

第三节：矩形谐振腔

矩形谐振腔是由一段两端用导体封闭起来的矩形波导构成。

由于TE模和TM模都存在于矩形波导中，因此TE模和TM模也同样存在于矩形谐振腔内。由于二者在矩形波导中的场分布不同，所以在矩形谐振腔中的存在模式也不同。

一、场分布：

1、TE振荡模式：

在矩形波导 $z=0$ 和 $z=c$ 处放置两块导体板，则该谐振腔中的TE模可以看作是矩形波导中沿 $+z$ 方向和 $-z$ 方向传播的TE模的迭加。

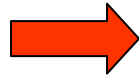
$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} + H'_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j\beta z}$$

同时满足电磁场的边界条件

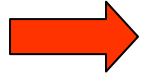
$$H_z(z=0) = H_z(z=c) = 0$$



$$H_z(z=0) = 0$$

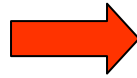


$$H'_0 = -H_0$$

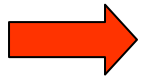


$$H_z = -j2H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin(\beta z)$$

$$H_z(z=c) = 0$$



$$\beta = \frac{p\pi}{c} \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$



$$H_z = -j2H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right)$$

TE模的X和Y场分量用 H_z 表示为

$$H_x = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \quad H_y = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \quad E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2$$



矩形谐振腔TE振动模式的场分量为

$$E_x = \frac{2\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$E_y = -\frac{2\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = j \frac{2}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \left(\frac{p\pi}{c}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$H_y = j \frac{2}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \left(\frac{p\pi}{c}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$H_z = -j2H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$



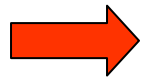
2、TM振荡模式：

同样将矩形谐振腔中的TM模看作矩形波导中沿+z方向和-z方向传播的TM模的迭加

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} + E'_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j\beta z}$$

TM模的X和Y场分量用 E_z 表示为

$$E_x = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \quad E_y = \frac{1}{k_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \quad H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$



$$E_x = j \frac{\beta}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left[-E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} + E'_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j\beta z} \right]$$

同时满足电磁场的边界条件

$$E_x(z=0) = E_x(z=c) = 0$$

利用在 $z=0$ 的边界条件 $E_x(z=0) = 0$ 得到

$$E_0 = E_0'$$



$$E_x = -\frac{2\beta}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin \beta z$$

利用在 $z=c$ 的边界条件 $E_x(z=c) = 0$ 得到

$$\beta = \frac{p\pi}{c} \quad (p = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

$$E_x = -\frac{2}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \left(\frac{p\pi}{c}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$E_y = -\frac{2}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \left(\frac{p\pi}{c}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$E_z = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$H_x = j \frac{2\omega\varepsilon}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$H_y = -j \frac{2\omega\varepsilon}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{c} z\right)$$

$$H_z = 0$$

$$\begin{aligned} k_c^2 &= k^2 - \beta^2 \\ &= \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \end{aligned}$$



通过上面的讨论可以得出：

- 1、矩形谐振腔中可能存在无穷多个振荡模式， TE_{mnp} 模式和 TM_{mnp} 模式；
- 2、下标 m 、 n 、 p 为整数，分别表示电场和磁场沿 x 、 y 、 z 方向变化的半驻波数目；
- 3、对TE振荡模式， $p \neq 0$ ，否则导致整个腔内场解为零， m 和 n 可以为零，但是不能同时为零；
- 4、对TM振荡模式， p 可以为零，此时虽然 E_x 和 E_y 为零，但是 E_z 不为零。同时 m 和 n 不能为零；
- 5、以上矩形谐振腔的TE模和TM模是针对 z 轴来区分的，因此同一场分布若选择不同的参考轴，其模式可能不同。
例如TE₁₀₁模，若选择 y 轴方向为参考轴，则为TM₁₁₀模。



二、谐振频率f:

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad \beta = \frac{p\pi}{c}$$

➔
$$\omega = \omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2}$$

谐振频率为

$$f_{mnp} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}$$

谐振波长为

$$\lambda_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}$$

矩形谐振腔的谐振波长不仅与腔体的尺寸a、b、c有关，而且与振荡模式的m、n、p有关。当空腔尺寸一定时，存在无穷多个振荡频率，具有相同的谐振频率的不同振荡模式叫做**简并模**。对于给定的腔体尺寸，谐振频率最低的模式称为**主模**。

三、品质因数Q:

品质因数Q是微波谐振器另一个重要参数，它描述了谐振器**选择性的**优劣和能量损耗的程度，其定义为：在谐振频率时谐振器的储能与一周期内谐振器中损耗能量之比的 2π 倍，即

