4-4 沿均匀导波系统的波的一般特性

一、方程及波的分类

为了讨论方便、突出重点而不失一般性，特做以下假设：

（1）波导的横截面沿z方向是均匀的；

（2）导体是理想导体，即 σ =∞；

（3）媒质为完纯介质，即 σ =0，且各向同性；

（4）所讨论的区域内没有源分布，即 ρ =0，J=0；

（5）场随时间作简谐变化。

对于沿z轴方向放置的任意横截面形状的波导：

1、由假设（1）和假设（5），波导内的场矢量可表示为

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)e^{-\gamma z} \qquad \vec{H}(x,y,z)=\vec{H}(x,y)e^{-\gamma z}$$

其中 γ 为传播常数。

2、由假设条件（4），区域内没有源分布，根据亥姆霍兹方程，波导内电磁场分别满足

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0 \qquad \nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0$$

其中k是波数，满足 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ ，由于电场和磁场都是矢量因此上面的两个方程可以化作6个标量方程。

在直角坐标系中

$$\vec{E}=\vec{e}_xE_x+\vec{e}_yE_y+\vec{e}_zE_z \qquad \vec{H}=\vec{e}_xH_x+\vec{e}_yH_y+\vec{e}_zH_z$$

$$\nabla^2E_x+k^2E_x=0 \qquad \nabla^2E_y+k^2E_y=0 \qquad \nabla^2E_z+k^2E_z=0$$

$$\nabla^2H_x+k^2H_x=0 \qquad \nabla^2H_y+k^2H_y=0 \qquad \nabla^2H_z+k^2H_z=0$$

由于6个分量不是完全独立的，因此没必要求解6个方程，可以通过利用麦氏方程找出6个分量之间的关系，从而简化整个求解过程。

如何简化？

由 $\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$ 得

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}+\gamma E_y=-j\omega\mu H_x \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x}+\gamma E_x=j\omega\mu H_y \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-j\omega\mu H_z$$

由 $\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}$ 得

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}+\gamma H_y=j\omega\varepsilon E_x \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x}+\gamma H_x=-j\omega\varepsilon E_y \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon E_z$$

将这些方程做适当的运算即可得到横向场分量和纵向分量间关系

$$H_x=\frac{1}{\gamma^2+k^2}\left(j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}-\gamma\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \qquad H_y=-\frac{1}{\gamma^2+k^2}\left(j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}+\gamma\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

$$E_x=-\frac{1}{\gamma^2+k^2}\left(j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}+\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \qquad E_y=\frac{1}{\gamma^2+k^2}\left(j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)$$

由此可看出：

（1） 只需要由标量亥姆霍兹方程求出纵向场分量，那么其他场分量都可以由麦氏方程求出 ；

（2）在利用标量亥姆霍兹方程求纵向场分量的同时，也可以求出传播常数γ，从而可对波导中电磁场的传播特性进讨论；

（3）根据纵向场的存在情况，波导中传播的电磁波分为三种类型：横电磁波（TEM波），横电波（TE波或M波）和横磁波（TM波或E波）。

TEM波： 既无纵向电场分量也无纵向磁场分量；
TE波： 无纵向电场分量电磁波；
TM波： 无纵向磁场分量的电磁波。

下面分别介绍：

二、TEM波：

在波导中的TEM波，由于 $E_z=H_z=0$，除非 $k^2+\gamma^2=0$，否则只有零解。因此在波导中存在TEM波的前提条件是：

$$\boxed{k^2+\gamma^2=0} \qquad \boxed{\gamma=jk=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

就是说，TEM波的传播常数为 $\gamma_{TEM}=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，这与无界空间无损耗媒质中均匀平面波的传播常数的表达式完全相同。因此有

（1）TEM波的相速度为

$$\boxed{v_{p(TEM)}=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

该相速度与频率无关，说明在波导中传播的TEM波无色散。

（2）TEM波的波阻抗为

$$\boxed{Z_{TEM}=\frac{E_x}{H_y}=\frac{j\omega\mu}{\gamma_{TEM}}=\frac{\gamma_{TEM}}{j\omega\varepsilon}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\eta}$$

