第三节：矩形谐振腔

矩形谐振腔是由一段两端用导体封闭起来的矩形波导构成。

由于TE模和TM模都存在于矩形波导中，因此TE模和TM模也同样存在于矩形谐振腔内。由于二者在矩形波导中的场分布不同，所以在矩形谐振腔中的存在模式也不同。

一、场分布：

1、TE振荡模式：

在矩形波导z=0和z=c处放置两块导体板，则该谐振腔中的TE模可以看作是矩形波导中沿+z方向和-z方向传播的TE模的迭加 。

$$H_z = H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} + H_0^{'} \cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{j\beta z}$$

同时满足电磁场的边界条件

$$H_z(z=0) = H_z(z=c) = 0$$

$$H_z(z=0)=0 \Rightarrow \boxed{H_0' = -H_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_z = -j2H_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\beta z)}$$

$$H_z(z=c)=0 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{p\pi}{c} \qquad (p=1,2,3\cdots)}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_z = -j2H_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{p\pi}{c}z)}$$

TE模的X和Y场分量用H_z表示为

$$H_x = \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial Hz}{\partial z}) \quad H_y = \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial Hz}{\partial z}) \quad E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial Hz}{\partial y} \quad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial Hz}{\partial x}$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 = k_x^2 + k_y^2$$

矩形谐振腔TE振动模式的场分量为

$$E_x = \frac{2\omega\mu}{k_c^2}(\frac{n\pi}{b})H_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$E_y = -\frac{2\omega\mu}{k_c^2}(\frac{m\pi}{a})H_0\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = j\frac{2}{k_c^2}(\frac{m\pi}{a})(\frac{p\pi}{c})H_0\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\cos(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$H_y = j\frac{2}{k_c^2}(\frac{n\pi}{b})(\frac{p\pi}{c})H_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\cos(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$H_z = -j2H_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{p\pi}{c}z)$$

2、TM振荡模式：

同样将矩形谐振腔中的TM模看作矩形波导中沿+z方向和-z方向传播的TM模的迭加

$$E_z = E_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} + E_0' \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{j\beta z}$$

TM模的X和Y场分量用E_z表示为

$$E_x = \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial Ez}{\partial z}) \quad E_y = \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial Ez}{\partial z}) \quad H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial Ez}{\partial y} \quad E_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial Ez}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad E_x = j\frac{\beta}{k_c^2}(\frac{m\pi}{a})[-E_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-j\beta z} + E_0'\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{j\beta z}]$$

同时满足电磁场的边界条件

Ex（z=0）= Ex（z=c）= 0

利用在z=0的边界条件E_x（z=0）=0 得到

$$E_0 = E_0'$$

$$E_x = -\frac{2\beta}{k_c^2}(\frac{m\pi}{a})E_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin\beta z$$

利用在z=c的边界条件 E_x（z=c）=0 得到

$$\beta = \frac{p\pi}{c} \qquad (p = 0,1,2,3\cdots)$$

$$E_x = -\frac{2}{k_c^2}(\frac{m\pi}{a})(\frac{p\pi}{c})E_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$E_y = -\frac{2}{k_c^2}(\frac{n\pi}{b})(\frac{p\pi}{c})E_0\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$E_z = 2E_0\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\cos(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$H_x = j\frac{2\omega\varepsilon}{k_c^2}(\frac{n\pi}{b})E_0\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)\cos(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$H_y = -j\frac{2\omega\varepsilon}{k_c^2}(\frac{m\pi}{a})E_0\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\cos(\frac{p\pi}{c}z)$$

$$H_z = 0$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2$$

通过上面的讨论可以得出：

1、矩形谐振腔中可能存在无穷多个振荡模式，TE_{mnp}模式和 TM_{mnp}模式；

2、下标m、n、p为整数，分别表示电场和磁场沿x、y、z方向变化的半驻波数目；

3、对TE振荡模式，p≠0，否则导致整个腔内场解为零，m和n可以为零，但是不能同时为零；

4、对TM振荡模式，p可以为零，此时虽然Ex和Ey为零，但是Ez不为零。同时m和n不能为零；

5、以上矩形谐振腔的TE模和TM模是针对z轴来区分的，因此同一场分布若选择不同的参考轴，其模式可能不同。例如TE101模，若选择y轴方向为参考轴，则为TM_{110}模。

二、谐振频率f：

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 \qquad k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \qquad \beta = \frac{p\pi}{c}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{p\pi}{c})^2}$$

谐振频率为

$$\boxed{f_{mnp} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{p\pi}{c})^2} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2 + (\frac{p}{c})^2}}$$

谐振波长为

$$\boxed{\lambda_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2 + (\frac{p}{c})^2}}}$$

矩形谐振腔的谐振波长不仅与腔体的尺寸a、b、c有关，而且与振荡模式的m、n、p有关。当空腔尺寸一定时，存在无穷多个振荡频率，具有相同的谐振频率的不同振荡模式叫做简并模。对于给定的腔体尺寸，谐振频率最低的模式称为主模。

