

文章编号: 1000-4750(2015)07-0176-08

一种考虑尺寸效应的颗粒材料流变模型及其验证

夏明铤, 徐远杰, 楚锡华

(武汉大学土木建筑工程学院, 湖北, 武汉 430072)

摘 要: 经典连续介质理论的粘塑性本构关系缺乏材料尺度的相关性, 难以表征颗粒材料流变的尺寸效应, 而 Cosserat 连续体中的内禀特征长度为刻画材料的尺寸效应提供了一种可能途径。该文旨在 Cosserat 连续体的理论框架下发展 Perzyna 粘塑性模型, 以探讨颗粒材料流变的尺寸效应与影响机制。首先基于 Drucker-Prager 屈服准则导出了 Cosserat 连续体粘塑性模型的一致性算法, 获得了过应力本构方程积分算法与一致切向模量的封闭形式, 并在 ABAQUS 二次平台上采用用户自定义单元(UEL)予以程序实现。有限元数值算例模拟了软岩试样的三轴压缩蠕变和两种堆石料试样在常规三轴条件下的蠕变和应力松弛, 数值预测结果与相应试验结果具有较好的一致性, 表明该流变模型的适应性。同时, 将颗粒的球型指数、圆度和平均粒径作为表征颗粒材料内禀特征长度的一种度量, 以反映颗粒材料的试样尺寸及其颗粒粒径与形状对流变过程中的轴向应变、偏应变和偏应力的影响关系, 表明所发展的流变模型可以捕捉颗粒材料流变行为的压力相关性和尺寸效应。

关键词: 颗粒材料; Cosserat 连续体理论; 流变模型; 尺寸效应; 有限元分析

中图分类号: TU43; O345 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2014.07.0615

A RHEOLOGY MODEL INCORPORATING SCALE EFFECT FOR GRANULAR MATERIALS AND ITS VALIDATIONS

XIA Ming-tan, XU Yuan-jie, CHU Xi-hua

(School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

Abstract: Viscoplastic models in classical continua theory were unable to incorporate scale effect for granular materials due to the independence on scale. Cosserat continua theory with the internal length scale provides a possible approach to incorporate scale effect. A Perzyna's viscoplastic model is developed based on Cosserat continua theory to investigate the scale effect on rheology for granular materials. The consistent operator in the framework of Cosserat continua theory is derived. The constitutive integration algorithm and its closed form of the consistent tangent modulus are also derived. The code is implemented by User-defined elements (UEL) in ABAQUS platform. Triaxial compression creep tests of soft rock, creep and stress relaxation tests of rockfill, are simulated by finite element method. The results using finite element analysis show good agreement with the experimental data in literatures, which verified the model. Meanwhile, sphericity index, roundness index, and mean diameter of the particle are adopted as measures of the internal length scale to incorporate the influence of particle size and shape on axial strain, deviator strain and deviator stress, showing that the pressure-sensitive and the scale effect on rheology for granular materials can be captured.

Key words: granular materials; Cosserat continua theory; rheology model; scale effect; finite element analysis

收稿日期: 2014-07-14; 修改日期: 2015-01-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(11372230)

通讯作者: 徐远杰(1956—), 男, 武汉人, 教授, 博士, 博导, 主要从事岩土工程数值方法研究(E-mail: yj_xu@whu.edu.cn).

作者简介: 夏明铤(1988—), 男, 武汉人, 博士生, 主要从事岩土工程数值方法研究(E-mail: xiamingt@whu.edu.cn);

楚锡华(1977—), 男, 河南濮阳人, 副教授, 博士, 博导, 主要从事颗粒材料力学及计算力学研究(E-mail: chuxh@whu.edu.cn).

岩土类颗粒材料的长期变形具有显著的时间相关性。大量室内试验或现场观测研究结果表明,颗粒材料在加载终结并持续不变条件下会产生明显的流变行为^[1]。通常认为岩土类颗粒材料流变行为的细观机制源于颗粒间的粘滞滑移、颗粒接触蠕变、破损或破碎导致颗粒间接触状态随时间滞后的重排列与调整,宏观上可以概化或抽象为一类粘塑性变形行为,可在连续介质力学框架下研究蠕变、应力松弛等流变现象^[2]。

关于颗粒材料的流变问题已有许多研究报道,众多学者^[3-5]根据室内试验拟合元件模型参数或提出经验模型。该途径的特点是简单实用,易于开展数值模拟及其工程应用。另外,基于 Perzyna 过应力理论^[6],一些学者发展了描述颗粒材料流变的数学模型:如 Desai 和 Zhang^[7]针对盐岩流变提出的粘塑性模型;Di Prisco 等^[8]针对松砂时间效应提出了粘塑性模型;Tong 等^[9]发展了一种粘塑性帽子模型,用于模拟高应变加载率下土体的流变响应。然而,基于经典连续介质力学框架的本构关系中不包含材料尺度的相关性,尚难以反映颗粒材料流变机制的尺寸效应。最近,文献[10]报道了采用两种试样尺寸堆石料开展的常规三轴蠕变试验,观测到大尺寸样件的最终蠕变量大于小尺寸样件,意味着基于缩尺颗粒试样的室内堆石料流变试验参数能否适用于工程原型的流变预测尚存商榷或疑虑。

