

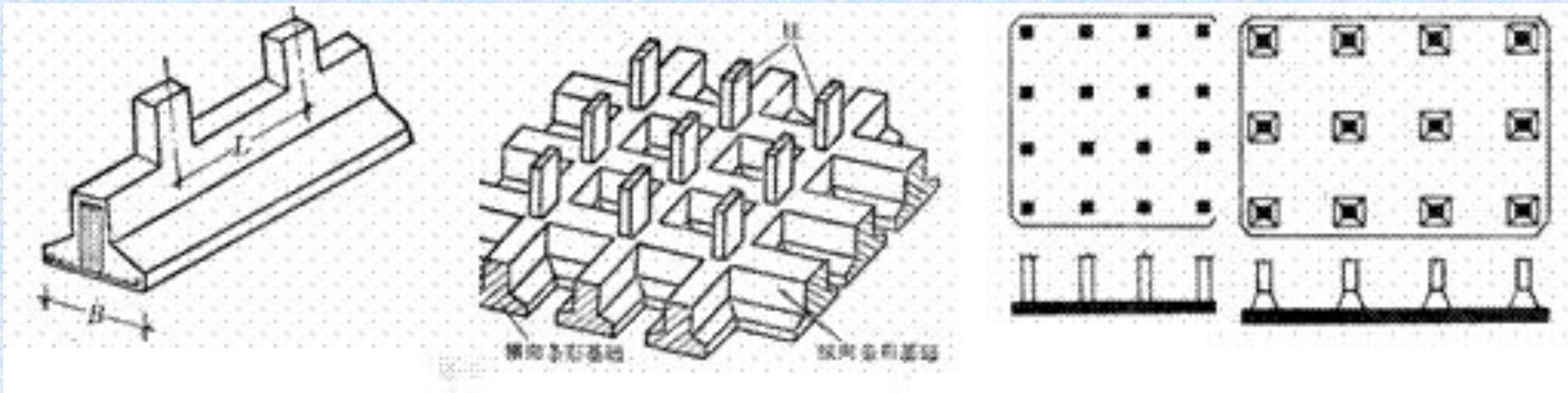
第三章 连续基础

3.1 概述

连续基础：指在柱下连续设置的单向或双向条形基础，或底板连续成片的筏板基础和箱型基础。连续基础的特点：

- 1) 具有较大的基础底面积，因此能承担较大的建筑物荷载，易于满足地基承载力的要求；
- 2) 连续基础的连续性可以大大加强建筑物的整体刚度，有利于减小不均匀沉降及提高建筑的抗震等级；
- 3) 对于箱形基础和设置了地下室的筏板基础，可以有效地提高地基承载力，并能以挖去地土重补偿建筑物地部分（或全部）重量。

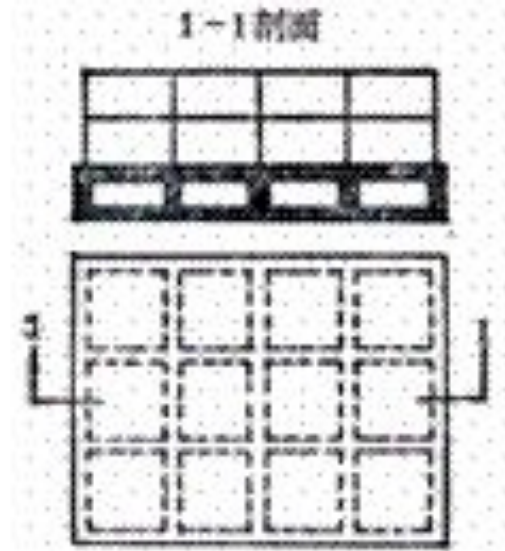
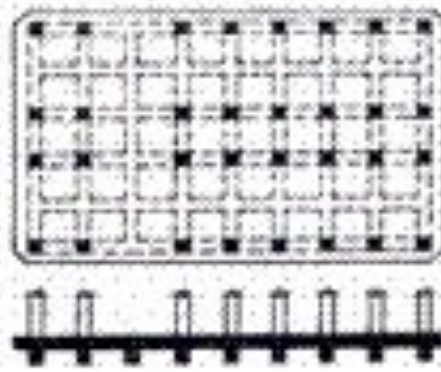
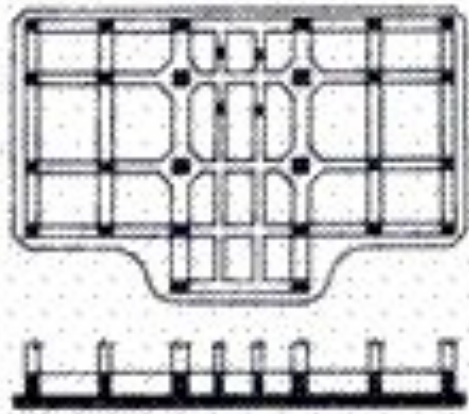
- 连续基础可以是一块平坦的板。为了减少板厚，常在单向或双向设置肋梁，肋梁可以往上也可以往下设置。当底板、墙板和顶板连成整体时，便形成刚度很大的箱形基础。下图是常见的几种连续基础形式。



a) 柱下单向条形基础

b) 十字交叉条形基础

c) 平板式筏板基础



d) 肋梁式筏板基础

e) 箱形基础

由于连续基础高度方向的尺寸远小于其它两个方向的尺寸，可以把它们看成地基上的梁板结构。

当上部结构的荷载通过基础传到地基上时，地基土对基础底面产生反力，在结构和地基反力的共同作用下，连续基础发生挠曲，并产生内力。

- 连续基础的挠曲曲线特征、基底反力和基础内力的分布是上部结构、基础和地基相互作用的结果，应该按三者共同工作的分析方法求得。但这样的设计方法非常复杂。
- 在实践中，当符合一定条件时常采用不考虑共同工作的简化计算方法，另一些情况则按地基上的梁板进行计算，后者仅考虑地基与基础的共同工作。这两种计算方法都未考虑上部结构、基础和地基三者的共同工作，所以应该根据共同工作的概念对计算结果加以修正或采取构造措施。
- **本章的主要内容：**
- 阐述共同工作的基本概念，介绍柱下条形基础、筏板基础、箱形基础的简化设计方法。并通过对地基计算模型和文克尔地基上梁的计算方法的介绍，了解地基上梁板设计的概念和方法。

3.2 地基、基础与上部结构相互作用的概念

- 地基、基础与上部结构的相互作用一直是国内外的一项重要研究课题。诸如关于建筑物地基的允许变形值、梁板式基础的计算以及软弱地基上建筑物的设计与施工措施等问题,都要涉及有关相互作用的概念。
- 按常规设计法设计时,更应把地基、基础与上部结构由一个统一的整体,从三者相互作用的概念出发来考虑地基基础方案。尤其是当地基比较复杂时,如果能从上部结构方面配合采取适当的建筑、结构、施工等不同措施往往可以收到合理、经济的效果。

3.2.1地基与基础的相互作用

- 1.基底反力的分布规律
- 在常规设计法中，通常假设基底反力呈线性分布。但事实上，基底反力的分布是非常复杂的，除了与地基因素有关外，还受基础及上部结构的制约。为了便于分析，下面仅考虑基础本身刚度的作用而忽略上部结构的影响。
- (1) 柔性基础
- 抗弯刚度很小的基础可视为柔性基础。它就像一块放在地基上的柔软薄膜可以随着地基的变形而任意弯曲。柔性基础不能扩散应力，因此基底反力分布与作用于基础上的荷载分布完全一致如图(3-1)所示。

- 按弹性半空间理论所得的计算结果以及工程实践经验都表明：均布荷载下柔性基础的沉降呈碟形，即中部大、边缘小 [图 3-1 (a)]。显然，若要使柔性基础的沉降趋于均匀，就必须增大基础边缘的荷载，并使中部的相应减少，这样，荷载和反力就变成了图 3.1 (b) 所示的非均有的形状了。

