性将满足相对论的协变性, 有很重要的理论意义。

洛仑兹规范下  $\psi$  满足的方程:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

**证明:** 
$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \nabla \psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} =$$

$$\left( \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \left( \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

### 三、达朗贝尔方程

#### 1. 真空中的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{J}$$
$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

证明: 将  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$   $\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  代入麦克斯韦方程:

$$\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

并利用:  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

得到达朗贝尔方程 (详细证明过程由自己补齐)。

## 2. 库仑规范下的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\mu_0 \vec{J}$$
$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

可见  $\varphi$  满足泊松方程，与静电情况类似，即空间某处的  $\varphi$  在时刻  $t$  的值由电荷在时刻  $t$  的分布给出，不能直观的反映电磁相互作用传播是非超距的特性。

## 3. 洛仑兹规范下的达朗贝尔方程

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- 反映了电磁场的波动性

洛仑兹规范下的达朗贝尔方程是两个波动方程，因此由它们求出的  $(\vec{A}, \varphi)$  及  $(\vec{E}, \vec{B})$  均为波动形式，反映了电磁场的波动性。

- 两个方程具有高度的对称性且相互独立

求出一个解，另一个解就迎刃而解。在下一节我们将看到，洛仑兹条件下达朗贝尔方程的解直接反映出电磁相互作用需要时间。基于这些考虑，在研究辐射问题时，一般都是采用洛仑兹条件下的达朗贝尔方程。