本文在 Cosserat 连续体的理论框架下发展了 Perzyna 粘塑性模型,并引入内禀特征长度以探讨颗粒材料流变的尺寸效应与影响机制。同时,将颗粒的球型指数、圆度和平均粒径作为表征颗粒材料的内禀特征长度的一种度量。基于 Drucker-Prager 屈服准则导出了 Cosserat 连续体理论框架下粘塑性模型的一致性算法,获得了过应力本构方程积分算法与一致切向模量的封闭形式,并在 ABAQUS 二次平台上采用用户自定义单元(UEL)予以程序实现。有限元数值算例模拟了软岩试样的单轴压缩蠕变和两种堆石料试样在常规三轴条件下的蠕变和应力松弛,数值预测结果与相应试验结果具有较好的一致性,表明了该流变模型的适应性及其程序开发的正确性。颗粒材料的试样尺寸及其颗粒粒径与形状对流变过程中的轴向应变、偏应变和偏应力的影响关系,表明所发展的流变模型可以捕捉颗粒材料流变行为的压力相关性和尺寸效应。

1 Cosserat 连续体粘塑性模型

1.1 Cosserat 连续体理论基本方程

在 Cosserat 连续体理论中, Cosserat 应力张量 σ_{ij} 除了包含正应力和剪应力分量以外,还包含偶应力,不再具有经典应力张量的对称性。以 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 表示应力张量, m_{ij} 表示偶应力张量, ρ_j 和 b_j 分别为体力和体力偶,则力的平衡方程为:

$$\tilde{\sigma}_{ij,i} + \rho_j = 0 \quad (1)$$

力矩的平衡方程为:

$$m_{ij,i} + e_{jst} \tilde{\sigma}_{st} + b_j = 0 \quad (2)$$

其中, e_{jst} 为置换张量。

应力张量可表达为球应力张量与偏应力张量之和:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = s_{ij} + p\delta_{ij} \quad (3)$$

其中: δ_{ij} 为 Kronecker 记号; $p = I_1 / 3$ 为静水压力; I_1 为应力张量的第一不变量:

$$I_1 = \tilde{\sigma}_{ii} \quad (4)$$

由于 Cosserat 连续体理论中偏应力张量的非对称性,且经典应力张量与偶应力张量之间存在一个平衡因子。因此,在计算 Cosserat 连续体理论中应力张量的第二与第三广义应力不变量之前,须先将偏应力张量和偶应力张量转换为应力当量:

$$\bar{s}_{ij} = P_{ijkl} s_{kl} \quad (5)$$

$$\bar{m}_{ij} = Q_{ijkl} m_{kl} \quad (6)$$

其中:

$$P_{ijkl} = a_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + a_2 \delta_{il} \delta_{jk} + (1 - a_1 - a_2) A_{ijkl} \quad (7)$$

$$Q_{ijkl} = a_3 / l_c \delta_{ik} \delta_{jl} + (a_3 / l_t - a_3 / l_c) A_{ijkl} \quad (8)$$

其中:

$$A_{ijkl} = \begin{cases} 1, & i = j = k = l \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

a_1 、 a_2 和 a_3 分别为三个附加的材料参数。De Borst^[11]曾建议采用 $a_1 = a_2 = 1/2$ 、 $a_3 = 1$, 以确保蜕化至经典连续体理论中的不变量。 l_c 与弯曲偶应力相关, l_t 与扭转偶应力相关,分别为表征内禀部特征长度的调谐参数。

Cosserat 连续体理论中的广义偏应力张量第二不变量 J_2 为:

$$J_2 = \frac{1}{2} (\bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} + \bar{m}_{ij} \bar{m}_{ij}) \quad (10)$$

广义偏应力张量的第三不变量 J_3 为:

$$J_3 = \frac{1}{3}(\bar{s}_{ij}\bar{s}_{jk}\bar{s}_{ik} + \bar{m}_{ij}\bar{m}_{jk}\bar{m}_{ik}) \quad (11)$$

Cosserat 应变张量 ε_{ij} 包含与应力张量相对应的应变张量 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ 和偶应力张量相对应的微曲率张量 κ_{ij} 。几何方程为:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = u_{j,i} - e_{ijk}\omega_k \quad (12)$$

$$\kappa_{ij} = \omega_{j,i} \quad (13)$$

其中: u_j 为位移矢量的分量; ω_k 为转动矢量的分量。

在 Cosserat 连续体理论框架下, 经典应力与经典应变的各向同性弹性本构方程为:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \tilde{\varepsilon}_{kl} \quad (14)$$

其中:

$$D_{ijkl}^e = (G + G_c)\delta_{ik}\delta_{jl} + (G - G_c)\delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}G\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (15)$$

式中: G 和 ν 分别为经典连续体中的剪切模量和泊松比; G_c 为 Cosserat 剪切模量, 用以表征相对变形的反对称部分与所得剪应力的反对称部分之间的关系。

偶应力与微曲率的弹性本构方程为:

$$m_{ij} = M_{ijkl}^e \kappa_{kl} \quad (16)$$

其中:

$$M_{ijkl}^e = 2G(l_c^2\delta_{ik}\delta_{jl} + l_t^2A_{ijkl} - l_c^2A_{ijkl}) \quad (17)$$