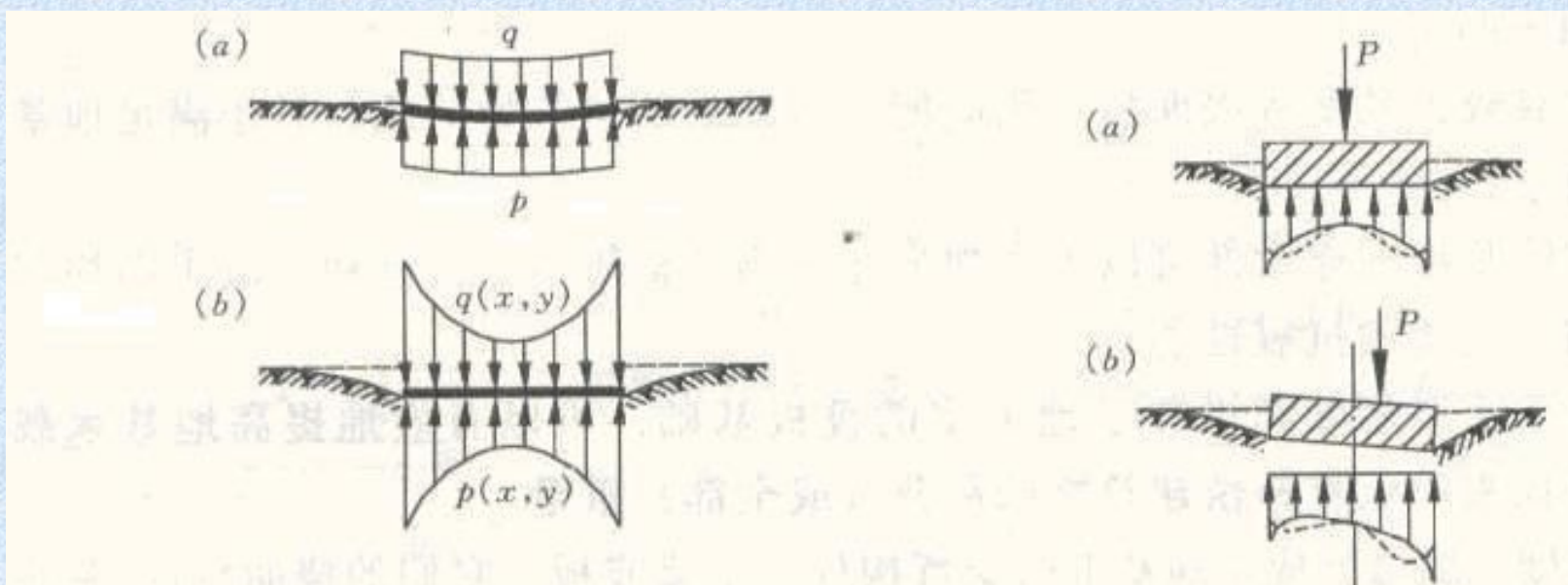


图 3-1 柔性基础的基底反力和沉降

(a) 荷载均布时, $p(x, y) = \text{常数}$;

(b) 沉降均匀时, $p(x, y) \neq \text{常数}$

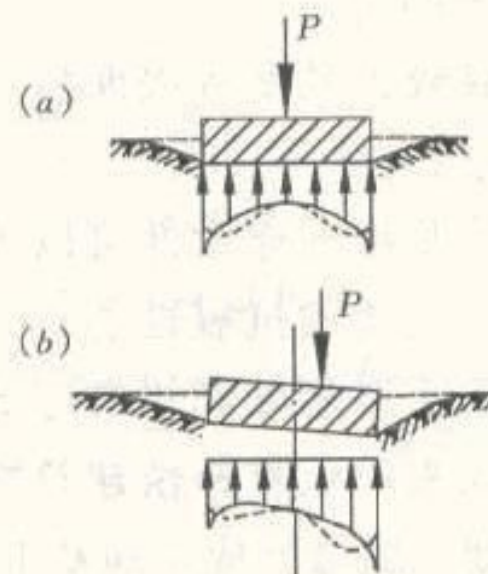


图 3-2 刚性基础

(a) 中心荷载; (b) 偏心荷载

- (2) 刚性基础

- 刚性基础的抗弯刚度极大，原来是平面的基底 沉降后依然保持平面。因此在中心荷载作用下，基础将均匀下沉。根据上述柔性基础沉降均匀时基底反力不均匀的论述，可以推断，中心荷载下的刚性基础基底反力分布也应该是边缘大、中部小。
- 图3-2中的实线反力图为按弹性半空理论求得的刚性基础基底反力图，在基底边缘处，其值趋于无穷大。事实上，由于地基土的抗剪强度有限，基底边缘处的土体将首先发生的切破坏，因此，此处的反力将被限制在一定的数值范围内。随着反力的重新分布，最终的反力图可呈如图 3-2 中虚线所图示的马鞍形。由此可见 刚性基础能跨越基底中部，将所承担的荷载相对集中地传至基底边缘，这种现象称为基础的“架越作用”。

