

文章编号:1003-207(2015)07-0010-08

DOI:10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2015.07.002

基于 MCS 方法的高斯仿射利率期限结构模型研究

鲍杰,葛静

(华中科技大学经济学院,湖北 武汉 430074)

摘要:本文在最小卡方估计方法基础上研究了高斯仿射利率模型的参数识别和估计问题。以标准化高斯模型为起点,从结构化模型和简约化模型参数的函数关系出发研究高斯仿射模型的可识别性,最小卡方估计量继承了结构化模型极大似然估计量的所有渐进性质并保证了参数估计量的可靠性。以上交所 2006—2013 年隐含于国债价格月度数据的零息票收益率为样本采用最小卡方方法实证研究了高斯仿射期限模型,结论表明高斯仿射模型很好的拟合了观测的期限结构,并且整体上看简约型和结构型参数估计量的统计性质的优劣具有一致性。

关键词:高斯仿射期限结构;可识别性;极大似然估计量;最小卡方估计量

中图分类号:F830.91 **文献标识码:**A

1 引言

在利率市场化背景下,如何有效的估计和预测无风险利率期限结构成为金融风险管理 and 衍生品定价的关键问题之一。目前已有大量文献集中于利率期限结构的动态演变研究,发展过程经历了由一般均衡模型到无套利模型、由单因子利率模型到多因子模型,这一变化的驱动因素是模型能否快速有效地捕捉到市场信息,准确地给出利率的预测值。其中,在无套利框架下,由 Vasicek^[1], Duffie 和 Kan Rui^[2], Dai Qiang 和 Singleton^[3] 以及 Duffee^[4] 建立的高斯仿射模型成为研究利率期限结构的基础。这类模型的优势在于以完全解析的方式给出了资产和风险的市价,同时也以解析的方式给出模型参数对资产价格变化的边际影响。Duffee^[4], Cochrane 和 Piazzesi^[5] 利用该方法测度利率期限结构中的风险溢价, Christensen, Diebold 和 Rudebusch^[6] 给出的无套利动态 Nelson 和 Siegel^[7] 利率模型是带约束的高斯仿射模型,他们检验了 P-测度下模型参数的不同约束条件对利率期限结构预测的影响。

高斯仿射期限结构模型即收益率由 N_t 个不可观测的定价因子线性表示,定价因子满足受约束的 VAR,尽管它具有诸多优势,但是同时这类模型在

理论层面和实证层面也存在一定的不足:在理论层面,高斯仿射期限结构模型参数的存在识别性问题。如果模型的同一个输出值存在多个输入参数向量,那么这个模型在这点就是不可识别的,在统计上也就无法使用观测的数据来估计模型的参数, Collin-Dufresne, Goldstein 和 Jones^[8], Ait-Sahalia 和 Kimmel^[9] 证明 Dai Qiang 和 Singleton^[3] 的经典表示是不可识别的;在实证研究层面,由于似然函数的高度非线性和似然曲面的多峰性问题,采用数值方法对高斯模型的参数估计时对初始值有严格的要求。Kim^[10] 指出由于无套利模型待估参数较多以及参数和收益率之间的非线性关系,数值计算需要寻找一个较好的初始值以满足非线性系统的收敛性。同时, Ang 和 Piazzesi^[11] 也指出在使用极大似然法估计多因子模型参数时,高度非线性系统需要一个较好的初始值以满足系统的收敛性。通常对收敛性问题的处理方法是数百个初始值进行搜索直到系统稳定,但是 Hamilton 和 Wu^[12] 证明这种方法并不能保证得到的参数是全局最大值。

上述高斯仿射模型存在的参数可识别性和实证研究参数的估计问题,可以从结构化模型和简约化模型参数的函数关系出发同时得到解决。在模型参数的可识别性方面,可以直接从结构型参数和简约型参数的函数关系得到,结构型衍生出的简约化模型参数估计量是一个可以识别的 OLS 估计量,如果两者参数个数相等,则结构化模型恰好可识别;如果结构化模型参数少于简约化模型,它则过度识别。

收稿日期:2013-09-05; 修订日期:2014-03-25

作者简介:鲍杰(1981—),男(汉族),山西临汾人,华中科技大学经济学院博士生,研究方向:计量经济学、土地金融。

在参数估计的实证层面,最小化卡方估计方法 (Minimum-Chi-Square, MCS) 实现简约化参数和结构化参数之间的转换。Rothenberg^[13] 将 MCS 方法应用于参数统计推断,证明当简约型估计量是无约束的 MLE 以及权重矩阵是信息矩阵时,最小卡方估计量 (Minimum-Chi-Square Estimation, MCSE) 与完全信息 MLE 是渐进等价的。在仿射期限结构模型中,Hamilton 和 Wu^[12] 证明 MCSE 能够抓住 MLE 估计量的所有渐进优势并且它们的渐进协方差相等,同时避免了与 MLE 相关的大量数值问题。虽然简约型和结构型参数的转换常常也包含数值计算,但是包含的数值成分远远少于 MLE 估计结构化模型的数值成分。在结构化模型恰好可识别的情况下, MCS 方法比 MLE 方法有更大的优势,理论上可以确定得到的参数估计量是最大似然估计量,而在过度识别的情况下, MCS 方法仍然有效,此时参数是无约束简约型参数估计量的函数。