对于平面 Cosserat 连续体, 平衡方程可以简化为:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij,i} + \rho_j = 0 \\ m_{i3,i} + e_{st}\tilde{\sigma}_{st} + b_3 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

几何方程为:

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{ij} = u_{j,i} - e_{ij}\omega_3 \\ \kappa_{i3} = \omega_{3,i} \end{cases} \quad (19)$$

弹性本构方程为:

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^e \tilde{\varepsilon}_{kl} \\ m_i = M_{ik}^e \kappa_k \end{cases} \quad (20)$$

其中:

$$D_{ijkl}^e = (G + G_c)\delta_{ik}\delta_{jl} + (G - G_c)\delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}G\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (21)$$

$$M_{ik}^e = 2Gl_c^2\delta_{ik} \quad (22)$$

显然, 在平面 Cosserat 问题中, 没有扭转弯曲

偶应力相关的特征长度, 只有弯曲偶应力相关的内禀特征长度。

鉴于目前学术界对 Cosserat 连续体中的内禀特征长度所表征的物理力学含义尚无统一诠释, 许多学者^[12-14]曾对内禀特征长度所表征的物理力学属性进行了有益的探讨与分析。针对颗粒类材料, Voyiadjis 等^[15]根据两相邻颗粒接触的微结构属性(图 1), 建议采用:

$$l_c = \frac{I_s}{I_r}l_a \quad (23)$$

作为表征颗粒材料的内禀特征长度的一种度量。其中, l_a 为颗粒的平均粒径; I_s 为颗粒的球型指数:

$$I_s = \frac{d_e}{d_s} - \frac{d_e}{d_L} \quad (24)$$

一般天然颗粒材料的球型指数的范围为 $0 < I_s < 1$; 式(24)中 d_e 、 d_s 和 d_L 分别为颗粒的等体积球的直径、最短直径和最长直径; I_r 为颗粒的圆度:

$$I_r = \frac{p_r}{\pi\left(\frac{d_s + d_L}{2}\right)} \quad (25)$$

这里, p_r 为颗粒的真实周长, 一般天然颗粒材料的圆度的范围为 $1 < I_r < 1.5$ 。于是, 通过对 l_c 值的调谐, 可在某种程度上用于反映或刻画颗粒材料的尺寸效应^[15]。

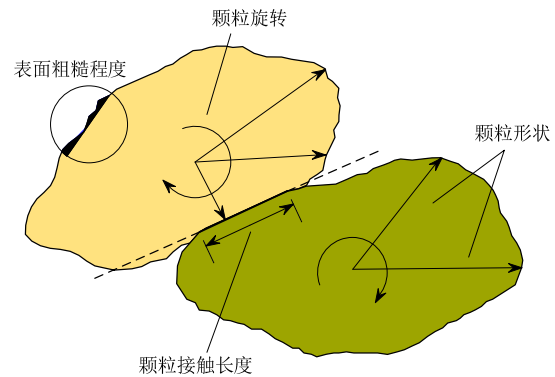


图 1 两相邻颗粒接触的微结构属性示意图

Fig.1 Schematic diagram of micro-structural properties of two adjacent particles in contact

1.2 粘塑性模型

按照 Perzyna^[6]粘塑性理论: 当土体应力状态位于屈服面以内时, 土体为弹性变形状态; 当应力状态在屈服面以外时, 土体会产生粘塑性变形。总应变率张量 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 可分解为弹性应变率张量 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ 与粘塑性

应变率张量 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ 之和:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad (26)$$

弹性应变率与应力率之间的关系可以表达为:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad (27)$$

这里 C_{ijkl} 包含前面提到的 D_{ijkl}^e 和 M_{ijkl}^e 两部分。

粘塑性应变率表达为:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \dot{\gamma} \langle \phi(f) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (28)$$

$$\langle \phi(f) \rangle = \begin{cases} \left(\frac{f}{P_a} \right)^\beta, & f > 0 \\ 0, & f \leq 0 \end{cases} \quad (29)$$

其中: $\dot{\gamma}$ 为材料相关的流动参数, 其倒数 $1/\dot{\gamma}$ 的物理学意义为材料的时间尺度因子; β 为无量纲的材料应变率参数。 $\dot{\gamma}$ 和 β 的取值可由侧限固结试验获得^[16]; $\phi(f)$ 为粘性流动函数; P_a 为标准大气压。本文假设颗粒材料屈服遵守 Drucker-Prager 屈服准则, 屈服函数为:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (30)$$

其中, α 和 k 为材料参数。可以采用多种方案通过材料的粘聚力 c 和内摩擦角 φ 予以标定^[17]。本文假定 Drucker-Prager 圆与 Mohr-Coulumb 六边形在单轴压缩下的屈服应力相同, 即 Drucker-Prager 圆外接 Mohr-Coulumb 六边形的方案确定材料参数:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (31)$$

$$k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (32)$$

值得指出, 对于棱角形颗粒材料, 在低围压下流变的产生机理本质上源于内部颗粒间接触的粘滞滑移、或发生了接触局部蠕变或蠕变破损, 导致颗粒间接触位置发生了重新调整; 而高围压下流变的产生机理本质上源于颗粒接触蠕变诱发破碎, 导致颗粒重排列或调整。所有这些颗粒间的调整或重排列在宏观上表象为颗粒材料的流变。因此, 压力相关性是岩土类颗粒材料流变的重要特征。Duncan^[18]曾考虑颗粒材料的内摩擦角随围压增大而降低来表征颗粒材料破损或破碎导致的非线性强度:

$$\varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi \lg(\sigma_3 / P_a) \quad (33)$$