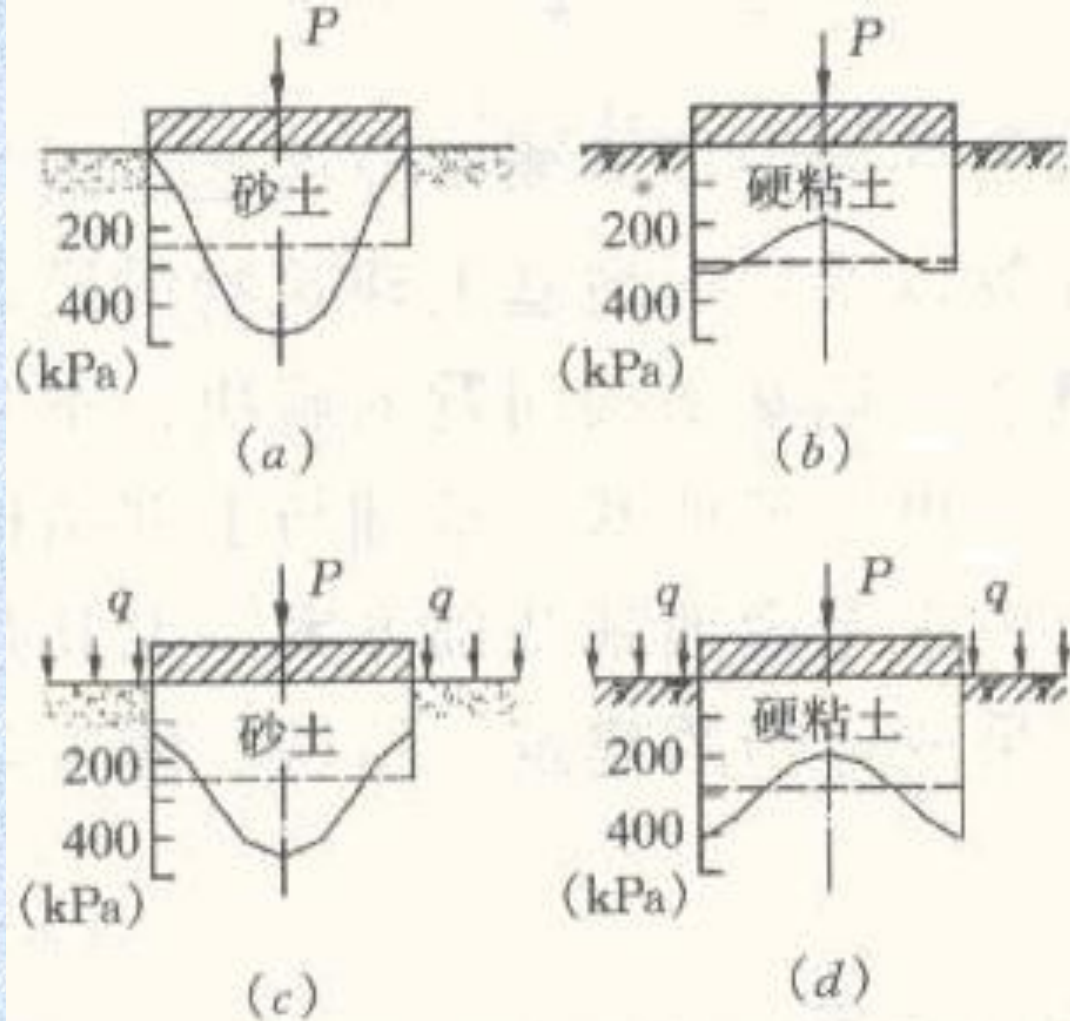


图 3-3 圆形刚性基础模型底面反力分布图
 (a) 无超载; (b) 无超载;
 (c) 有超载; (d) 有超载

图3-3是分别置于砂土和硬粘土上的圆形刚性基础模型底面的实测反力分布图。对于硬粘土上的刚性基础，基底反力均呈马鞍形分布[图 (b) 和 (d)]; 对于砂土 由于基底边缘处的砂粒极易朝侧向挤出，因此邻近基底边缘的塑性区随荷载的增加而迅速开展，所增加的荷载必须靠基底中部反力的增大来平衡，基底力接近抛物线分布[图 (a) 和 (c)]。

- 一般来说，无论粘性土或无粘性土地基，只要刚性基础埋深和基底面积足够而荷载又不太大时，基底反力均呈马鞍形分布。
- **(3) 基础相对刚度的影响**
- **图3-4 (a)** 表示粘性土地基上相对刚度很大的基础。当荷载不太大时，基础中的塑性区很小，基础的架越作用很明显；随着荷载的增加，塑性区不断扩大，基底反力将逐渐趋于均匀。在接近液态的软土中，反力近乎呈直线分布。
- **图3-4 (c)** 表示岩石地基上相对刚度很小的基础，其扩散能力很低，基底出现反力集中的现象，此时基础的内力很小。
- 对于一般粘性土地基上相对刚度中等的基础[**图3-4(b)**]，其情况介乎于上述两者之间。

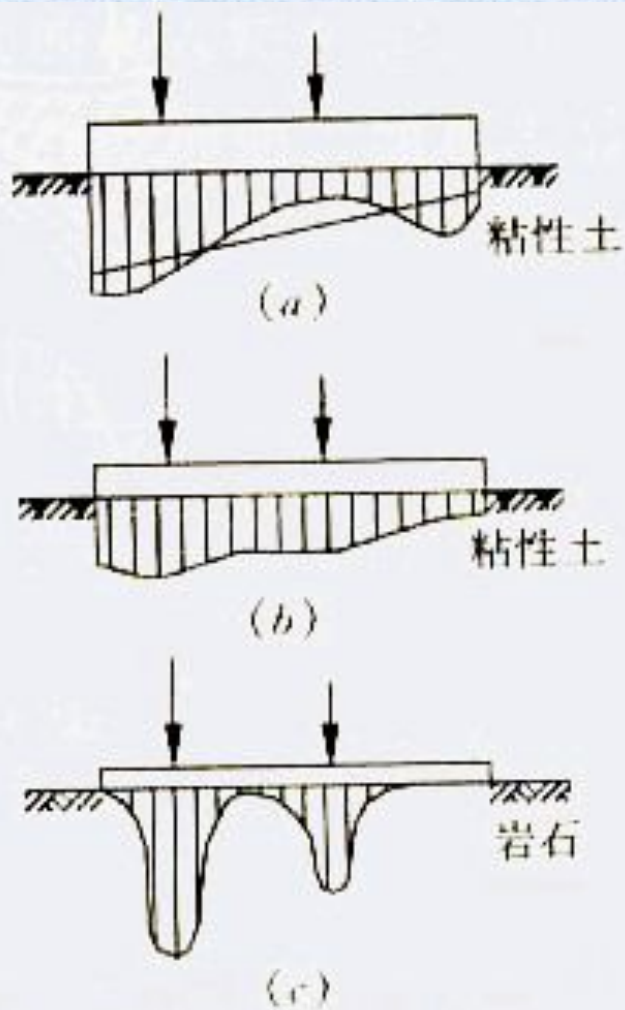


图 3-4 基础相

对刚度与架越作用

(a) 基础刚度大；(b) 基础
刚度适中；(c) 基础刚度小

归纳以上的讨论，可以得出这样的结论：

基础架越作用的强弱取决于基础的相对刚度、土的压缩性以及基底塑性区的大小。

一般来说，基础的相对刚度愈强，沉降就愈均匀，但基础的内力将相应增大，故当地基局部软硬变化较大时（如石芽型地基），可以采用整体刚度较大的连续基础；而当地基为岩石或压缩性很低的土层时，宜优先考虑采用扩展基础，如采用连续基础，抗弯刚度不宜太大，这样可以取得较为经济的效果。

- **(4) 邻近荷载的影响**

- 上述有关基底反力分布的规律是在无邻近荷载影响的情况下得出的。如果基础受到相邻荷载影响，受影响一侧的沉降量会增大，从而引起反力卸载并使反力向基础中部转移，此时基底反力分布会发生明显的变化。例如，上海市四平大楼的第三单元两端各有紧靠的同时建造的相邻单元，其箱基纵向基底反力分布呈现为中间大两端小的向下凸的双拱形而显著地有别于无邻近荷载影响时的马鞍形分布。

2 地基非均质性的影响

- 当地基压缩性显著不均匀时，按常规设计法求得的基础内力可能与实际情况相差很大。图3-5表示地基压缩性不均匀的两种相反情况：两基础的柱荷载相同，但其挠度情况和弯矩图则截然不同。柱荷载分布情况的不同也会对基础内力造成不同的影响。在图3-6中（a）和（b）的情况最为有利。而（c）和（d）则是最不利的。

