第四章
衍射光栅

Chap.4 Diffraction Grating

李玲

深圳大学电子科学与技术学院

第四章 衍射光栅

- 掌握平面衍射光栅的实验装置、强度分布特征及光栅方程
- 理解谱线的缺级、光栅光谱
- 了解闪耀光栅

主要内容: 1.平面透射光栅

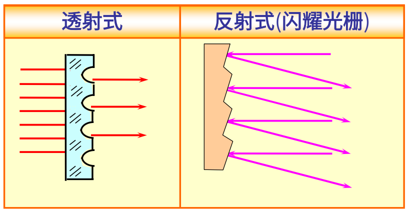
2. 光强公式

3. 多缝衍射光强的讨论

4. 光栅的三个参量

5. 闪耀光栅

广义地说，具有周期性空间结构或光学性能（透射率，反射率和折射率等）的衍射屏，统称为光栅.



种类：

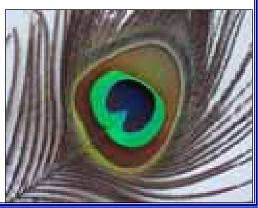
透射光栅， 反射光栅

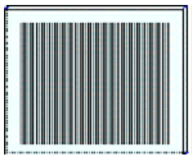
平面光栅， 凹面光栅

黑白光栅， 正弦光栅

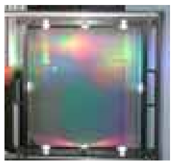
一维光栅， 二维光栅， 三维光栅

光栅的主要用途是作分光元件，此外，也可作长度测量和角度测量.





机制光栅:玻璃片上刻划出一系列平行等距的划痕



全息光栅:激光产生的干涉条纹在干板上曝光，经显影定影制成全息光栅

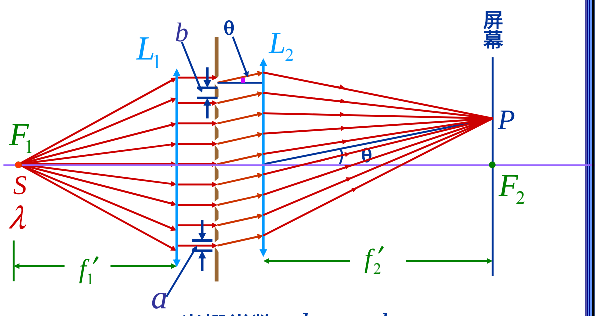
衍射光谱：各种波长的单色光经衍射光栅形成的一组谱线。

白光的衍射光谱：由连续组谱线构成。

注意：红在外，紫在内。并且每级分的开，所以比三棱镜产生的光谱清晰得多。

1.平面透射光栅（振幅型，黑白光栅）

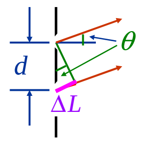
结构和现象



光栅常数 $d=a+b$

2. 光强公式

光栅有N条狭缝,缝宽为a,光栅常数为d.



$\Delta L = d\sin\theta$

由于透镜L_2的作用，来自不同的狭缝的θ方向衍射光会聚在屏幕上同一点，形成多光束干涉.

在夫琅和费远场条件下，各缝在P点产生的振动，振幅相同，相位不同.相邻两缝在θ方向上的光程差为

$$\Delta L = d\sin\theta,$$

相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta.$$

设最上面的狭缝在P点的光振动相位为零,则各点P点产生的复振幅分别为

$$\tilde{U}_1 = A_\theta\, \mathrm{e}^{i0},$$

$$\tilde{U}_2 = A_\theta e^{i\delta},$$

$$\tilde{U}_n = A_\theta e^{i(n-1)\delta},$$

$$\tilde{U}_N = A_\theta e^{i(N-1)\delta}.$$

$$A_\theta = A_0 \frac{\sin u}{u}, u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

于是P点的复振幅为:

$$\tilde{U}_P = \sum_{n=0}^{n=N-1} A_\theta e^{in\delta}$$

$$= A_\theta \frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}}.$$

$$= A_\theta \frac{e^{-iN\delta/2} - e^{iN\delta/2}}{e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2}} e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}}$$

$$= A_\theta \cdot \frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}}$$

上式的推导中,应用了等比数列前N项和公式

$$S_N = \frac{a_1(1-r^N)}{1-r}$$

式中 $a_1 = 1,\quad r = e^{i\delta}$

以及欧拉公式

$$e^{i\beta} - e^{-i\beta} = 2i\sin\beta.$$

所以

$$\tilde{U}_P = A_\theta \cdot \frac{\sin N\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}} e^{i(N-1)\delta}.$$

$$I = \tilde{U}_P \cdot \tilde{U}_P^* = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \frac{\sin^2 N\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

$$\boxed{I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 N\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}{\sin^2\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}.}$$

或 $\boxed{I = I_0 \dfrac{\sin^2 u}{u^2} \cdot \dfrac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}.}$

式中 $u = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$, 单缝边缘光束在θ衍射方向上位相差之半.