其中: σ_3 为围压; P_a 为标准大气压; φ_0 表示围压为 100 kPa 下的内摩擦角; $\Delta\varphi$ 为试验确定的材料

参数。本文采用式(33)所表达的非线性强度作为式(31)和式(32)中内摩擦角的取值, 以反映或表征颗粒材料流变对围压与破碎的相关性。

2 本构方程积分与一致切向模量

2.1 本构方程积分算法

对于准静力问题, 从时刻 t_n 到时刻 t_{n+1} 的时间增量步 Δt 内, 应力增量与应变增量满足关系:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^{vp} \quad (34)$$

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^{vp}) \quad (35)$$

其中, $\Delta \varepsilon_{ij}$ 、 $\Delta \varepsilon_{ij}^e$ 、 $\Delta \varepsilon_{ij}^{vp}$ 和 $\Delta \sigma_{ij}$ 分别为总应变增量、弹性应变增量、粘塑性应变增量和应力增量。

采用一个参数的时间积分方案, 粘塑性应变 $\Delta \varepsilon_{ij}^{vp}$ 可表达为:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{vp} = \Delta t [(1 - \eta) \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} |_{t_n} + \eta \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} |_{t_{n+1}}] \quad (36)$$

其中: $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} |_{t_n}$ 和 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} |_{t_{n+1}}$ 分别为时刻 t_n 和时刻 t_{n+1} 的粘塑性应变率; $0 \leq \eta \leq 1$ 为一个可调整的积分参数。Katona^[19]曾研究了时间积分参数对积分算法的稳定性分析, 证明当 $\eta \geq 0.5$ 时, 该积分算法属无条件稳定。因此, 在积分算中取 $\eta \geq 0.5$, 时间增量步 Δt 的取值将只会影响积分算法的精确性, 对算法的稳定性无影响。

本文采用向后欧拉积分算法, 取 $\eta = 1$:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} |_{t_{n+1}} \Delta t = \dot{\gamma} \langle \phi(f) \rangle \Delta t \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij} |_{t_{n+1}}} \quad (37)$$

此处引入一个塑性乘子:

$$\Delta \lambda = \dot{\gamma} \langle \phi(f) \rangle \Delta t \quad (38)$$

于是, 式(37)可以改写为:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{vp} = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij} |_{t_{n+1}}} \quad (39)$$

表达形式与弹塑性本构模型类似。在一个迭代计算步中, 残差 R 为:

$$R = \phi(f) - \frac{\Delta \lambda}{\dot{\gamma} \Delta t} \quad (40)$$

残差 R 趋于零的条件与弹塑性本构模型的计算方法相类似。

将式(39)代入式(35)可得:

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (41)$$

应用 Newton-Raphson 迭代的方法计算 $\Delta \lambda$ 。在第 i 个迭代步中, 对式(41)进行微分:

$$\delta\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(\delta\varepsilon_{kl} - \Delta\lambda^{(i)} \frac{\partial^2 f}{\partial\sigma_{kl}\partial\sigma_{mn}} \delta\sigma_{mn} - \Delta\lambda^{(i)} \frac{\partial^2 f}{\partial\sigma_{kl}\partial\lambda} \delta\lambda - \frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}} \delta\lambda \right) \quad (42)$$

其中, $\delta\sigma_{ij}$ 、 $\delta\varepsilon_{kl}$ 和 $\delta\lambda$ 分别表示 $\Delta\sigma_{ij}$ 、 $\Delta\varepsilon_{kl}$ 和 $\Delta\lambda$ 在迭代步中的增量。式(42)整理可得:

$$\delta\sigma_{ij} = T_{ijkl} \left[\delta\varepsilon_{kl} - \left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}} + \Delta\lambda^{(i)} \frac{\partial^2 f}{\partial\sigma_{kl}\partial\lambda} \right) \delta\lambda \right] \quad (43)$$

这里用到一个刚度张量 T_{ijkl} , 张量 T_{ijkl} 的逆张量 \hat{T}_{ijkl} 可表达为:

$$\hat{T}_{ijkl} = \left(\hat{C}_{ijkl} + \Delta\lambda^{(i)} \frac{\partial^2 f}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}} \right) \quad (44)$$

其中, 张量 \hat{C}_{ijkl} 为张量 C_{ijkl} 的逆张量。

对式(40)进行微分可得:

$$R^{(i)} = - \left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}} \right) \delta\sigma_{ij} + \left(\frac{1}{j\Delta t} - \frac{\partial\phi}{\partial\lambda} \right) \delta\lambda \quad (45)$$

将式(43)代入式(45)可得:

$$\delta\lambda = \frac{1}{\xi} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}} \right) T_{ijkl} \delta\varepsilon_{kl} + R^{(i)} \right] \quad (46)$$