最近的利率期限结构文献包括 Christensen, Diebold 和 Rudebusch^[6] 给出了无套利动态 Nelson-Siegel 利率模型,理论上将 DNS 模型的无套利化,并给出了水平因子,斜率因子和曲率因子的简洁表示,与以前的利率期限结构模型相比,它显著地提升了实证的可操作性和预测效果。Joslin, Singleton 和 Zhu Haoxiang^[14] 给出了一个仿射期限结构模型的经典表示,理论上极大的提高了似然函数的收敛性。Collin-Dufresne, Goldstein 和 Jones^[8] 给出了基于零息票利率衍生产品的期限结构表示,指出了使用可观测变量而不是不可观测的潜在变量表示利率期限结构的优点。吴恒煜等^[17] 应用两因子 Vasicek 模型在状态空间框架下结合卡尔曼滤波方法研究了上海证券交易所国债利率期限结构,研究表明 Gumbel Copula 和混合 Copula 能较好的刻画 1 年期和 20 年期利率观测误差的相依性,并且 Gumbel Copula 能够更有效地捕捉到国债投资组合的风险。周荣喜和王晓光^[18] 构建了三因子 CIR 过程,采用卡尔曼滤波估计方法并利用蒙特卡罗模拟对我国国债进行定价预测,结论表明多因子模型要优于单因子模型,双因子模型要略优于三因子模型,为国债的合理定价提供了技术支持。文兴易和黎实^[19] 提出了基于局部线性逼近 DNS 模型,结果表明该模型的无论是样本内的拟合效果还是样本外的预测效果均优于原模型。

2 高斯仿射期限结构模型及实证方法

首先建立离散情形下的高斯仿射期限结构模

型,给出 Q-测度和 P-测度下的期限结构的表示;然后从 Dai 和 Singleton^[3] 的标准化表示出发,从结构化模型和简约化模型的关系角度研究结构化模型参数的可识别性;最后给出结构化模型的 MCS 估计方法。

2.1 高斯仿射模型

考虑一个 $(M \times 1)$ 的向量 F_t , 它的动态性由一个高斯自回归过程表示:

$$F_{t+1} = c + \rho F_t + \sum u_{t+1} \quad (1)$$

其中, $u_{t+1} \sim i. i. d. N(0, I_M)$ 。由这个表示可以得到 F_{t+1} 的条件分布:

$$F_{t+1} | F_t, F_{t-1} \cdots F_1 \sim N(\mu_t, \sum \sum') \quad (2)$$

$$\mu_t = c + \rho F_t$$

令 r_t 表示单期的无风险利率,假定 F_t 包含了价格变化的所有因素,则时刻 t 贴现资产的价格是 $P_t(F_t)$ 。在风险中性条件下,贴现资产的价格满足:

$$P_t(F_t) = \exp(-r_t) E_t[P_{t+1}(F_{t+1})] = \exp(-r_t) \int_{\mathbb{R}^M} P_{t+1}(F_{t+1}) \varphi(F_{t+1}; \mu_t, \sum \sum') dF_{t+1} \quad (3)$$

其中, $\varphi(y; \mu, \Omega)$ 是 M 维的正态密度函数,具体可以表示为:

$$\varphi(y; \mu, \Omega) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2} |\Omega|^{1/2}} \exp\left[-\frac{(y - \mu)' \Omega^{-1} (y - \mu)}{2}\right] \quad (4)$$

对于风险规避投资者而言,贴现资产价格更为一般的情形是(3)式可以表示为:

$$P_t(F_t) = E_t[P_{t+1}(F_{t+1}) M_{t,t+1}] = \int_{\mathbb{R}^M} P_{t+1}(F_{t+1}) [M_{t,t+1} \varphi(F_{t+1}; \mu_t, \sum \sum')] dF_{t+1} \quad (5)$$

其中, $M_{t,t+1}$ 表示定价核。在仿射利率期限结构中,给出了一个特殊的定价核:

$$M_{t,t+1} = \exp[-r_t - (1/2)\lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' u_{t+1}] \quad (6)$$

其中 λ_t 是 $(M \times 1)$ 维向量表示投资者对风险的态度, $\lambda_t = 0$ 是风险中性的情形。由(4)和(6)可以得到:

$$M_{t,t+1} \varphi(F_{t+1}; \mu_t, \sum \sum') = \exp(-r_t) \varphi(F_{t+1}; \mu_t^Q, \sum \sum') \quad (7)$$

$$\mu_t^Q = \mu_t - \sum \lambda_t \quad (8)$$

将(7)代入(5)并与(3)进行比较,可以看到定价核(6)使得风险因子 F_{t+1} 条件期望值由 μ_t 调整到 μ_t^Q 时,风险规避投资者对资产价值的估值等于风险中性投资者的估值。如果 λ_t 的第一个元素为正,表明

时刻 t 风险规避投资者对时刻 $t+1$ 数量为 $F_{1,t+1}$ 资产的估值小于风险中性投资者。当 \sum 的第一个元素的值越大时,两者对同一资产估值的差异就越大。资产收益为 $F_{i,t+1}$ 时,两者资产估值的差异为 $\sum_{i1} \lambda_{1t}$, \sum_{i1} 是因子 i 和因子 1 的协方差, λ_{1t} 是时刻 t 风险因子 1 的市场价格。