$v = \dfrac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$, 相邻单缝在θ衍射方向上位相差之半.

光强公式中 $\dfrac{\sin^2 u}{u^2}$ 称为衍射因子,

$\dfrac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$ 称为干涉因子.

3. 多缝衍射光强的讨论

(1)干涉因子 $\dfrac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v}$

(a)干涉主极大:

$v = j\pi$, $(j = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

即 $\boxed{d\sin\theta = j\lambda}$ 时, (光栅方程)

$$\lim_{v \to j\pi} \frac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v} = N^2.$$

在满足 dsinθ = jλ 的衍射方向上,

光强为 $I = N^2 I_0 \dfrac{\sin^2 u}{u^2}$.

在屏幕的中心$\theta = 0$, $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin^2 u}{u^2} = 1$,

光强取得极大值: $\boxed{I = N^2 I_0.}$

(b) 干涉极小

当 $\sin Nv = 0$ 时, $\dfrac{\sin^2 Nv}{\sin^2 v} = 0$,

可以得极小光强 $I = 0$.

因此极小的位置满足

$$v = (j + \frac{j''}{N})\pi. \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots) \quad (j'' = 1, 2, 3 \cdots, N-1.)$$

即 $d\sin\theta = (j + \dfrac{j''}{N}) \cdot \lambda$ 时,

干涉因子为零，合成强度为零.

(c) 干涉次极大

两个极小之间有一个次极大,在两个干涉主极大之间 有(N-2)个次极大

(2) 衍射因子 $\dfrac{\sin^2 u}{u^2}$

衍射极小:

当$a\sin\theta = j'\lambda$ 时, $(j' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$

衍射因子为零.光强亦为零,即使该方向为干涉极大, 光强仍为零.

若在某衍射方向是 j'级衍射极小,又是j 级干涉主极大,则有

$$\begin{cases} a\sin\theta = j'\lambda, \\ d\sin\theta = j\lambda. \end{cases}$$

由上面两方程, 得

$$j = \frac{d}{a} j'.$$

第j级干涉主极大被 j′级衍射极小调制掉

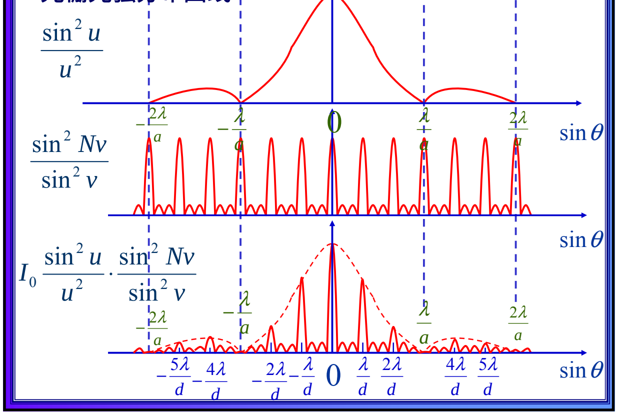
我们称这种现象叫作**缺级**.

例如 $\frac{d}{a} = 3$, 则 $j = \pm 3, \ \pm 6 \cdots$ 等级次

被调制掉, 不出现.

光栅光强是多光束干涉被单缝衍射调制的结果

光栅光强分布曲线



4. 光栅的三个参量

1). 角色散 D

2). 自由光谱范围

3). 色分辨本领 R

1). 角色散 D

用来表征某一级次的谱线单位波长间隔在空间散开的程度.

定义式: $\boxed{D = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda}.}$

由光栅方程 $d \sin\theta = j\lambda,$

两边微分 $d \cos\theta \cdot \delta\theta = j\delta\lambda,$

$\boxed{D = \frac{j}{d \cos\theta}.}$ D 与N无关.与光栅常数d有关, d越小角色散越大.