其中:

$$\xi = \frac{1}{j\Delta t} - \frac{\partial\phi}{\partial\lambda} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{ij}} \right) T_{ijkl} \left[\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}} + \Delta\lambda^{(i)} \frac{\partial^2 f}{\partial\sigma_{kl}\partial\lambda} \right] \quad (47)$$

本构方程积分算法的主要流程如下:

1) 计算由上一时间步所得应力的弹性预测值:

$$\sigma_{ij}^{\text{tral}}|_{n+1} = \sigma_{ij}|_n + C_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl}$$

判别其是否在屈服面以内。如果在屈服面以内, 则按照 $\sigma_{ij}|_{n+1} = \sigma_{ij}^{\text{tral}}|_{n+1}$ 计算; 如果 $\sigma_{ij}^{\text{tral}}|_{n+1}$ 在屈服面以外, 则按以下步骤进行求解。

2) 假定未知量初值 $\Delta\lambda^{(0)} = 0$,

$$\sigma_{ij}|_{n+1}^{(0)} = \sigma_{ij}|_n + C_{ijkl} (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\lambda^{(0)} \frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}),$$

$$R^{(0)} = \phi(f) - \frac{\Delta\lambda^{(0)}}{j\Delta t}.$$

3) 由式(44)计算出 T_{ijkl} , 再由式(47)计算出 ξ ,

然后更新变量:

$$\Delta\lambda^{(i+1)} = \Delta\lambda^{(i)} + \delta\lambda,$$

$$\sigma_{ij}|_{n+1}^{(i+1)} = \sigma_{ij}|_n + C_{ijkl} \left(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\lambda^{(i+1)} \frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}} \right).$$

4) 进行收敛性判别:

$$R^{(i+1)} = \phi(f) - \frac{\Delta\lambda^{(i+1)}}{j\Delta t}$$

若满足, 则结束本时间增量步; 否则返回第 3) 步做循环直到收敛。

2.2 一致切向模量

展开在时刻 t_{n+1} 的过应力函数:

$$\phi(f_{n+1}) = \phi(f_n) + \frac{\partial\phi(f_n)}{\partial\sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij} \quad (48)$$

由式(37)、式(38)可知:

$$\Delta\lambda = j\phi(f_{n+1})\Delta t \quad (49)$$

将式(48)代入式(49)可得:

$$\Delta\lambda = j\Delta t \phi(f_n) + j\Delta t \frac{\partial\phi(f_n)}{\partial\sigma_{ij}} \Delta\sigma_{ij} \quad (50)$$

将式(41)代入式(50)可得:

$$\Delta\lambda = \frac{\phi(f_n) + \frac{\partial\phi(f_n)}{\partial\sigma_{ij}} C_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl}}{j\Delta t + \frac{\partial\phi(f_n)}{\partial\sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f_n}{\partial\sigma_{kl}}} \quad (51)$$

将式(51)代入式(41)可得:

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\text{alg}} \Delta\varepsilon_{kl} \quad (52)$$

$$C_{ijkl}^{\text{alg}} = C_{ijkl} - \frac{C_{ijab} \frac{\partial f_n}{\partial\sigma_{ab}} \frac{\partial\phi(f_n)}{\partial\sigma_{cd}} C_{cdkl}}{j\Delta t + \frac{\partial\phi(f_n)}{\partial\sigma_{ef}} C_{efst} \frac{\partial f_n}{\partial\sigma_{st}}} \quad (53)$$

这里 C_{ijkl}^{alg} 为一致切向模量的封闭形式。由式(53)可以看出, 式中所有的量均为时刻 t_n 的已知量, 可避免计算一致切向模量时的矩阵求逆, 保证数值求解过程的收敛性与计算效率。

3 数值算例

ABAQUS 软件不属于 Cosserat 连续体理论框架。本文采用 ABAQUS 中的二次开发用户子程序 UEL^[20], 实现用户自定义的节点自由度(平动+转动)、单元类型和本构关系, 可以在 ABAQUS 原有的计算框架下, 以用户自定义单元方式实现 Cosserat 连续体理论的计算流程。

3.1 软岩常规三轴蠕变模拟

Akai 等^[21]针对圆柱体软岩试样开展了四组常

规三轴蠕变试验。试验设定试样初始围压均为 0.49 MPa，最终轴向压应力分别为 3.41 MPa、4.61 MPa、4.90 MPa 和 5.10 MPa。试验持续时间为 8000 min，获得了偏应变随时间的变化值，并研究了蠕变速率与蠕变量对压力的相关性。采用本文流变模型模拟该常规三轴蠕变试验并对比结果的一致性。计算参数来源于 Tong^[9]，详见表 1，根据 Muhlhaus H B^[22]和 De Borst^[11]的建议，Cosserat 剪切模量取值为弹性剪切模量的 0.5 倍。数值计算结果与试验数据对比结果见图 2。

表 1 本模型的计算参数

Table 1 Parameters in the model

参数意义	参数	取值
弹性模量/GPa	E	1.09
泊松比	ν	0.293
粘聚力/MPa	c	1.90
内摩擦角/(°)	φ	40.1
Cosserat 剪切模量/MPa	G_c	206.90
流动参数/ min^{-1}	$\dot{\gamma}$	6×10^{-5}
材料应变率参数	β	1.6
内禀特征长度/mm	l_c	10