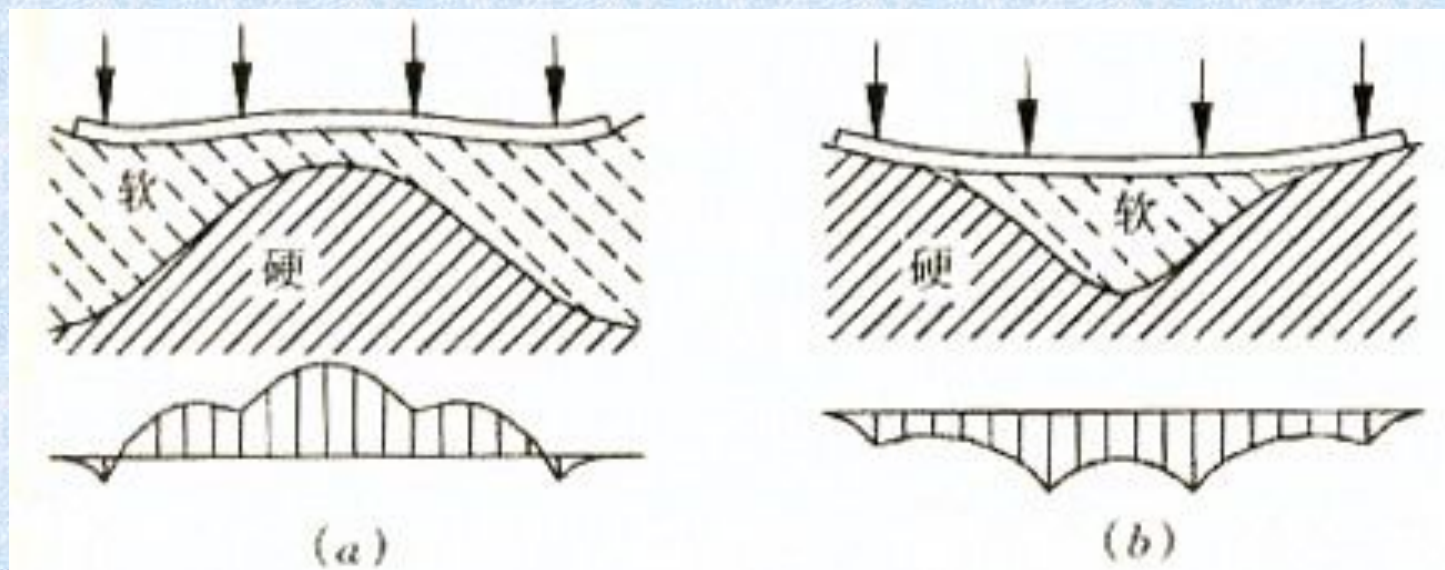


图 3-5 地基压缩性不均匀的影响

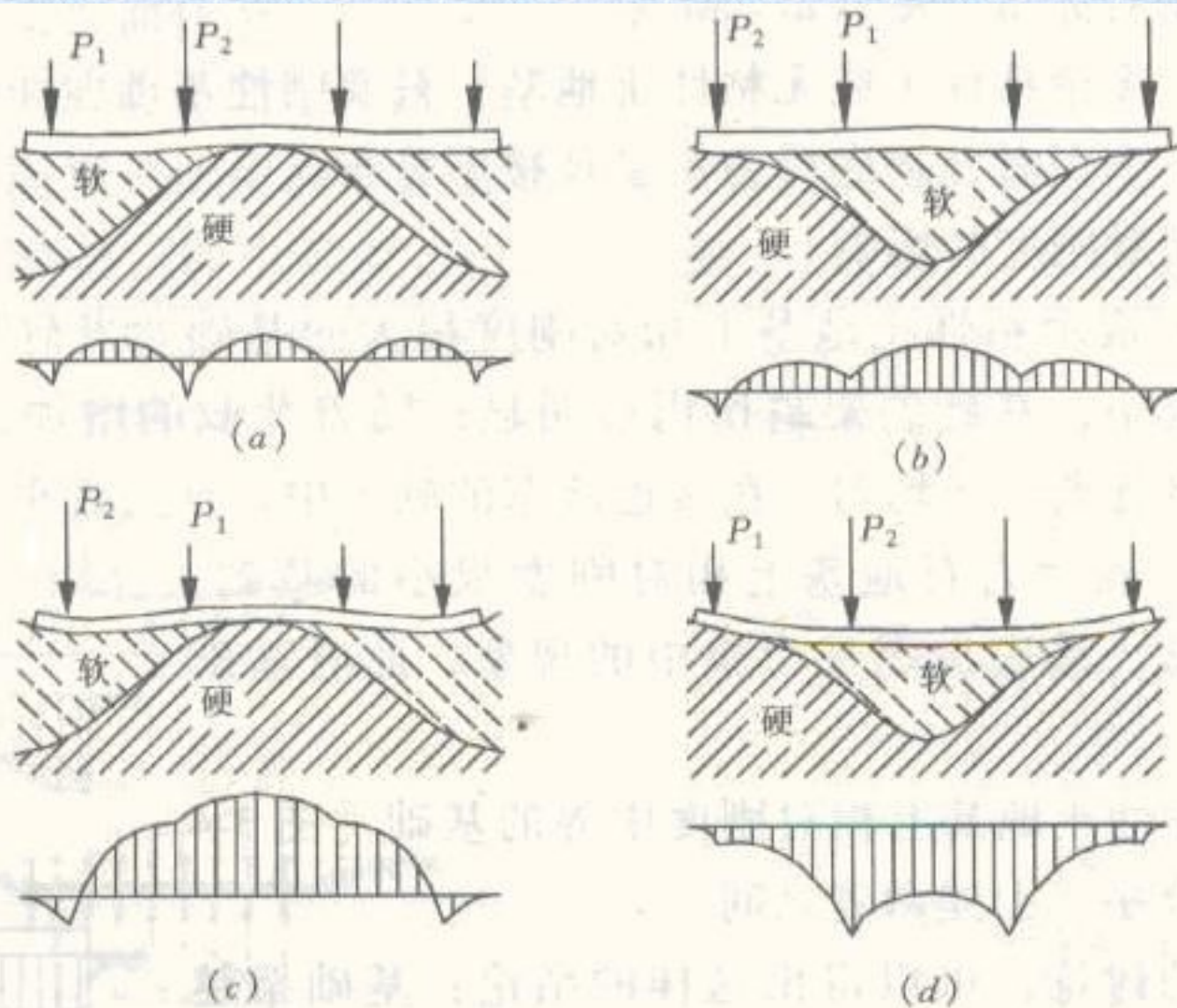


图 3-6 不均匀地基上条形基础柱荷载分布的影响

- 整个上部结构对基础不均匀沉降或挠曲的抵抗能力，称为上部结构刚度，或称为整体刚度。根据整体刚度的大小，可将上部结构分为柔性结构、敏感性结构和刚性结构三类。
- 以屋架-柱-基础为承重体系的木结构和排架结构是典型的柔性结构。由于屋架铰接于柱顶，这类结构对基础的不均匀沉降有很大的顺从性，故基础间的沉降差不会在主体结构中引起多少附加应力。但是，高压缩性地基上的排架结构会因柱基不均匀沉降而出现围护结构的开裂，以及其他结构上和使用功能上的问题（详见2.4.1节）。因此对这类结构的地基变形虽然限制较宽，但仍然不允许基础出现过量的沉降或沉降差。

- 不均匀沉降会引起较大附加应力的结构 称为敏感性结构，例如 砖石砌体承重结构和钢筋混凝土框架结构。敏感性结构对基础间的沉降差较敏感，很小的沉降差异就足以引起可观的附加应力。因此，若结构本身的强度贮备不足 就很容易发生开裂现象。
- 上部结构的刚度愈大，其调整不均匀沉降的能力就愈强。因此，可以通过加大或加强结构的整体刚度以及在建筑、结构和施工等方面采取适当的措施（详见2.8节）来防止不均匀沉降对建筑物的损害。对于采用单独柱基的框架结构，设置基础梁（地梁）是加大结构刚度、减少不均匀沉降的有效措施之一。

- 坐落在均质地基上的多层多跨框架结构，其沉降规律通常是中部大、端部小。这种不均匀沉降不仅会在框架中产生可观的附加弯矩，还会引起柱荷载重分配现象。这种现象随着上部结构刚度增大而加剧。对一 **8跨15层**框架结构的相互作用分析表明。边柱荷载增加了**40%**，而内柱则普遍卸载，中柱卸载可达回**10%**。由此可见，对于高压缩性地基上的框架结构。按不考虑相互作用的常规方设计，结果常使上部结构偏于不安全。
- 基础刚度愈大，其挠曲愈小，则上部结构的次应力也愈小。因此，对高压缩性地基上的框架结构，基础刚度一般宜刚而不宜柔；而对柔性结构。在满足允许值的前提下，基础刚度宜小不宜大，而且不一定需要采用连续基础。

- 刚性结构指的是烟囱、水塔、高炉、筒仓这类刚度很大的高耸结构物，其下常为整体配置的独立基础。
- 当地基不均匀或在邻近建筑物荷载或地面大面积堆载影响下，基础转动倾斜，但几乎不会发生相对挠曲。

3.2.3 上部结构刚度对地基受力状况的影响

目前，梁、板式基础的计算，还不能普遍考虑与上部结构的相互作用，然而，当上部结构具有较大的相对刚度（与基础刚度之比）时，对基础受力状况的影响是不小的，现用条形基础作例子来讨论。为了便于说明概念，以绝对刚性和完全柔性的两种上部结构对条形基础的影响进行对比。