仿射期限结构模型进一步假定风险因子的市场价格是因子的仿射函数:

$$\lambda_t = \lambda + \Lambda F_t \tag{9}$$

其中, λ 是 $(M \times 1)$ 向量, Λ 是一个 $(M \times M)$ 矩阵。将(9)和(2)代入(8)可以得到 $\mu_t^Q = c^Q + \rho^Q F_t$, 其中:

$$c^Q = c - \sum \lambda \tag{10}$$

$$\rho^Q = \rho - \sum \Lambda \tag{11}$$

$$F_{t+1} = c^Q + \rho^Q F_t + \sum u_{t+1}^Q \tag{12}$$

如果风险中性投资者认为风险因子在风险中性测度下满足(12),则他和风险规避投资者对资产估值相同, u_{t+1}^Q 是 Q-测度下的标准正态向量。

假定单期无风险利率同样是风险因子的仿射函数: $r_t = \delta_0 + \delta_1' F_t$

$$\tag{13}$$

在上述假定下, Ang 和 Piazzesi^[11] 证明 n-期无风险零息票债券的收益率可以表示为:

$$y_t^n = a_n + b_n' F_t \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{n} [I_M + \rho^{Q'} + \dots + (\rho^{Q'})^{n-1}] \delta_1 \tag{15}$$

$$a_n = \delta_0 + (b_1' + 2b_2' + \dots + (n-1)b_{n-1}') c^Q / n - (b_1' \sum \sum b_1 + 2^2 b_2' \sum \sum b_2 + \dots + (n-1)2b_{n-1}' \sum \sum b_{n-1}) / 2n \tag{16}$$

如果知道 F_t 的值以及 $c^Q, \rho^Q, \sum, \delta_0$ 和 δ_1 的值,就可以预测任意期限 n 的收益率。

在以上的分析中,仿射期限结构模型存在三套参数:(1)P-测度下的参数 c, ρ 和 \sum ; (2)风险价格的参数 λ 和 Λ ; (3)Q-测度下的参数 c^Q, ρ^Q 和 \sum 。如果知道了这三套参数中的任意两套则可以利用(10)和(11)得出第三套参数。

假定需要研究 N_d 个不同到期日的收益率, N_l 是不可观测定价因子的个数,并且满足 $N_d \geq N_l$ 。如果 y_t^n 是其他期限收益率的线性函数,利用(14)就可以预测它的值。虽然给定其他收益率可以精确的预测其中一个收益率,但对期限结构的预测不可能完全精确。由 Ang 和 Piazzesi^[11] 以及 Chen 和

Scott^[15] 给出的一个估计方法,假定(14)有 N_l 个精确观测的收益率,剩下的 $N_e = N_d - N_l$ 收益率存在观测误差。令收益率 Y_t^1 为 $(N_l \times 1)$ 不存在观测误差的向量,收益率 Y_t^2 为 $(N_e \times 1)$ 存在观测误差的向量。误差设定满足:

$$\begin{bmatrix} Y_t^1 \\ Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} F_t + \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_e u_e^c \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中, \sum_e 是一个对角阵, A_i 和 B_i 由(16)和(15)得到, \sum_e 度量的是观测误差的协方差, u_e^c 是一个正态随机向量满足 $u_e^c \sim N(0, I_{N_e})$ 。

2.2 高斯仿射模型的识别

在高斯仿射期限结构模型中,不存在观测误差的 N_l 个收益率满足一个施加约束条件的 VAR。从结构化模型到简约型的 VAR 模型,根据两模型参数的映射关系可以判断出结构型参数是否可识别。在一个映射关系中,如果有两个不同的结构型参数值对应于同一个简约型参数值,那么结构化模型的参数就是不可识别的。

在高斯仿射过程的经典表示中, Dai Qiang 和 Singleton^[3] 对 P-测度下因子过程施加的标准化条件为: $\Sigma = I_{N_l}, \delta_1 \geq 0, c = 0$ 以及 ρ 为下三角矩阵; Le, Dai Qiang 和 Singleton^[16] 对 Q-测度下因子过程施加的标准化条件为: $\Sigma = I_{N_l}, \delta_1 \geq 0, c^Q = 0$ 以及 ρ^Q 为下三角矩阵。本文结合这两种标准化条件,给出高斯仿射模型的因子过程标准化条件: $\Sigma = I_{N_l}, \delta_1 \geq 0, c = 0$ 以及 ρ^Q 为下三角矩阵。将该条件代入(1)然后方程两边同时左乘以 B_1 得到如下简约型 VAR 方程:

$$B_1 F_t = B_1 \rho B_1^{-1} B_1 F_{t-1} + B_1 u_t \tag{18}$$

由(17)可知 $Y_t^1 = A_1 + B_1 F_t$, 得到 $B_1 F_t$ 和 $B_1 F_{t-1}$ 的值,代入(18)可得:

$$Y_t^1 = A_1^* + \varphi_{11}^* Y_{t-1}^1 + u_{1t}^* \tag{19}$$

$$A_1^* = A_1 - B_1 \rho B_1^{-1} A_1 \tag{20}$$

$$\varphi_{11}^* = B_1 \rho B_1^{-1} \tag{21}$$

同样由(17)可知 $F_t = B_1^{-1} (Y_t^1 - A_1)$, $Y_t^2 = A_2 + B_2 F_t + \sum_e u_e^c$ 可以到的 Y_t^2 :

$$Y_t^2 = A_2^* + \varphi_{21}^* Y_t^1 + u_{2t}^* \tag{22}$$

$$A_2^* = A_2 - B_2 B_1^{-1} A_1 \tag{23}$$

$$\varphi_{21}^* = B_2 B_1^{-1} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1t}^* \\ u_{2t}^* \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Omega_1^* & 0 \\ 0 & \Omega_2^* \end{bmatrix} \right) \tag{25}$$