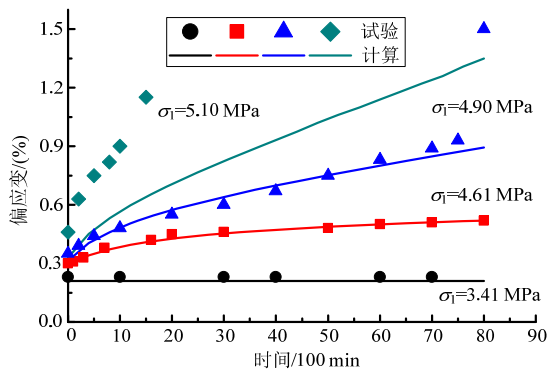


图 2 软岩偏应变随时间变化曲线

Fig.2 Deviator strain of soft rock as a function of time

有限元模拟了四种试验过程，加载条件和持续时间均与试验保持一致。如图 2 所示，软岩蠕变过程可分为初始蠕变、稳态蠕变和加速蠕变 3 个阶段。在初始蠕变阶段中，蠕变应变率逐渐减小，并逐渐趋于一个稳定值，这时，可视为软岩进入稳态蠕变阶段。在本次计算结果中，近似认为当 $(\dot{\epsilon}_t^{vp} - \dot{\epsilon}_t^{vp}) / \Delta t \leq 1 \times 10^{-5} \text{ min}^{-2}$ 时，软岩处于稳态蠕变阶段。持续一段时间以后，蠕变应变率会增加，软岩进入加速蠕变阶段。由图 2 还可以看出，软岩的蠕变行为表现出明显的压力相关性。在最终轴向压力为 4.61 MPa 的条件下，软岩在 2000 min 时进入稳态蠕变阶段，蠕变应变率趋于零，最终蠕变应

变趋于一个稳定值。而在最终轴向压力为 4.90 MPa 的条件下，软岩在 3000 min 时进入稳态蠕变阶段，蠕变应变率为 $7.5 \times 10^{-5} \text{ min}^{-1}$ 。由此可见，偏应力越大，从初始蠕变阶段到稳态蠕变阶段的时间越长，稳态蠕变阶段的蠕变应变率也越大。本模型在模拟软岩的初始蠕变阶段和稳态蠕变阶段时，计算结果与蠕变试验结果取得了较好的一致性，但在模拟加速蠕变阶段时，差别较大。文献[23-25]通过室内试验研究了其加速流变阶段，但考虑尺寸效应的加速蠕变模拟问题尚有待研究。

3.2 堆石料应力松弛模拟

文献[26]报道了针对灰黑色板岩堆石料试样所开展的常规三轴应力松弛试验。试样直径 $\phi=300 \text{ mm}$ ，高 $H=600 \text{ mm}$ 。在初始围压均为 0.2 MPa 条件下对试样施加三种不同轴向应变条件，然后统一持续 $t=1500 \text{ min}$ ，观察其偏应力松弛变化(表 2)。有限元模拟该应力松弛试验的计算参数见表 3。三种模拟结果与试验结果对比见图 3。

表 2 堆石料松弛试验结果^[26]

Table 2 Results of stress relaxation tests for rockfill^[26]

试验编号	轴向应变/(%)	初始偏应力 s_0 /MPa	最终偏应力 s_t /MPa
1	2.01	0.667	0.447
2	5.01	0.912	0.706
3	8.02	0.976	0.804

表 3 本模型的计算参数

Table 3 Parameters in the model

参数意义	参数	取值
弹性模量/MPa	E	35
泊松比	ν	0.3
粘聚力/MPa	c	0
内摩擦角/(°)	φ	45.8
Cosserat 剪切模量/MPa	G_c	6.7
流动参数/ min^{-1}	$\dot{\gamma}$	6×10^{-5}
材料应变率参数	β	2
内禀特征长度/mm	l_c	30

如图 3 所示，堆石料在恒定围压和恒定轴向应变的条件下，偏应力会逐渐减小，出现应力松弛现象。在松弛阶段初期，应力松弛速率较大，而后应力松弛速率逐渐减小，应力最终趋于稳定值。试验数据与计算结果在偏应力松弛的大小和松弛速率的变化规律上均取得了较好的一致性。由数值模拟结果可知，在本次试验中围压为 0.2 MPa 的条件下，恒定轴向应变为 2.01%、5.01% 和 8.02% 时，1500 min 内偏应力分别减小了 33.15%、23.33% 和 17.36%。