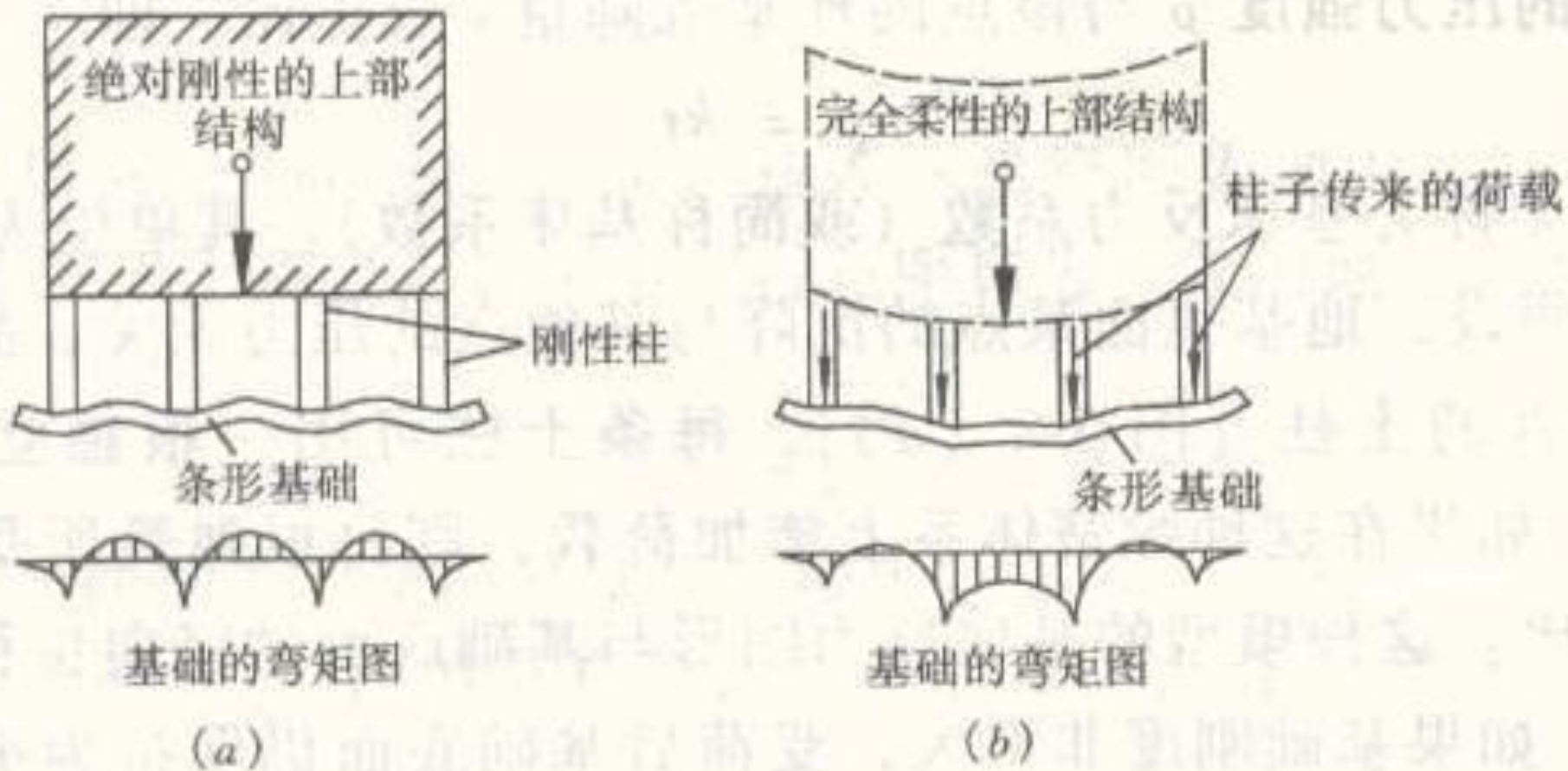


图 3-7 上部结构刚度对基础受力状况的影响

(a) 上部结构为绝对刚性时；(b) 上部结构为完全柔性时

- 如图 3-7，图（a）中的上部结构假定是绝对刚性的，因而当地基变形时，柱子只能同时下沉，对条形基础的变形来说，相当于在柱位处提供了不动支座，在地基反力作用下，犹如倒置的连续梁（不计柱脚的抗角变能力）。如图（b）的上部结构假想为完全柔性的。因此，它除了传递荷载外，对条形基础的变形毫无制约作用，即上部结构不参与相互作用。由图 3-7中的对比可知，在上部结构绝对刚性和完全柔性这两种极端情况下，条形基础的挠曲形式及相应的内力图形差别很大。必须指出。除了像烟囱、高炉等整体构筑物可以认为是绝对刚性者外，绝大多数建筑物的实际刚度介于绝对刚度和完全柔性之间，不过目前还难于定量计算，在实践中往往只能定性判断其比较接近哪一种极端情况。例如剪力墙体系和筒体结构的高层建筑是接近绝对刚性的；单层排架和静定结构是接近完全柔性的。这些判断将有助于地基基础的设计工作。

- 增大上部结构刚度，将减小基础挠曲和内力。研究表明，框架结构的刚度随层数增加而增加，但增加的速度逐渐减缓，到达一定层数后便趋于稳定。例如，上部结构抵抗不均匀沉降的竖向刚度在层数超过**15**层后就基本上保持不变了。由此可见，在框架结构中下部一定数量的楼层结构明显起着调整不均匀沉降、削减基础整体弯曲的作用，同时自身也将出现较大的次应力，且层次位置愈低，其作用也愈大。
- 如果地基土的压缩性很低，基础的不均匀沉降很小，则考虑地基-基础-上部结构三者相互作用的意义就不大。因此，在相互作用中起主导作用的是地基，其次是基础，而上部结构则是在压缩性地基上基础整体刚度有限时起重要作用的因素。

3. 3 地基计算模型

- 进行地基上梁和板的分析时，必须解决基底压力分布和地基沉降计算问题，这些问题都涉及土的**应力与应变关系**。表达这种关系的模式称为地基计算模型，简称为地基模型。每一模型应尽可能准确地模拟地基与基础相互作用时所表现的主要力学性状，同时又要便于应用。至今已经提出了不少地基模型。然而由于问题的复杂性，不论哪一种模型都难以完全反映地基的实际工作性状。因而各具有一定的局限性。本节仅介绍最简单和最常用的三种线性弹性计算模型。

3.3.1 文克勒地基模型

- 早在 1867 年，捷克工程师E.文克勒（Winkler）就提出了如下的假设：地基上任一点所受的压力强度 P 与该点的地基沉降量 S 成正比，即

$$p=ks \quad (3-1)$$

- 式中比例系数 k 称为基床反力系数（或简称基床系数），其单位为 kN/m^3 。

- 根据这一假设，地基表面某点的沉降与其他点的压力无关，故可把地基土体划分成许多竖直的土柱 [图 3-8 (a)]，每条土柱可用一根独立的弹簧来代替[图 3-8 (b)]。如果在这种弹簧体系上施加荷载，则每根弹簧所受的压力与该弹簧的变形成正比。这种模型的基底反力图形与基础底面的竖向位移形状是相似的 [图3-8 (b)]。如果基础刚度非常大，受荷后基础底面仍保持为平面，则基底反力图按直线规律变化[图3-8 (c)]。这就是上一章在常规设计中所采用的基底反力简化算法所依据的计算图式。