即波导中TEM波的波阻抗等于介质的本征阻抗。

（3）同时也可以发现

$$\frac{E_y}{H_x} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma_{TEM}} = -\frac{\gamma_{TEM}}{j\omega\varepsilon} = -Z_{TEM}$$

这也就表明：波导中沿z轴方向传播的TEM波的电场和磁场的关系为

$$\vec{H} = \frac{1}{Z_{TEM}}\vec{e_z} \times \vec{E}$$

最后证明：单导体波导不能支承TEM波 。

由于TEM波的磁场纵向分量Hz=0，因此其磁力线一定在横截面内闭合，而根据安培环路定理，这要求波导内存在纵向的电流---传导电流或位移电流。而单导体波导内没有任何导体，因此不存在传导电流。又因为TEM波的电场分量Ez=0，因此也不存在纵向的位移电流。这也就是说单导体波导不能传播TEM波。

三、TM波（E波）：

横磁波（TM波）在传播方向上不存在磁场分量，即Hz=0。

其特点是：$k^2+\gamma^2 \neq 0$

为此令 $\boxed{k_c^2 = k^2+\gamma^2}$ （截止波数）

对于TM波，只要知道了电场分量的纵向分量Ez，其余的场分量都可以求出来，如何求Ez ？ Ez满足方程

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$$

$$E_z(x,y,z) = E_z(x,y)e^{-\gamma z} \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}\right)E_z + k_c^2 E_z = \nabla_{\mathrm{t}}^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \qquad (\mathrm{k}_{\mathrm{c}}^2 = \gamma^2 + k^2)$$

这是一个二阶偏微分方程，从中可解出Ez。对于该方程，只有在kc取某些特定的离散数值时才有解，使解存在的kc值称为特征值或本征值。针对不同截面形状及尺寸的波导，这些本征值是不同的，后面我们在讨论具体形状的波导时将用分离变量法求出它们的可能取值.

由微分方程求出Ez后，考虑到Hz=0可以写出其他分量

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \qquad H_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

TM波在波导中的传播特性

传播常数 $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$

只有当它是虚数时波才能在波导中传播, 分界点是 γ =0, 对应于此的频率称之为截止频率或临界频率 , 相应的波长为截止波长

$$k_c^2 = \omega_c\mu\varepsilon \qquad f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad \lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{2\pi}{k_c}$$

(1) f>fc, 工作频率高于截止频率时， γ 是一虚数, 可以传播

（2） f<fc, 工作频率低于截止频率时， γ 为实数，不能传播

在波导中只能传播电磁波高于某一截止频率的电磁波，因此波导具有高通的性质

四、TE波（M波）：

横电波（TE波）在传播方向上不存在电场分量，即Ez=0。
对于TE波，只需要求出Hz，其余场分量即可求出，而Hz满足

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0 \qquad H_z(x,y,z) = H_z(x,y)e^{-\gamma z} \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H_z + k_c^2 H_z = \nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \qquad (k_c^2 = \gamma^2 + k^2)$$

利用H_z满足的边界条件，即可求得满足边界条件的特定本征值k_c及与其对应的本征解H_z。其他场分量为

$$H_x = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad H_y = -\frac{\gamma}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \qquad E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

传播常数 $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$

传播性质与TM波完全相同，具有高通的性质。

总结如下：

（1）一般导波系统可以传播三种波型：TEM，TE和TM波。

但是单导体波导不能支承TEM波。

（2）TEM波不呈现截止性质，其传播特性参数完全与相同媒质在无界空间中传播的均匀平面波的传播特性相同。

（3）TM波和TE波呈现截止性质。

当f>fc时，波导中可以传播相应的TM波TE波模式，但是其传播特性参数与无界空间中均匀平面波的传播特性参数不同。

而当f<fc时，波导中不能传播相应的TM和TE波模式。