§5.2　推 迟 势

本节讨论空间存在电荷和电流分布情况下达朗贝尔方程的解。

一、标势和矢势的达朗伯方程的解

标势方程中 $\rho=\rho(\vec{x},t)$为已知。若 $\rho(\vec{x},t)$较复杂，直接得到一般解比较困难。本节先从一个点电荷出发，然后由迭加原理得到解。

1. 点电荷在空间激发的标势

设点电荷处于原点，$\rho(\vec{x},t)=Q(t)\delta(\vec{x})$，考虑对称性取球坐标且 $\varphi=\varphi(r,t)$与 θ, ϕ 无关。标势的达朗贝尔方程化为：

$$\boxed{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{Q(t)\delta(r)}{\varepsilon_0}} \quad *$$

当 $r\neq 0$ 时，
$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0}$$

令 $\boxed{\varphi(r,t)=\frac{u(r,t)}{r}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0}$

这个类似于一维波动方程的解可以表示为：$(r \neq 0)$

$$u(r,t) = f(t-\frac{r}{c}) + g(t+\frac{r}{c}) \Rightarrow \boxed{\varphi(r,t) = \frac{f(t-r/c)}{r} + \frac{g(t+r/c)}{r}}$$

$\boxed{\dfrac{f(t-r/c)}{r}}$ 代表向外传播的球面波

$\boxed{\dfrac{g(t+r/c)}{r}}$ 代表向内收敛的球面波

由于讨论辐射问题

$$g(t+\frac{r}{c}) = 0$$

与点电荷电势类比有：$\varphi(r,t) = \dfrac{Q(t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r}$

若点电荷不在原点而在空间 $\vec{x}'$ 点

$$\boxed{\varphi(\vec{x},t) = \frac{Q(\vec{x}',t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

可以证明上述解的形式满足 * 式

2. 连续电荷分布在空间产生的电势

$$\boxed{\varphi(\vec{x},t)=\int_V \frac{\rho(\vec{x}',t-{}^{r}\!/_{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'}$$

3. 矢势$\vec{A}$的解

由于 $\vec{A}$ 满足的方程形式上与φ满足的方程一样，类比得到$\vec{A}$的解：

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}',t-{}^{r}\!/_{c})}{r}dV'}$$

二、证明 φ 、$\vec{A}$ 满足洛仑兹条件 $\boxed{\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0}$

证：令 $t'=t-r/c=t'(t,\vec{x},\vec{x}')$ $\quad\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{x}',t')}{r}dV'$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int[\frac{1}{r}\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x}',t')+\vec{J}(\vec{x}',t')\nabla\frac{1}{r}]dV'$$

$$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x}',t')=\frac{\partial\vec{J}(\vec{x}',t')}{\partial t'}\cdot\nabla t'=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}(\vec{x}',t')}{\partial t'}\cdot\nabla r=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}(\vec{x}',t')}{\partial t'}\cdot\nabla' r$$

$$\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t')=\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t')\Big|_{t'=c}+\frac{\partial\vec{J}(\vec{x}',t')}{\partial t'}\cdot\nabla' t'$$

$$\nabla r=-\nabla' r$$

$$=\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t')\Big|_{t'=c}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{J}(\vec{x}',t')}{\partial t'}\cdot\nabla' r$$

$$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{x}',t')=\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t')\Big|_{t'=c}-\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{x}',t')$$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\int\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}'(\vec{x}',t')\Big|_{t=c}dV'-\int[\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}'(\vec{x},t)+\vec{J}(\vec{x}',t')\nabla'\frac{1}{r}]dV'\right\}$$

$$\|$$

$$\boxed{\int\nabla'\cdot\frac{\vec{J}'(\vec{x},t)}{r}dV'=\oint_S\frac{\vec{J}'(\vec{x},t)}{r}\cdot d\vec{S}=0}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{r}\nabla'\cdot\vec{J}'(\vec{x},t)\Big|_{t=c}dV'$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int_V\frac{1}{r}\frac{\partial\rho(\vec{x}',t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{1}{r}\frac{\partial\rho(\vec{x}',t')}{\partial t'}dV'$$

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\boxed{\frac{1}{r}[\nabla'\cdot\vec{J}'(\vec{x}',t')\Big|_{t=c}+\frac{\partial\rho(\vec{x}',t')}{\partial t'}]}dV'=0$$

$$\|$$

$$\mathbf{0}$$

电荷守恒定律

三、推迟势及其物理意义

1. 推迟势

势函数在空间 $\vec{x}$点，t时刻的值依赖于 $t-r/c$ 时刻的电荷、电流分布，即空间势的建立与场源相比推迟了r/c 。具有这样特性的势称为推迟势。

2. 电磁相互作用需要时间

空间点 $\vec{x}$ ，t 时刻的电磁场由 $t-r/c$ 时刻的电荷、电流分布决定。也就是说电荷、电流产生的物理作用在经历了时间 $t+r/c$ 后才到达观察点，即场的建立需要时间，而相互作用的传播速度在真空中为光速c。

洛仑兹规范下的达朗贝尔方程

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J} \qquad \nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi(\vec{x},t)=\int_V\frac{\rho(\vec{x}',t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r}dV'$$

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-r/c)}{r}dV'$$