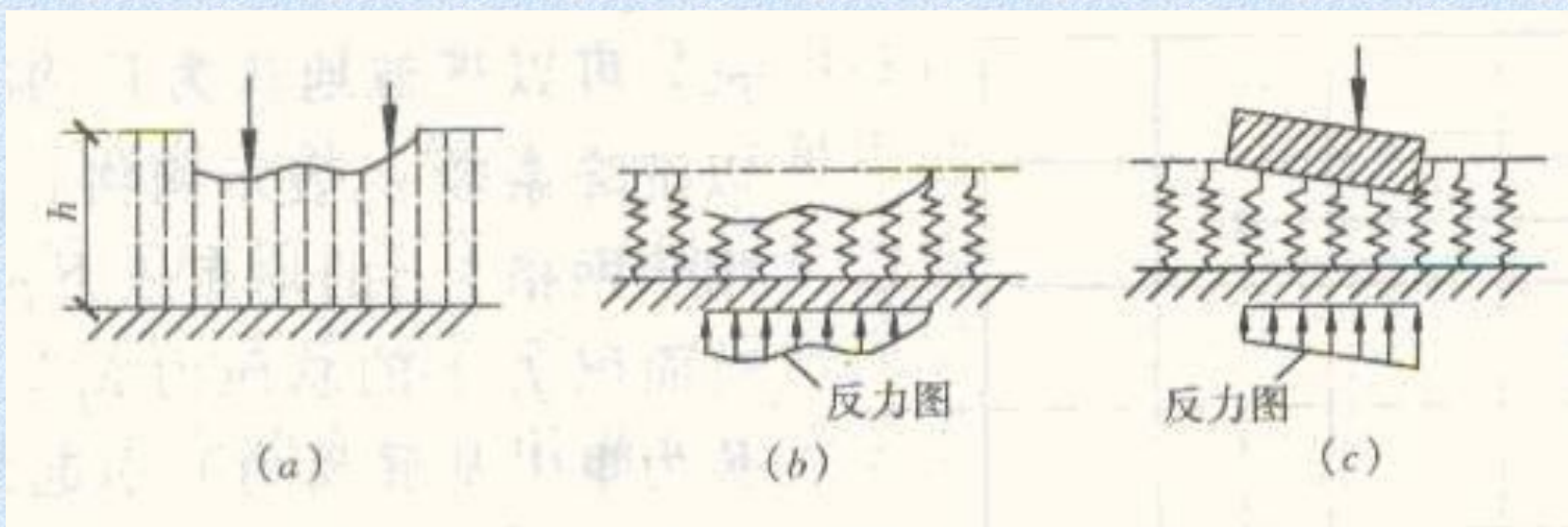


图 3-8 文克勒地基模型

(a) 侧面无摩阻力的土柱体系；(b) 弹簧模型；

(c) 文克勒地基上的刚性基础

- 文克尔地基模型的缺点

- 文克尔地基模型实质上是把连续的地基分割为侧面无摩擦联系的独立土柱，每一土柱的变形仅与作用在土柱上的竖向荷载有关，并与之成正比，即相当于一个弹簧的受力变形。由此，文克尔地基上基底压力的分布与地基沉降具有相同的形式，地基中不存在应力的扩散，忽略了地基中剪应力的存在。
- 事实上，土柱之间存在剪应力的存在是基底压力载地基中产生应力扩散，并使基底以外的地表发生沉降的主要因素。

- 一般认为，凡是力学性质与水相近的地基，采用文克勒模型就比较合适。在下述情况下可以考虑采用文克勒地基模型。
- (1) 地基主要受力层为软土。由于软土的抗剪强度低，因而能够承受的剪力值很小。
- (2) 压缩层厚度不超过基础底面宽度一半的地基。这时，地基中产生附加应力集中现象，剪应力很小。
- (3) 基底小塑性区相应较大时。
- (4) 支承在桩上的连续基础，可以用弹簧体系来代替群桩。

• 3.3.2 弹性半空间地基模型

- 弹性半空间地基模型将地基视为均质的线形变形半空间，并用弹性力学公式求解地基中的附加应力和位移。此时，地基上任意点的沉降与整个基底反力以及临近荷载的分布有关。

- 根据布辛奈斯克解，在弹性半空间表面上作用一个竖向集中力 P 时，半空间表面上离竖向集中荷载作用点距离为 r 处的地基表面沉降 s 为：

$$s = \frac{P(1-\mu^2)}{\pi E r} \quad (3-2)$$

- 式中 E 、 μ ——地基土的变形模量和泊松比；
- r ——地基表面任意点至集中力作用点的距离。
- 对于均布矩形荷载作用下矩形面积中心点的沉降，可以通过对式 (3-2) 积分求得：

$$s = \frac{2(1-\mu^2)}{\pi E_0} \left[l \ln \frac{b + \sqrt{l^2 + b^2}}{l} + b \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + b^2}}{b} \right] p_0 \quad (3-3)$$

- 式中 l 、 b ——矩形荷载面的长度和宽度。

弹性半空间地基模型

半空间的地基模型假定地基是一个均质、连续、弹性的半无限体，可以用弹性理论进行计算，如可根据布辛奈斯克（Boussinesq, 1885）解进行计算。但由于问题的复杂性，往往只可能以数值方法求得近似解。

弹性半空间理论优缺点

弹性半空间地基模型具有能够扩散应力和变形的优点，可以反映临近荷载的影响。但它的扩散能力往往超过地基的实际情况。所以计算所得的沉降量和地表的沉降范围，常较实测结果为大。同时该模型未能考虑到地基的成层性、非均质性以及土体应力-应变关系的非线性等重要因素。

• 3.3.3 有限压缩层地基模型

- 引进计算地基沉降的分层总和法进行地基上的梁和板分析，地基沉降等于沉降计算深度范围内各计算分层在侧限条件下的压缩量之和。压缩层地基模型假定地基是线性变形体，压缩层厚度是有限的，认为土在完全侧限条件下的压缩应变与附加应力成正比，地基沉降等于压缩层范围内各计算分层在侧限条件下的压缩量之和。

-
- **优点:**
 - 这种模型能够较好地反映地基土扩散应力和应变的能力，可以反映邻近荷载的影响，考虑到土层沿深度和水平方向的变化。
 - **缺点:**
 - 无法考虑土的非线性和基底反力的塑性重分布。

3.3.4 相互作用分析的基本条件和常用方法

- 在地基上梁和板的分析中，地基模型的选用是关键所在。必须根据所分析问题的实际情况选择合适的地基模型。

- 不论选用了何种模型，在分析中都必须满足两个基本条件：

- (1) 静力平衡条件

- 基础在外荷载和基底反力的作用下必须满足静力平衡条件，
即

- $\Sigma F=0$ (3-7a)

- $\Sigma M=0$ (3-7b)

• (2) 变形协调条件(接触条件)

- 计算前认为与地基接触的基础底面，计算后仍须保持接触，不得出现脱离现象，即基础底面任一点的挠度 w_i 应等于该点的地基沉降 s_i ：

$$\bullet w_i = s_i \quad (3-8)$$

- 根据这两个基本条件和地基计算模型，可以列出解答问题所需要的微分方程式，然后结合必要的边界条件求解。
- 只有在简单的情况下才能获得微分方程的解析解（详见3.4节,自学），在一般情况下，只能求得近似的数值解。
- 目前常用有限单元法和有限差分法来进行地基上梁板的分析。前者是把梁或板分割成有限个基本单元，并要求这些离散的单元在节点上满足静力平衡条件和变形协调条件；后者则是以函数的有限增量（即有限差分）形式来近似地表示梁或板微分方程中的倒数。

第3章 连续基础

主要内容：

- § 3-4 文克勒地基上梁的计算
- § 3-5 地基上梁的数值分析(略)
- § 3-6 柱下条形基础
- § 3-7 柱下交叉条形基础

§ 3-4 文克勒地基上梁的计算

文克勒地基上梁的计算——柱下条形基础计算的方法之一。

条形基础分为**墙下条形基础**和**柱下条形基础**。墙下条形基础的设计比较简单，根据断面情况可参考刚性基础或独立基础设计计算方法进行，这里不再叙述。柱下条形基础是通条连续设置于柱列或柱网之下的条形基础。采用条形基础可以扩大基底面积以满足地基承载力的要求，并依靠基础的连续性和刚度来加强建筑物的整体刚度，以利于调整地基不均匀沉降，或改善建筑物的抗震性能。

柱下条形基础可以分为单向条形基础和双向条形基础（或称十字交叉条形基础）两类。

条形基础其长度与高度相比较较大，一般可以将条形基础看成是地基土上的受弯构件——梁构件。

条形基础的挠曲特征、基底反力和截面内力分布都与地基、基础、上部结构的相对刚度有关，应该从三者相互关系、变形协调的观点出发，采用适当的方法进行设计计算，才能得到经济适用的计算结果。