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_T} = 2\pi \frac{W}{P_l T} = \omega \frac{W}{P_l}$$

其中：W为谐振器的储能； W_T 为一周期内谐振器中损耗的能量； P_l 为损耗功率； ω 为谐振的角频率。

谐振腔中的储能等于电场能量与磁场能量之和

$$W = \frac{1}{2} \mu \int_V |\vec{H}|^2 dV + \frac{1}{2} \varepsilon \int_V |\vec{E}|^2 dV$$

对于损耗的能量，一般包括导体损耗、介质损耗和辐射损耗。
对于腔体闭合的谐振腔，辐射损耗不存在；设介质是无损耗的，
则谐振腔的损耗仅仅为腔壁的热损耗

$$P_l = \frac{1}{2} \oint_S |\vec{J}_s|^2 R_s dS = \frac{1}{2} R_s \oint_S |\vec{H}_t|^2 dS$$

其中：S为空腔内表面的面积； R_s 为腔壁表面电阻率；
 J_s 为表面电流； H_t 是表面切向磁场

例题：矩形谐振腔中的主模的计算：

有一填充空气的矩形谐振腔，当腔体尺寸为：

(1) $a > b > c$ ； (2) $a > c > b$ ； (3) $a = b = c$ 时
求相应的主模和谐振频率。

解：选择Z轴作为参考的传播方向。

首先，对于TM模式， m 、 n 均不能为零，而 p 可以为零；
其次，对于TE模式， m 、 n 均可以为零，但 p 不能为零，
因此可能的主模模式为TM110，TE101，TE011。

1、当 $a > b > c$ 时，最低频率为 $f_{110} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$

v 是自由空间中的波速，故主模是TM110

2、当 $a > c > b$ 时，最低频率为 $f_{101} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}}$ 主模是TE101。

3、当 $a = b = c$ 时，最低频率为 $f_{110} = f_{101} = f_{011} = \frac{v}{\sqrt{2}a}$

此时TM110，TE101，TE011的谐振频率相同，简并主模。

已知矩形谐振腔的尺寸为 $a \times b \times c$ ，求谐振腔内TE101模的Q值。

解：TE101模的非零场分量为

$$H_x = j \frac{2a}{c} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{c} z\right) \quad H_z = -j2H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{c} z\right)$$

$$E_y = -\frac{2a\omega\mu}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{c} z\right)$$

电场储能能量密度为 $\omega_e = \frac{1}{2} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}$

时间平均值为 $\langle \omega_e \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \cdot \vec{E}^*] = \frac{1}{4} \varepsilon |\vec{E}|^2$

总电场储能为

$$W_e = \frac{\varepsilon}{4} \int_V |\vec{E}|^2 dV = \frac{\varepsilon}{4} \int_V |E_y|^2 dV = \varepsilon \mu^2 f^2 H_0^2 a^3 bc$$

同理总磁场储能为

$$W_m = \frac{\mu}{4} \int_V (|H_x|^2 + |H_z|^2) dV = \frac{1}{4} \mu H_0^2 \left(\frac{a^3 b}{c} + abc\right)$$

可以验证二者相等，所以总储能为

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2} \mu H_0^2 abc \left(\frac{a^2}{c^2} + 1\right)$$



单位面积损耗的功率:

$$p = \vec{J}_s \bullet \vec{J}_s R_s = \vec{H}_t \bullet \vec{H}_t R_s$$

时间平均值

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{J}_s \bullet \vec{J}_s^* R_s] = \frac{1}{2} |\vec{J}_s|^2 R_s = \frac{1}{2} |\vec{H}_t|^2 R_s$$

总的消耗功率

$$\begin{aligned} P &= \oint_S \langle p \rangle dS \\ &= R_s \left\{ \int_0^b \int_0^a |H_x|^2 dx dy + \int_0^c \int_0^b |H_z|^2 dy dz + \int_0^c \int_0^a (|H_x|^2 + |H_z|^2) dx dz \right\} \\ &= H_0^2 R_s \left[2bc \left(\frac{a^3}{c^3} + 1 \right) + ac \left(\frac{a^2}{c^2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{H_0^2 R_s}{c^2} [2b(a^3 + c^3) + ac(a^2 + c^2)] \end{aligned}$$

品质因数

$$Q = \omega \frac{W}{P} = \frac{\omega \mu abc (a^2 + c^2)}{2R_s [2b(a^3 + c^3) + ac(a^2 + c^2)]}$$



若 $a=b=c$,则有

$$Q = \frac{\omega\mu a}{6R_s} = \frac{a}{3\delta} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{\lambda_0}{\delta}$$

其中 δ 为趋附深度， λ_0 为谐振波长。