三、品质因数Q：

品质因数Q是微波谐振器另一个重要参数，它描述了谐振器选择性的优劣和能量损耗的程度，其定义为：在谐振频率时谐振器的储能与一周期内谐振器中损耗能量之比的2π倍，即

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_T} = 2\pi \frac{W}{P_l T} = \omega \frac{W}{P_l}$$

其中：W为谐振器的储能；W_T为一周期内谐振器中损耗的能量；P_l为损耗功率；ω为谐振的角频率。

谐振腔中的储能等于电场能量与磁场能量之和

$$W = \frac{1}{2}\mu\int_V |\vec{H}|^2\, dV + \frac{1}{2}\varepsilon\int_V |\vec{E}|^2\, dV$$

对于损耗的能量，一般包括导体损耗、介质损耗和辐射损耗。对于腔体闭合的谐振腔，辐射损耗不存在；设介质是无损耗的，则谐振腔的损耗仅仅为腔壁的热损耗

$$P_l = \frac{1}{2}\oint_S |\overrightarrow{J_S}|^2 R_S dS = \frac{1}{2}R_S\oint_S |\overrightarrow{H_t}|^2 dS$$

其中：S为空腔内表面的面积；R_s为腔壁表面电阻率；J_s为表面电流；H_t是表面切向磁场

例题：矩形谐振腔中的主模的计算：

有一填充空气的矩形谐振腔，当腔体尺寸为：

（1）a>b>c;　　(2)a>c>b;　　(3)a=b=c 时

求相应的主模和谐振频率。

解： 选择Z轴作为参考的传播方向。

首先，对于TM模式， m、n均不能为零，而p可以为零；

其次，对于TE模式，m、n均可以为零，但p不能为零，

因此可能的主模模式为TM110，TE101，TE011。

1、当a>b>c时， 最低频率为 $f_{110}=\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$

v是自由空间中的波速，故主模是TM110

2、当a>c>b时， 最低频率为 $f_{101}=\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}}$　　主模是**TE101**。

3、当a=b=c时， 最低频率为 $f_{110}=f_{101}=f_{011}=\frac{v}{\sqrt{2}a}$

此时TM110，TE101，TE011的谐振频率相同，简并主模。

已知矩形谐振腔的尺寸为 $a\times b\times c$，求谐振腔内TE101模的Q值。

解：TE101模的非零场分量为

$$H_x = j\frac{2a}{c}H_0\sin(\frac{\pi}{a}x)\cos(\frac{\pi}{c}z) \qquad H_z = -j2H_0\cos(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{c}z)$$

$$E_y = -\frac{2a\omega\mu}{\pi}H_0\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\frac{\pi}{c}z)$$

电场储能的能量密度为 $\omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon\vec{E}\bullet\vec{E}$

时间平均值为 $<\omega_e>=\frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}\bullet\vec{E}^*]=\frac{1}{4}\varepsilon|\vec{E}|^2$

总电场储能为 $W_e = \frac{\varepsilon}{4}\int_V|\vec{E}|^2dV = \frac{\varepsilon}{4}\int_V|E_y|^2dV = \varepsilon\mu^2f^2H_0^2a^3bc$

同理总磁场储能为 $W_e = \frac{\mu}{4}\int_V(|H_x|^2+|H_z|^2)dV = \frac{1}{4}\mu H_0^2(\frac{a^3b}{c}+abc)$

可以验证二者相等，所以总储能为

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2}\mu H_0^2 abc(\frac{a^2}{c^2}+1)$$

单位面积损耗的功率： $p = \vec{J}_S \bullet \vec{J}_S R_S = \vec{H}_t \bullet \vec{H}_t R_S$

时间平均值 $< p > = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{J}_S \bullet \vec{J}_S^{\,*} R_S] = \frac{1}{2}|\vec{J}_S|^2 R_S = \frac{1}{2}|\vec{H}_t|^2 R_S$

总的消耗功率

$$
\begin{aligned}
P &= \oint_S < p > dS \\
&= R_S\{\int_0^b\int_0^a |H_x|^2 dxdy + \int_0^c\int_0^b |H_z|^2 dydz + \int_0^c\int_0^a (|H_x|^2 + |H_z|^2)dxdz\} \\
&= H_0^2 R_S[2bc(\frac{a^3}{c^3}+1) + ac(\frac{a^2}{c^2}+1)] \\
&= \frac{H_0^2 R_S}{c^2}[2b(a^3+c^3) + ac(a^2+c^2)]
\end{aligned}
$$

品质因数

$$
Q = \omega\frac{W}{P} = \frac{\omega\mu abc(a^2+c^2)}{2R_s[2b(a^3+c^3)+ac(a^2+c^2)]}
$$

若a=b=c,则有

$$Q = \frac{\omega\mu a}{6R_s} = \frac{a}{3\delta} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\frac{\lambda_0}{\delta}$$

其中 δ 为趋附深度， λ_0为谐振波长。