表 1 高斯仿射结构型参数和简约型 VAR 参数的映射关系

VAR 参数	元素的个数	c^Q	ρ^Q	δ_0	δ_1	ρ	Σ_e
		N_l	$N_l(N_l + 1)/2$	1	N_l	N_l^2	N_e
A_1^*	N_l	✓	✓	✓	✓	✓	
φ_{11}^*	N_l^2		✓		✓	✓	
Ω_1^*	$N_l(N_l + 1)/2$		✓		✓		
A_2^*	N_e	✓	✓	✓	✓		
φ_{21}^*	$N_l N_e$		✓				
Ω_2^*	N_e						✓

注:每一行中的“✓”表示结构化模型参数到简约化模型参数映射的元素。

$$\Omega_1^* = B_1 B_1' \tag{26}$$

$$\Omega_2^* = \sum_e \sum_e' \tag{27}$$

方程(19)和(22)是一个带约束的 VAR,方程(19)仅包含滞后一期的 Y_{t-1}^1 , 方程(22)则是包含同期 Y_t^1 。考虑另外的约束条件 \sum_e 是对角阵,则系统简约形式中的 Ω_2^* 也是对角阵。在模型识别性方面,VAR 模型参数的个数减去结构化模型的参数的个数等于 $(N_e - 1)(N_l + 1)$ 。因此,当 $N_e = 1$ 时,结构化模型是恰好可以识别的,当 $N_e > 1$ 时则结构化模型是过度识别的。

2.3 高斯仿射模型的估计

由于仿射期限结构的简约型参数可以通过 OLS 方法获得,因此一个更为可行的方法是用简约模型参数的最大似然性代替结构模型直接对参数估计的最大似然性,然后将参数估计量在两者之间进行转换。

2.3.1 最小卡方估计方法

令 π 表示简约模型的参数向量(VAR 的 OLS 系数), $\ell(\pi; Y)$ 表示全样本的对数似然函数, $\pi = \text{argmax} \ell(\pi; Y)$ 表示完全信息似然函数估计量, R 是信息矩阵的一致估计量:

$$R = -T^{-1} E \left[\frac{\partial^2 \ell(\pi; Y)}{\partial \pi \partial \pi'} \right]$$

可以通过计算通常的 Wald 统计量检验已知参数向量的函数 $\pi = g(\theta)$:

$$T[\hat{\pi} - g(\theta)]' R [\hat{\pi} - g(\theta)] \tag{28}$$

令 q 表示向量 π 的维数,在原假设下它服从自由度为 q 的卡方分布 $\chi^2(q)$, Rothenberg^[13] 指出对于 $\bar{\theta}$ 的估计可以基于(28)最小化卡方统计量得到。

根据 Rothenberg^[13],关于 $\bar{\theta}$ 的渐进标准误可以通过对 $g(\theta)$ 线性展开得到。假定模型存在一个真实值 θ_0 满足 $g(\theta_0) = \pi_0$, $g(\theta)$ 在 θ_0 处的展开表达式为 $g(\theta) \simeq \gamma + \Gamma\theta$, 其中 $\Gamma = \partial g(\theta) / \partial \theta' |_{\theta=\theta_0}$, $\gamma =$

$g(\theta_0) - \Gamma\theta_0$, 并且 $\hat{\pi} \xrightarrow{p} \pi_0$ 。定义最小卡方估计量为 $\bar{\theta}^*$, 它是优化问题 $\min_{\theta} T[\hat{\pi} - \gamma - \Gamma\theta]' R [\hat{\pi} - \gamma - \Gamma\theta]$ 的解,其一阶条件为 $\Gamma' R (\hat{\pi} - \gamma - \Gamma\bar{\theta}^*) = 0$, 由此解得 $\bar{\theta}^* = (\Gamma' R \Gamma)^{-1} \Gamma' R (\hat{\pi} - \gamma)$ 。由于 $\hat{\pi}$ 的分布满足 $\sqrt{T}(\hat{\pi} - \pi_0) \xrightarrow{L} N(0, R^{-1})$, 由 $\bar{\theta}^*$ 关于 $\hat{\pi}$ 的解析式可得 $\bar{\theta}^*$ 的分布满足: $\sqrt{T}(\bar{\theta}^* - \theta_0) \xrightarrow{L} N(0, [\Gamma' R \Gamma]^{-1})$, 因此 $\bar{\theta}^*$ 的渐进协方差矩阵为 $T^{-1}(\hat{\Gamma} \hat{R} \hat{\Gamma})^{-1}$, 其中 $\hat{\Gamma} = \partial g(\theta) / \partial \theta' |_{\theta=\theta_0}$ 。Hamilton 和 Wu^[12] 附录 E 证明 MCSE 的渐进协方差与 MLE 估计量 $\bar{\theta}$ 的渐进协方差相等,由此可以得到 MCSE 和 MLE 是渐进等价的,MCSE 继承了 MLE 的渐进统计性质。