§ 3.4.1 无限长梁的解答

为了分析计算地基上的梁和板，首先必须确定基础与地基土之间的接触压力，需要建立地基计算模型。

文克勒地基模型

文克勒假设可表述为：地基表面任一点的沉降与该点单位面积上所受的壓力成正比：

$$p = k_0 s$$

式中， p 为土体表面某单位面积上的压力强度（ kN/m^2 ）； s 为地基沉降（ m ）； k_0 为基床系数或地基系数或垫层系数（ kN/m^3 ），其物理意义为：使地基产生单位沉降所需的压力。

半空间地基模型

半空间的地基模型假定地基是一个均质、连续、弹性的半无限体，可以用弹性理论进行计算，如可根据布辛奈斯克（Boussinesq, 1885）解进行计算。但由于问题的复杂性，往往只可能以数值方法求得近似解。

• 压缩层地基模型

引进计算地基沉降的分层总和法进行地基上的梁和板分析，地基沉降等于沉降计算深度范围内各计算分层在侧限条件下的压缩量之和。压缩层地基模型假定地基是线性变形体，压缩层厚度是有限的，认为土在完全侧限条件下的压缩应变与附加应力成正比，地基沉降等于压缩层范围内各计算分层在侧限条件下的压缩量之和。

§ 3.4 文克勒地基上梁的计算

1. 基本微分方程式

文克勒假设可表述为：地基表面任一点的沉降与该点的单位面积上的压力成正比：

$$p = k s$$

图3-11 (a)表示文克勒地基上的梁截面在位于梁平面内的外荷载 $q(x)$ 作用下的挠曲线。设梁宽为 b ，从梁上取出长为 dx 的一小段梁元素，如图3-11 (b)，其上作用着荷载 $q(x)$ ，基底反力 $p(x)$ ，以及截面上的弯矩 M 和剪力 V 。它们的正方向如图所示。考虑梁单元的竖向静力平衡条件得：

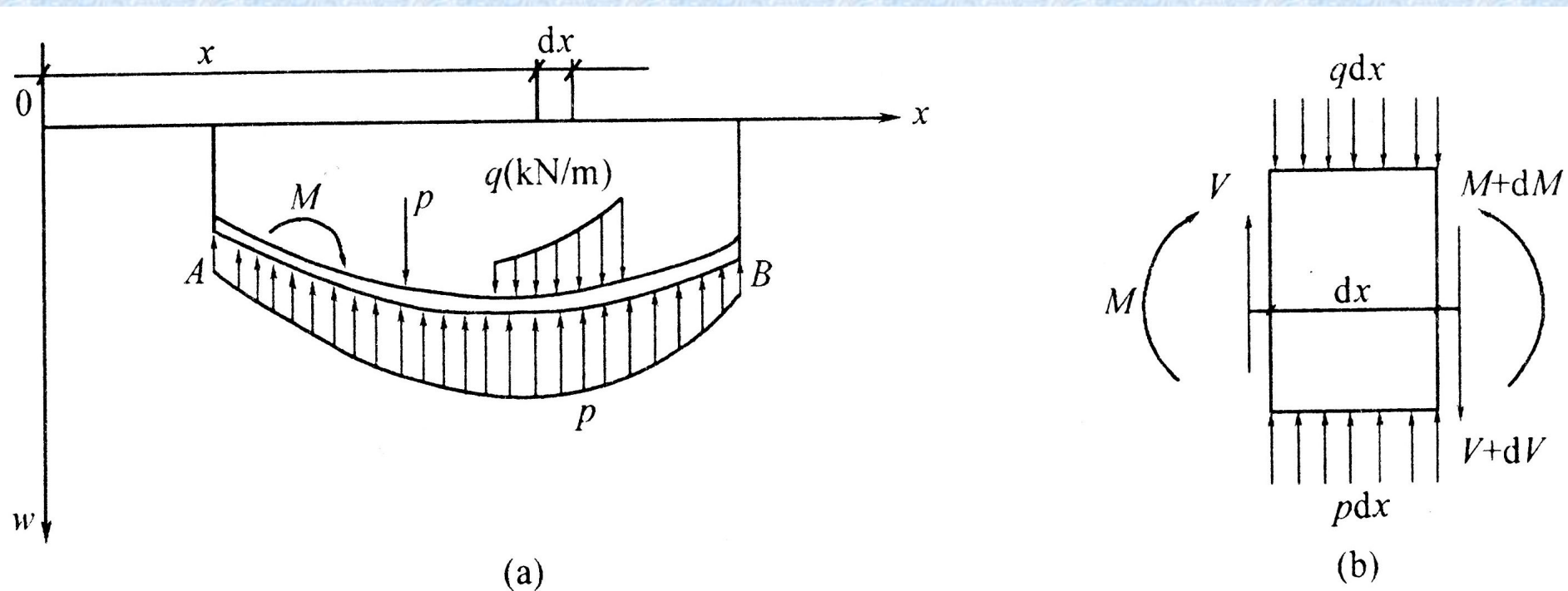


图3-11 文克勒地基上梁的计算图式

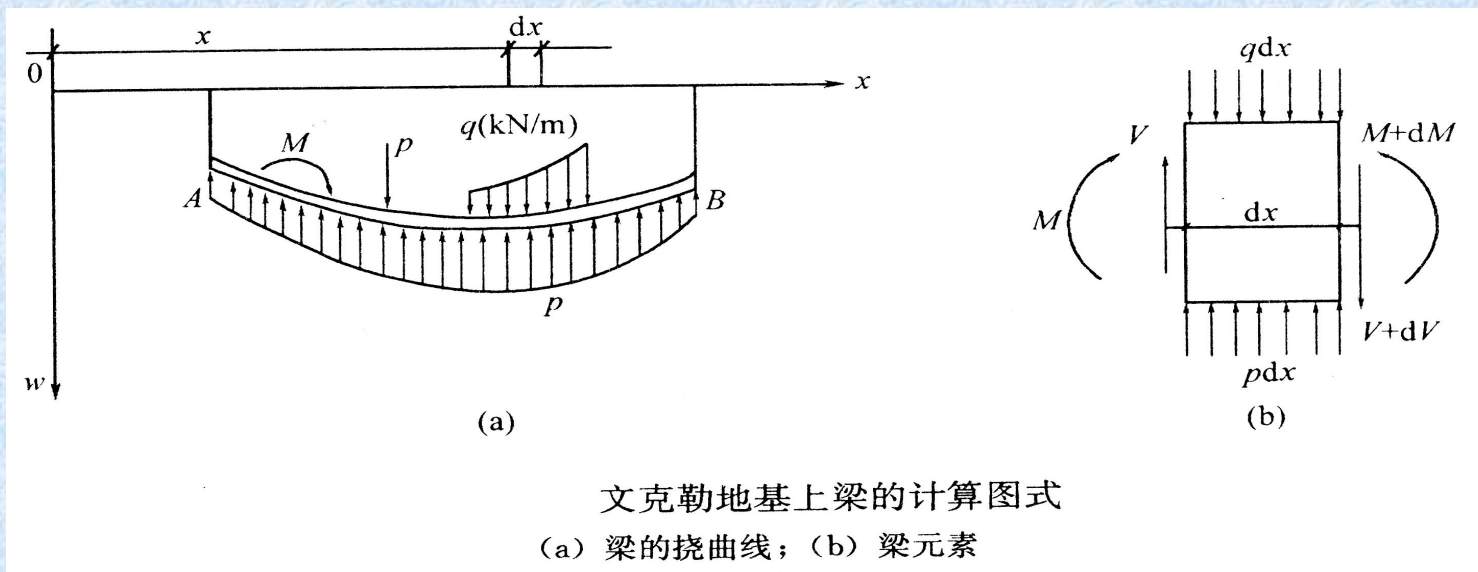
(a) 梁的挠曲线；(b) 梁元素

$$V - (V + dV) + p b dx - q dx = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = bp(x) - q(x)$$