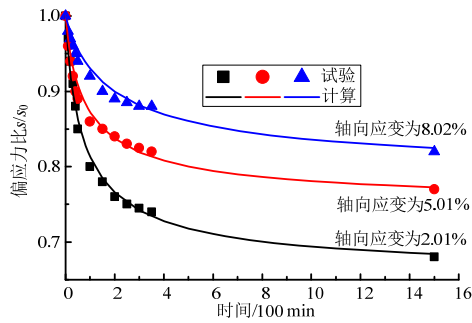


图3 堆石料偏应力随时间变化曲线

Fig.3 Deviator stress of rockfill as a function of time

3.3 堆石料蠕变的尺寸效应试验验证

文献[27]报道了针对两种尺寸花岗岩堆石料试样的常规三轴蠕变试验结果。小试样直径 $\phi=300$ mm, 高 $H=600$ mm, 最大粒径为 $d_{max}=60$ mm; 大试样直径 $\phi=500$ mm, 高 $H=1000$ mm, 最大粒径为 $d_{max}=100$ mm。试验中设定试样围压均为 0.8 MPa。采用偏应力水平来反映偏应力的相对大小, 偏应力水平为试样实际所受偏应力与破坏时偏应力的比值。本文模拟的试验中, 最终偏应力水平分别为 0.6 和 0.8。试验持续时间为 9000 min, 获得了轴向应变随时间的变化值, 并研究试样内部颗粒形状与尺寸对堆石料蠕变速率与蠕变量的影响。采用本文流变模型模拟该常规三轴蠕变试验并对比结果的一致性。计算参数详见表 4。针对本文模拟的试验中的堆石料试样, 文献[28]报道了试样的常规三轴试验资料, 获得了不同尺寸的试样颗粒在 100 kPa 下的内摩擦角 ϕ_0 和材料参数 $\Delta\phi$ 。本文模拟的试验中小试样颗粒的非线性内摩擦角为 $\phi_0 = 46.2^\circ$ 、 $\Delta\phi = 5.6^\circ$, 大试样颗粒的非线性内摩擦角为 $\phi_0 = 43.6^\circ$ 、 $\Delta\phi = 2.9^\circ$ 。不同尺寸堆石料蠕变试验结果与计算结果对比见图 4。

表4 本模型的计算参数

Table 4 Parameters in the model

参数意义	参数	取值
弹性模量/GPa	E	1.5
泊松比	ν	0.3
粘聚力	c	0
Cosserat 剪切模量/MPa	G_c	288
流动参数/ min^{-1}	$\dot{\gamma}$	3×10^{-6}
材料应变率参数	β	2
小试样特征长度/mm	l_{c1}	30
大试样特征长度/mm	l_{c2}	60

如图 4 所示, 不同内禀特征长度所得的数值模拟结果与试验资料取得了较好的一致性。数值模拟中由大试样颗粒的尺寸和形状得出的内禀特征长

度大于小试样。通过对内禀特征长度的调谐, 本文流变模型可以反映颗粒尺寸和形状对堆石料蠕变的影响。由对比结果可知, 在相同围压与偏应力状态下, 轴向应变的蠕变量将随颗粒粒径和试样尺寸增大而增大。

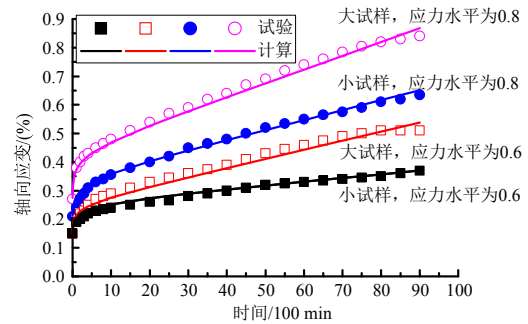


图4 不同尺寸堆石料轴向应变随时间变化曲线

Fig.4 Axial strain of rockfill with various sizes as a function of time

4 结论

(1) 在 Cosserat 连续体的理论框架下发展粘塑性模型可以预测颗粒材料的剪切流变的压力相关性, 有限元数值模拟结果再现了蠕变与松弛试验所观测到结果与规律, 并在定量上具有较好的一致性。

(2) Cosserat 连续体中内禀特征长度可以反映颗粒材料流变机制中所蕴藏的尺寸效应, 在相同围压与偏应力状态下, 轴向应变的蠕变量将随颗粒粒径和试样尺寸增大而增大, 与现有试验观测资料吻合, 为应用堆石料缩尺室内流变参数预测工程原型流变提供有益的指导。

参考文献:

- [1] Tatsuoka F. Some new aspects of time effects on the stress-strain behaviour of stiff geomaterials, Keynote Lecture [C]// The Geotechnics of Hard Soils-Soft Rocks, Proceedings of The Second International Conference. Conf. on Hard Soils and Soft Rocks, Napoli, 1998. Balkema, 2000: 1285—1371.
- [2] Augustesen A, Liingaard M, Lade P V. Evaluation of time-dependent behavior of soils [J]. International Journal of Geomechanics, 2004, 4(3): 137—156.
- [3] 王海俊, 殷宗泽. 堆石流变试验及双屈服面流变模型的研究[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(7): 959—963. Wang Haijun, Yin Zongze. Creep tests of rockfill and double-yield surface creep model [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(7): 959—963. (in Chinese)
- [4] 程展林, 丁红顺. 堆石料蠕变特性试验研究[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(4): 473—476.