对于恰好可识别的情形,(28)式的值恰好为零,不失一般性的最小化如下表达式:

$$[\hat{\pi} - g(\theta)]' [\hat{\pi} - g(\theta)] \tag{29}$$

这种情形下,如果(29)的最优值为零,那么 $\bar{\theta}$ 在数值上和结构化模型的 MLE 的值相等。尽管如此,相对于传统最大似然函数法,MCSE 方法具有两大优点:其一,如果需要判断 $\bar{\theta}$ 是否是似然函数的全局最大值,可以通过检验(29)的值是否为零。而在传统方法研究框架下,需要试用数百个初始值以检验找到的值是否是似然函数的全局最大值,即使这样也不一定能保证;其二,最小化(28)或者(29)比最大化结构化模型的似然函数在计算上更为简单。

2.3.2 高斯仿射模型的参数估计

对于 $N_e = 1$ 的情形即模型恰好可识别,给出结构化模型的参数估计值。简约化模型的参数向量可表示为:

$$\pi = (\{\text{vec}([A_1^* \ \varphi_{11}^*]')\})', [\text{vech}(\Omega_1^*)]', \{\text{vec}([A_2^* \ \varphi_{21}^*]')\}' , [\text{diag}(\Omega_2^*)]'$$

$\text{vec}(X)$ 表示由 X 的列向量垒积的列向量, $\text{vech}(X)$ 表示由正定对称矩阵 X 的主对角线及其以

下元素的列向量全积的列向量, $\text{diag}(X)$ 表示由 X 的对角线元素全积的列向量。因为 u_{1t}^* 和 u_{2t}^* 是独立的, 所以由观测集 Y_1 和 Y_2 可以得到 π 的完全信息极大似然估计量(FIML)。由于(19)式的每一个方程都有着相同的解释变量, FIML 估计量 $[A_1^*, \varphi_{11}^*]$ 的第 i 行通过 Y_{it}^1 对 Y_{t-1}^1 OLS 回归得到。 $\hat{\Omega}_1^*$ 可以通过 OLS 残差估计得到:

$$\hat{\Omega}_1^* = T^{-1} \sum_{t=1}^T (Y_t^1 - \hat{A}_1^* - \hat{\varphi}_{11}^* Y_{t-1}^1)(Y_t^1 - \hat{A}_1^* - \hat{\varphi}_{11}^* Y_{t-1}^1)'$$

类似地, π 元素的其他估计量通过 Y_{it}^2 对 Y_{t-1}^2 OLS 回归得到。

在 $N_t = 3$ 和 $N_e = 1$ 的情况下, 根据表 1 中两类模型之间的映射关系, 最小化(29)使得结构型参数通过简约型参数转换得到, 具体步骤如下:

(1) \sum_e 的估计量可以通过估计量 $\hat{\Omega}_2^*$ 的平方根得到;

(2) ρ^Q 和 δ_1 的值可以用数值方法解(24)和(26)得到:

$$[B_2(\bar{\rho}^Q, \bar{\delta}_1)][B_1(\bar{\rho}^Q, \bar{\delta}_1)]' = \hat{\varphi}_{21}^* \hat{\Omega}_1^*$$

$$[B_1(\bar{\rho}^Q, \bar{\delta}_1)][B_1(\bar{\rho}^Q, \bar{\delta}_1)]' = \hat{\Omega}_1^*$$

令 $\pi_2 = ([\text{vec}(\hat{\varphi}_{21}^* \hat{\Omega}_1^*)]', [\text{vech}(\hat{\Omega}_1^*)]')'$, $g_2(\rho^Q, \delta_1) = ([\text{vec}(B_2 B_1)']', [\text{vech}(B_1 B_1)']')'$, 用数值方法最小化 $[\hat{\pi}_2 - g_2(\rho^Q, \delta_1)]' [\hat{\pi}_2 - g_2(\rho^Q, \delta_1)]$ 可以得到 $\bar{\rho}^Q$ 和 $\bar{\delta}_1$ 的值。

(3) ρ 的值可以对(21)用解析的方法得到:

$$\bar{\rho} = \hat{B}_1^{-1} \hat{\varphi}_{11}^* \hat{B}_1$$

其中 \hat{B}_1 是由第二步得到的值。

(4) 通过数值求解(20)和(23)式可以得到 δ_0 和 c^Q 的值:

$$(I_3 - \hat{B}_1 \bar{\rho} \hat{B}_1^{-1}) A_1(\delta_0, c^Q, \bar{\rho}^Q, \bar{\delta}_1) = \hat{A}_1^*$$

$$A_2(\delta_0, c^Q, \bar{\rho}^Q, \bar{\delta}_1) - \hat{B}_2 \hat{B}_1^{-1} A_1(\delta_0, c^Q, \bar{\rho}^Q, \bar{\delta}_1) = \hat{A}_2^*$$

其中 \hat{B}_1 , \hat{B}_2 , $\bar{\rho}^Q$ 和 $\bar{\delta}_1$ 是前几步估计得到的值。

3 高斯仿射期限结构的实证研究

与理论部分保持一致, 结合简约模型和结构化模型参数的函数关系, 高斯仿射期限结构模型 MCS 方法的实证研究主要包含两个部分: 其一, 简约模型的参数估计。简约模型实质上是一个 VAR 模型, 直接采用 OLS 方法估计; 其二, 结构化模型的参数估计。利用 2.3.2 部分简约模型和结构模型参数的函数关系, 采用 MCS 方法实现简约型参数向结构