2). 自由光谱范围

自由光谱范围：

各色光干涉极大不发生级次交叠的最大波长范围

$$\begin{cases} d \sin\theta = (j+1)\lambda, \\ d \sin\theta = (\lambda + \Delta\lambda) j. \end{cases}$$

由上两式解得

$$\lambda(j+1) = (\lambda + \Delta\lambda) j,$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{d \sin\theta}.}$$

3). 色分辨本领

* 每一谱线本身的宽度

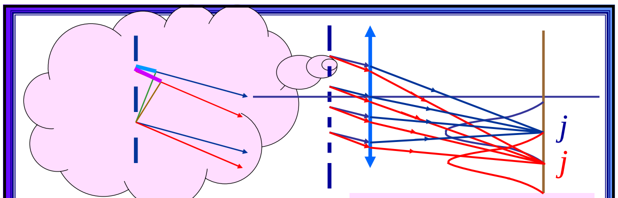
相邻两谱线同一级强度恰能分辨的泰勒 (Taylor) 判据

$$\delta\theta = \Delta\theta_{半}$$

即刚能分辨时，两亮纹中心的角距离恰等于每一亮纹的半角宽度

由光栅方程,在θ的衍射方向上满足 $\begin{cases} d \sin\theta = j\lambda, \\ d \sin\theta = (j - \frac{1}{N})(\lambda + \delta\lambda \ . \end{cases}$

定义：色分辨本领: $\boxed{R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}}$



$$j\lambda = (j - \frac{1}{N})(\lambda + \Delta\lambda)$$

$\Delta_j = j\lambda$

$\Delta_j = j(\lambda+\Delta\lambda_{辨})$

$$j\Delta\lambda = \frac{\lambda+\Delta\lambda}{N}, \qquad \frac{\lambda+\Delta\lambda}{\Delta\lambda} = jN.$$

得分辨本领公式 $\boxed{R = jN.}$

例题

设计一光栅，当用白光垂直照射时，能在30^0的衍射方向上观察到 600 nm 的第二级干涉主极大, 并在该处分辨相距 δλ=0.005nm 的两谱线，可在30^0 衍射方向上看不到 400nm 的第三级干涉主极大.

解: 在30^0方向上看到600nm 的第二级 主极大,

由光栅方程 $d\sin\theta = j\lambda,$

将 $j=2,\ \lambda = 600nm$ 代入得

$$d = 2400nm,$$

要求在该处可分辨600和600.005nm 的两谱线, 即要求分辨本领

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{600}{0.005} = 1.2\times10^5.$$

因 $R = jN,$

所以 $N = 6\times10^4.$

即所设计的光栅至少有6×10^4 条狭缝, 光栅宽为 w =Nd=14.4cm .

现在来确定 a 和 b .

因 $2\times600 = 3\times400,$

所以, 600nm的第2级与400nm的第三级干涉极大在一个衍射方向上. 要使400 nm的极大不出现, 必须把的3级干涉极大调制掉.因此取 d/a=3/j', 即

$$\frac{a+b}{a} = \frac{3}{j'}, (j'=1,2),\ a+b=d,$$

解得: $a_1 = 800nm,\ b_1 = 1600nm.$

$a_2 = 1600nm,\ b_2 = 800nm$

光栅设计完毕.

5. 闪耀光栅

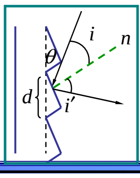
普通光栅大部分能量集中于零级—无色散

原因 单缝衍射的零级主极大方向
= 缝间干涉的零级主极大方向

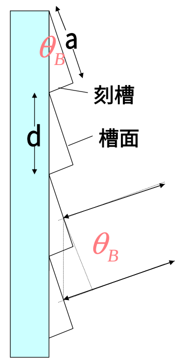
结果 分光作用的光谱仪能量利用小

目的 使二主极大方向分开——将大部分能量(衍射零级)集中到1级极大位置

闪耀光栅：通过刻槽的形状实现



可供选择的照明方式一：

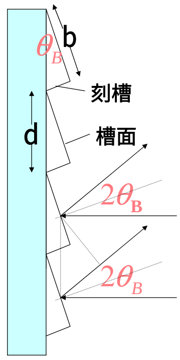


闪耀光栅方程

$$2d\sin\theta_B = j\lambda,$$

j=1 时的波长λ_{1B}为1级闪耀波长，夹角θ_B为闪耀角。

可供选择的照明方式二：



光栅方程：

$$d\sin(2\theta_B) = j\lambda$$

❖Homework 4.1

Page 30 3,5