- Cheng Zhanlin, Ding Hongshun. Creep test for rockfill [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(4): 473—476. (in Chinese)
- [5] 周伟, 常晓林. 高混凝土面板堆石坝流变的三维有限元数值模拟[J]. 岩土力学, 2006, 27(8): 1389—1397.
Zhou Wei, Chang Xiaolin. Three dimension FEM numerical simulating of the rockfill creep of high concrete face rockfill dam [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(8): 1389—1397. (in Chinese)
- [6] Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity [J]. Advances in Applied Mechanics, 1966, 9(4): 244—368.
- [7] Desai C S, Zhang D. Viscoplastic model for geologic materials with generalized flow rule [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, 11(6): 603—620.
- [8] Di Prisco C, Imposimato S, Vardoulakis I. Mechanical modelling of drained creep triaxial tests on loose sand [J]. Geotechnique, 2000, 50(1): 73—82.
- [9] Tong X, Tuan C Y. Viscoplastic cap model for soils under high strain rate loading [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(2): 206—214.
- [10] 花俊杰, 周伟, 常晓林, 周创兵. 堆石体应力变形的尺寸效应研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(2): 328—335.
Hua Junjie, Zhou Wei, Chang Xiaolin, Zhou Chuangbing. Study of scale effect on stress and deformation of rockfill [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(2): 328—335. (in Chinese)
- [11] De Borst R. A generalization of J2-flow theory for polar continua [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, 103(3): 347—362.
- [12] Gracio J J. The double effect of grain size on the work hardening behaviour of polycrystalline copper [J]. Scripta Metallurgica et Materialia, 1994, 31(4): 487—489.
- [13] Abu Al-Rub R K, Voyiadjis G Z. Analytical and experimental determination of the material intrinsic length scale of strain gradient plasticity theory from micro-and nano-indentation experiments [J]. International Journal of Plasticity, 2004, 20(6): 1139—1182.
- [14] Liu X, Scarpas A, Kasbergen C. A micropolar formulation of the Desai hierarchical model for elastoplastic porous media [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(9): 2695—2714.
- [15] Voyiadjis G Z, Alsaleh M I, Alshibli K A. Evolving internal length scales in plastic strain localization for granular materials [J]. International Journal of Plasticity, 2005, 21(10): 2000—2024.
- [16] Yin Z Y, Chang C S, Karstunen M, et al. An anisotropic elastic-viscoplastic model for soft clays [J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(5): 665—677.
- [17] 楚锡华, 徐远杰. 基于形状改变比能对 MC 准则与 DP 系列准则匹配关系的研究[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 2985—2990.
Chu Xihua, Xu Yuanjie. Studies on transformation from M-C criterion to Drucker-Prager criterions based on distortion energy density [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(10): 2985—2990. (in Chinese)
- [18] Duncan J M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 122(7): 577—596.
- [19] Katona M G. Evaluation of viscoplastic cap model [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1984, 110(8): 1106—1125.
- [20] Abaqus Analysis User's Manual Version 6.10. Providence, RI, USA: Dassault Systemes Simulia Corporation, 2010, Volume IV: 1059—1076.
- [21] K Akai, T Adachi, K Nishi, Mechanical properties of soft rocks [C]// 9th Conference on Soil Mechanics Foundation Engineering, Tokyo: 1977: 7—10.
- [22] Muhlhause H B, Vardoulakis I. The thickness of shear bands in granular materials [J]. Geotechnique, 1987, 37(3): 271—283.
- [23] 王贵君, 张磊, 张昱文, 等. 盐岩流变损伤破坏特性的实验研究[J]. 工程力学, 2012, 30(4): 288—293.
Wang Guijun, Zhang Lei, Zhang Yuwen, et al. Experimental investigation on the creep-damage-rupture characteristics of salt rock [J]. Engineering Mechanics, 2012, 30(4): 288—293. (in Chinese)
- [24] 曾国伟, 杨新华, 白凡, 等. 沥青砂粘弹塑蠕变损伤本构模型实验研究[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 249—253.
Zeng Guowei, Yang Xinhua, Bai Fan, et al. Experimental researches on a visco-elastoplastic creep damage constitutive model of asphalt mastic [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(4): 249—253. (in Chinese)
- [25] 蔡宜洲, 叶永. 沥青砂混合料粘弹塑性力学特性研究[J]. 工程力学, 2012, 29(2): 182—185.
Cai Yizhou, Ye Yong. Researches on viscoelastic mechanics behavior of asphalt sand mixture [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(2): 182—185. (in Chinese)
- [26] 王琛, 詹传妮. 堆石料的三轴松弛试验[J]. 四川大学学报(工程科学版), 2011, 43(1): 27—30.
Wang Chen, Zhan Chuanni. Triaxial relaxation tests of rockfill [J]. Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition), 2011, 43(1): 27—30. (in Chinese)
- [27] 左永振, 程展林, 丁红顺, 等. 堆石料蠕变试验方法研究[J]. 长江科学院院报, 2009, 26(12): 63—65.
Zuo Yongzhen, Cheng Zhanlin, Ding Hongshun, et al. Method research for rockfill creep test [J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2009, 26(12): 63—65. (in Chinese)
- [28] 李翀, 何昌荣, 王琛, 等. 粗粒料大型三轴试验的尺寸效应研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(增刊 1): 563—566.
Li Chong, He Changrong, Wang Chen, et al. Study of scale effect of large-scale triaxial test of coarse-grained materials [J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(Suppl 1): 563—566. (in Chinese)