型参数的转换。

3.1 数据来源及处理

随着中国资本市场的不断深化发展和创新, 中国国债期限结构也在不断丰富, 而且随着国债期货推出时间的临近, 可以预测的是中国国债市场的交易规模和交易频率将会有显著的提升, 国债市场的市场活力进一步增强, 这些因素将会提高国债期限结构的市场化程度。

本文研究利率期限结构的样本区间从 2006 年 1 月到 2013 年 7 月, 数据来源于 Wind 数据库, 选择每个月月末平滑调整的零息票国债期限结构。根据 Christensen, Diebold 和 Rudebusch^[6] 的研究, 将选择三个没有观测误差的代表性期限 Y_t^1 , 它们分别表示水平因子、斜率因子和曲率因子, 本文选择的期限分别为 1 年期、5 年期和 10 年期, 预测的有观测误差的期限 Y_t^2 为 2 年期。

3.2 简约化模型的实证研究

由结构化模型衍生出的简约化模型是一个向量自回归过程, 它在本文中的作用主要包含两个方面: 其一, 用它的参数估计量估计结构型参数。完整的简约模型由(19), (22)和(25)三个方程构成, 其中(19)是无观测误差收益率 Y_t^1 的 VAR, 它仅仅包含一阶滞后项, (22)是存在观测误差的向量 Y_t^2 的 VAR, 它的解释变量仅仅包括向量 Y_t^1 , 不含其它滞后项, (25)是关于这两个 VAR 方程扰动项的分布假定, 简约型参数和结构型参数的转换是基于 MSC 估计方法; 其二, 用简约模型预测各个期限的收益率。本文用 OLS 方法估计了简约型参数, 估计结果如表 2 和表 3 所示, 图 1 和图 2 给出了 1 年期、2 年期、5 年期和 10 年期四个期限收益率的观测值和预测值。

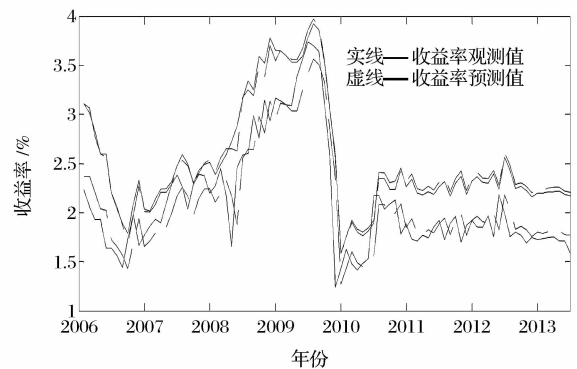


图 1 简约型模型 1 年期和 2 年期收益率的预测值和观测值

表 2 简约化模型(19)式参数 φ_{11}^* 和 A_1^* 以及(22)式 φ_{21}^* 的估计值

φ_{11}^*	$\varphi_{11}^* (. , 1)$	$\varphi_{11}^* (. , 2)$	$\varphi_{11}^* (. , 3)$	A_1^*	$(\varphi_{21}^*)^T$
$\varphi_{11}^* (1, .)$	0.7381 (0.09434) **	0.3797 (0.3445)	-0.1979 (0.3495)	0.05818 (0.4062)	0.4757 (0.02240) **
$\varphi_{11}^* (2, .)$	-0.1654 (0.06788) **	1.3868 (0.2478) **	-0.4261 (0.2514) *	0.6947 (0.2923) **	1.1776 (0.08191) **
$\varphi_{11}^* (3, .)$	-0.1888 (0.06548) **	0.5897 (0.2391) *	0.3419 (0.2425) *	0.9668 (0.2819) **	-0.7465 (0.08308) **

注:括号中数值为参数的标准误,“*”表示参数值在 5%水平上显著,“**”表示在 1%水平上显著。

表 3 简约化模型(19)式参数 Ω_i^* 以及(22)式 A_2^* 和 Ω_2^* 的估计值

Ω_i^*	$\Omega_i^* (. , 1)$	$\Omega_i^* (. , 2)$	$\Omega_i^* (. , 3)$	A_2^*
$\Omega_1^* (1, .)$	0.05954	0.01965	0.01121	0.5029(0.09659) **
$\Omega_1^* (2, .)$	0.01965	0.03082	0.02798	Ω_2^*
$\Omega_1^* (3, .)$	0.01121	0.02798	0.02867	0.003367

注:括号中数值为参数的标准误,“*”表示参数值在 5%水平上显著,“**”表示在 1%水平上显著。

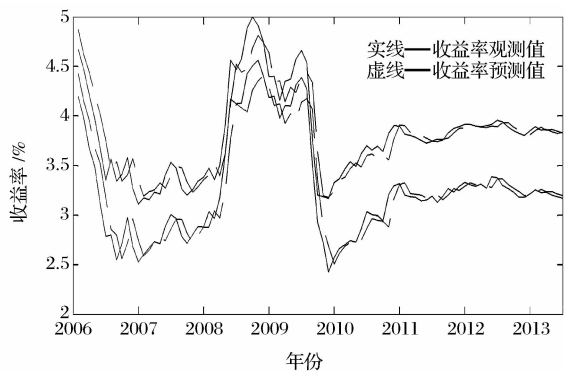


图 2 简约型模型 5 年期和 10 年期收益率的预测值和观测值

从表 2 和表 3 的估计结果可以看到,简约模型的 16 个变量系数的估计值有着良好的统计性质,它们在 5%水平上基本显著。从模型预测的角度看,结构型系统衍生出的简约型系统可以用于收益率的预测。从图 1 和图 2 给出的收益率观测值和预测值可以看到,简约模型很好的刻画了这四个期限的收益率。在样本观测期限内,收益率预测值在一定的

精度范围内很好的把握了收益率观测值的时间序列趋势。

尽管从结构化模型的角度看,简约模型的参数估计值仅仅是一个中间变量,它们的统计性质似乎对结构型参数的估计不产生直接影响,但是这两类模型之间的内在联系表明,简约模型参数统计性质的优劣一定程度上也反应了结构化模型设定的合理性。如果简约型参数有着良好的统计性质,则简约型系统用于收益率预测具有一定合理性,也就是说对应设定的结构化模型具有相应的理论和实证基础,也能够体现出结构型参数的统计信息,应该具有良好的统计性质。因此,从表 2 和表 3 的参数统计性质可以间接知道结构化模型的参数也应该具有良好的统计性质。

3.3 基于 MCS 方法高斯仿射模型实证研究

高斯仿射模型的参数估计是本文的核心问题之一。MCS 方法将简约型参数估计值转化为结构型参数估计值,其优势主要在于:其一,部分克服了数值最大化结构化模型似然函数的参数值可能不是全局最大值的问题,而且这种方法包含的数值计算成分很少,在计算上也具备相应的优势;其二,MCS 方法参数估计量的统计性质继承了极大似然估计量的所有渐进性质,两种估计量的标准误在统计上是等价的。结合 2.3.2 小节,采用 MCS 方法估计结构化模型,参数估计的顺序依次为 $\sum_c, \rho^Q, \delta_1, \rho, \delta_0$ 和 c^Q ,具体估计结果见表 4 和表 5。

表 4 高斯仿射模型(12)式参数 ρ^Q 和 c^Q 以及(13)式 δ_1 的估计值

ρ^Q	$\rho^Q (. , 1)$	$\rho^Q (. , 2)$	$\rho^Q (. , 3)$	c^Q	δ_1
$\rho^Q (1, .)$	0.8903 (0.01084)	0	0	-0.8887 (0.04713)	2.2e-05 (0.006241)
$\rho^Q (2, .)$	0.2224 (0.1167)	0.8647 (0.08642)	0	6.4751 (0.1433)	0.2995 (0.001605)
$\rho^Q (3, .)$	-0.05821 (0.003336)	-0.04355 (0.001687)	0.9929 (0.01645)	0.5276 (0.03346)	0.1919 (0.02339)

注:表 4 给出的是 Q-测度下因子过程的参数估计值,括号中数值为参数的渐进标准误,它是用 Chen 和 Scott^[15]的极大似然方法得到。

表 5 高斯仿射模型(18)式参数 ρ 和(13)式 δ_0 以及(17)式 Σ_e 的估计值

ρ	$\rho(\cdot, 1)$	$\rho(\cdot, 2)$	$\rho(\cdot, 3)$	δ_0
$\rho(1, \cdot)$	0.7604 (0.03059)	0.03168 (0.008689)	-0.1070 (0.02378)	-2.3664 (0.02954)
$\rho(2, \cdot)$	-0.08541 (0.01344)	0.8647 (0.02313)	-0.08889 (0.001537)	Σ_e
$\rho(3, \cdot)$	-0.1212 (0.008689)	0.1322 (0.005865)	0.8416 (0.02142)	0.05803 (0.005454)

注:表 5 给出的是 P-测度下因子过程的参数估计值,括号中数值为参数的渐进标准误,它是用 Chen 和 Scott^[15]的极大似然方法得到。

表 4 和表 5 给出了结构型参数估计值和标准误,参数估计值是用 MCS 方法按照 2.3.2 小节的步骤得到,标准误估计则是利用 MLE 和 MCS 估计量渐进标准误的等价性,结合 Chen 和 Scott^[15]结构化模型的似然函数和已知的参数估计值得到。从表 4 和表 5 可以看到,结构型参数具有很好的统计性质,这与简约型参数保持了一致,因此,可以看到这两类模型参数估计量的统计性质的优劣具有一致性。由于采用 OLS 方法得到简约模型参数的统计信息简单,一定程度上有助于结构化模型的合理设定。另外,需要正确的看待标准误估计可能存在的异常情况。由于似然函数对参数的高度非线性,在参数估计值处进行数值微分可能发生突变,从而导致参数统计性质不理想,这时对待异常的渐进标准误需要谨慎。

4 结语

在利率市场化背景下,研究利率期限结构的动态过程是研究资产及衍生品定价、金融风险管理和资产组合配置等工作的基础。在利率期限理论文献中,仿射利率期限结构模型为研究利率形成机制的可操作性提供了便利,给出了利率的解析解或者是半解析解。但是,这类模型在理论和实证两个方面存在一定的不足:在理论层面,高斯仿射期限结构模型参数的存在识别性问题,Collin-Dufresne, Goldstein 和 Jones^[8], Ait-Sahalia 和 Kimmel^[9]证明 Dai Qiang 和 Singleton^[3]的经典表示是不可识别的;在实证层面,用数值方法估计模型参数时似然函数优化高度依赖初始值,通常用多个初始值搜索直到函数收敛得到的估计值并非是似然函数的全局最大值。针对上述高斯仿射期限结构的两点不足,本文采用 MCS 方法加以修正,其结论如下:

(1)关于高斯仿射模型的参数识别。从高斯仿射模型的结构化模型和简约模型参数的关系出发,简约型参数是结构型参数的函数。如果结构型参数的个数多于简约型则高斯模型不可识别,两者参数

个数相等则是恰好可识别,而结构型参数少于简约型则是过度识别的。在三因子标准化期限结构表示框架下,本文指出在存在观测误差收益率的个数为 1 的情形下高斯模型恰好可识别,而观测误差期限的个数多于 1 的情形下模型是过度识别的。

(2)采用 MCS 方法得到参数的统计性质。采用 MCS 方法将简约型参数转换为结构型,该估计量继承了结构化模型极大似然估计量的所有渐进性质,理论上这两种方法得到的估计量在统计上无差异的。MCS 方法相对于极大似然方法的优势在于参数估计过程数值计算的简洁性和估计结果的可靠性,MCSE 是结构化模型似然函数的全局最大值点。

(3)本文国债利率期限结构的实证研究结论。实证研究结果表明采用 MCS 方法的高斯仿射模型很好的拟合了观测的期限结构,并且整体上看简约型和结构型的参数估计量统计性质的优劣具有一致性。通常情况下,简约型参数的估计量具有良好的统计性质则意味着结构型参数也应该具有良好的性质,这是由两类模型的内在一致性所决定的,实证结果也证实了这一点。

参考文献:

[1] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5 (2):177-188.

[2] Duffie D, Kan Rui. A yield-factor model of interest rates[J]. Mathematical Finance, 1996, 6 (4): 379 - 406.

[3] Dai Qiang, Singleton K J. Expectations puzzles, time-varying risk premia and affine models of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 2002, 63(3): 415-441.

[4] Duffee G R. Term premia and interest rate forecasts in affine models[J]. Journal of Finance, 2002, 57(1):405 - 443.

[5] Cochrane J H, Piazzesi M. Decomposing the yield curve [R]. Working Paper, University of Chicago and NBER,

- 2008.
- [6] Christensen J H E, Diebold F X, Rudebusch G D. The affine arbitrage-free class of nelson-siegel term structure models[J]. *Journal of Econometrics*, 2011, 164(1): 4—20.
- [7] Nelson C R, Siegel A F. Parsimonious modeling of yield curves[J]. *Journal of Business*, 1987, 60(4): 473—489.
- [8] Collin-Dufresne P, Goldstein R S, Jones C S. Identification of maximal affine term structure models[J]. *Journal of Finance*, 2008, 63(2): 743—795.
- [9] Aït-Sahalia Y, Kimmel R L. Estimating affine multifactor term structure models using closed-form likelihood expansions[J]. *Journal of Financial Economics*, 2010, 98(1): 113—144.
- [10] Kim D H. Challenges in macro-finance modeling[R]. Working Paper, Federal Reserve Bank of St. Louis, 2009.
- [11] Ang A., Piazzesi M. A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables[J]. *Journal of Monetary Economics*, 2003, 50(4): 745—787.
- [12] Hamilton J D, Wu J C. Identification and estimation of Gaussian affine term structure models[J]. *Journal of Econometrics*, 2012, 168(2): 315—331.
- [13] Rothenberg T J. Efficient estimation with a priori information[M]. Yale University Press, 1973.
- [14] Joslin S, Singleton K J, Zhu Haoxiang. A new perspective on gaussian dynamic term structure models [J]. *Review of Financial Studies*, 2011, 24(3): 926—970.
- [15] Chen R R, Scott L. Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates[J]. *The Journal of Fixed Income*, 1993, 3(3): 14—31.
- [16] Le A, Dai Qiang, Singleton K J. Discrete-time affine Q term structure models with generalized market prices of risk[J]. *Review of Financial Studies*, 2010, 23(5): 2184—2227.
- [17] 吴恒煜,陈鹏,严武,等. 基于 Copula 的两因子 Vasicek 利率模型实证研究[J]. *管理学报*, 2010, 7(10): 1529—1534.
- [18] 周荣喜,王晓光. 基于多因子仿射利率期限结构模型的国债定价[J]. *中国管理科学*, 2011, 19(4): 26—30.
- [19] 文兴易,黎实. 基于局部线性逼近的利率期限结构动态 NS 模型[J]. *管理学报*, 2012, 9(7): 975—978.

Gaussian Affine Term Structure Model of Interest Rate Based on MCS Approach

BAO Jie, GE Jing

(School of Economics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: The paper is first to study the identification and estimation of Gaussian affine term structure of interest rate based on Minimum-Chi-Square method. As beginning with the normalized Gaussian model, the identification is from the functional relations of parameters between the structure model and reduced-form model, Minimum-Chi-Square estimation has inherited all the asymptotical properties of MLE in structure model and maintains the reliability of estimator. And then, With the term structure of yields implying in monthly bonds price from 2006 to 2013 in Shanghai Stock Exchange (SSE), Gaussian affine term structure model is empirically applied using the MCS method and the results indicate that the Gaussian affine model gives good fitting of term structure and the merits of the statistical properties of estimators are consistent with structure and reduced-form model.

Key words: Gaussian affine term structure; identification; MLE; minimum-Chi-Square estimator