根据材料力学，梁挠度 w 的微分方程式为：

$$E I \frac{d^2 w}{dx^2} = -M \quad (3-9)$$



式中， EI 是梁的抗弯刚度。根据剪力与弯矩的关系

$V=dM/dx$ ，可得：

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{dV}{dx} = -bp(x) + q(x)$$

根据梁与地基的变形协调条件：梁与地基保持接触，即 $S=W$ ，于是得：

$$p = ks = k w \qquad EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kbw = q(x)$$

式中， w 为基础梁的挠度（m）； EI 为基础梁的抗弯刚度（ $kN \cdot m^2$ ）； p 为基底反力（ kN/m^2 ）； q 为基础梁上的线荷载（ kN/m ）； b 为基础梁的宽度（m）。

对无荷载段 $q(x)=0$ ，上式简化为四阶齐次常系数微分方程：

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -bp \quad (3-10)$$

根据梁与地基的变形协调条件：梁与地基保持接触，即 $S=W$ ，于是得：

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -bkw$$

或 $\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{kb}{EI} w = 0 \quad (3-11)$

令：

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}} = \quad (3-12)$$

λ 值与集中基床系数和梁的抗弯刚度有关。是反映梁和地基弹性性质的一个综合性参数，对地基梁的受力特性和变形特性有着重要影响，称为柔度系数或特征系数。

λ 的量纲为[长度]⁻¹，所以 $1/\lambda$ 称为特征长度。特征长度愈大梁相对愈刚，相反特征长度愈小梁刚度相对愈弱。因此， λ 值是影响梁挠曲线形状的一个重要因素。

于是得到：

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = 0 \quad (3-13)$$

基本微分方程 (3-13) 是一个常系数线性齐次微分方程。

其通解为：

$$w = e^{\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x)$$

(3-14)

其中， C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 为积分常数，在挠曲线及其各阶导数都是连续的梁段中是不变的。可以根据梁段两端的边界条件确定。包括两个位移边界条件和两个内力边界条件。

2. 集中力荷载作用下无限长梁的解答

(1) 竖向集中力作用下

由于梁无限长, 所以, 无论 P_0 作用于梁的哪个部位, 取荷载作用点为坐标原点, 梁总是对称的 (图3-12a), 这里仅讨论右半部梁。梁的边界条件如下:

(A) $x \rightarrow \infty$ 时, $w \rightarrow 0$, 代入式 (3-14) 得:

$$w = e^{\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) = 0$$

$$C_1 = C_2 = 0$$

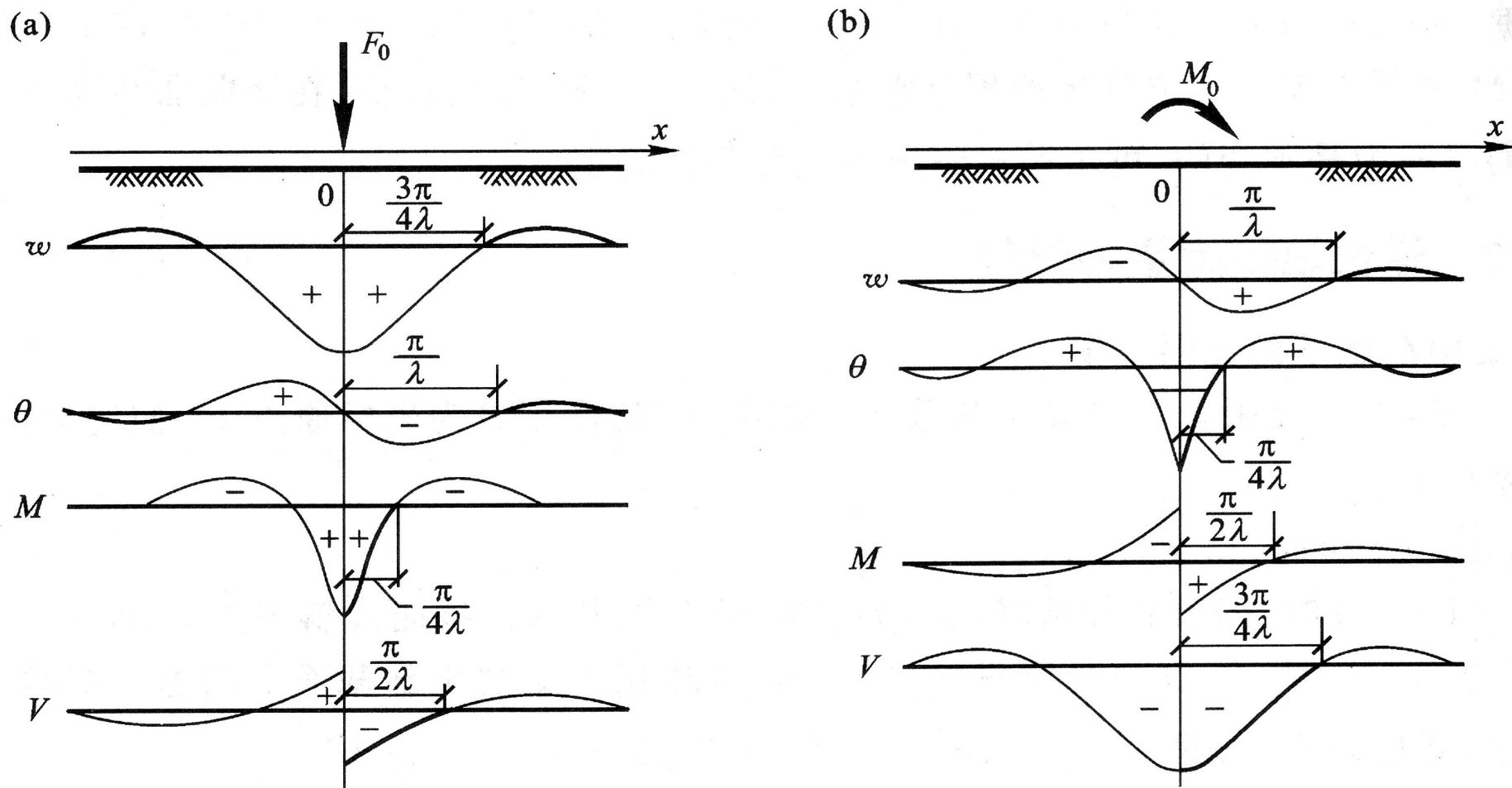


图3-12 文克尔地基上无限长梁的挠度和内力

(a) 集中力作用; (b) 集中力偶作用

(B) 当 $x=0$ 时，转角 $\theta = \frac{d\omega}{dx} = 0$

$$\theta = \frac{d\omega}{dx} = -\lambda e^{-\lambda x} (C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x) + \lambda e^{-\lambda x} (-C_3 \sin \lambda x + C_4 \cos \lambda x)$$

$$\theta = \frac{d\omega}{dx} = \lambda e^{-\lambda x} [(-C_3 + C_4) \cos \lambda x - (C_3 + C_4) \sin \lambda x] = 0$$

将 $x=0$ 代入上式得：

$$C_3 = C_4 = C$$

(C) 另外，在原点 $x=0$ ，将梁切开，则左右两截面上的剪力均等于 F_0 之半。

将 $x=0$, $V = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{F_0}{2}$ $C_1=C_2=0, C_3=C_4=C$ 代入 (3-14)
得:

$$2EI\lambda^3(C_3 + C_4) = -\frac{F_0}{2} \quad C_3 = C_4 = \frac{F_0}{8E_c I \lambda^3} = \frac{F_0 \lambda}{2kb}$$

将 $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = C_4 = \frac{P_0}{8E_c I \lambda^3} = \frac{P_0 \lambda}{2k}$ 代入式 (3-14)、

就可以求得地基梁挠曲线方程、转角方程和剪力表达式,
进而还可以求得地基梁的弯矩表达式和地基反力表达式,
现归纳如下:

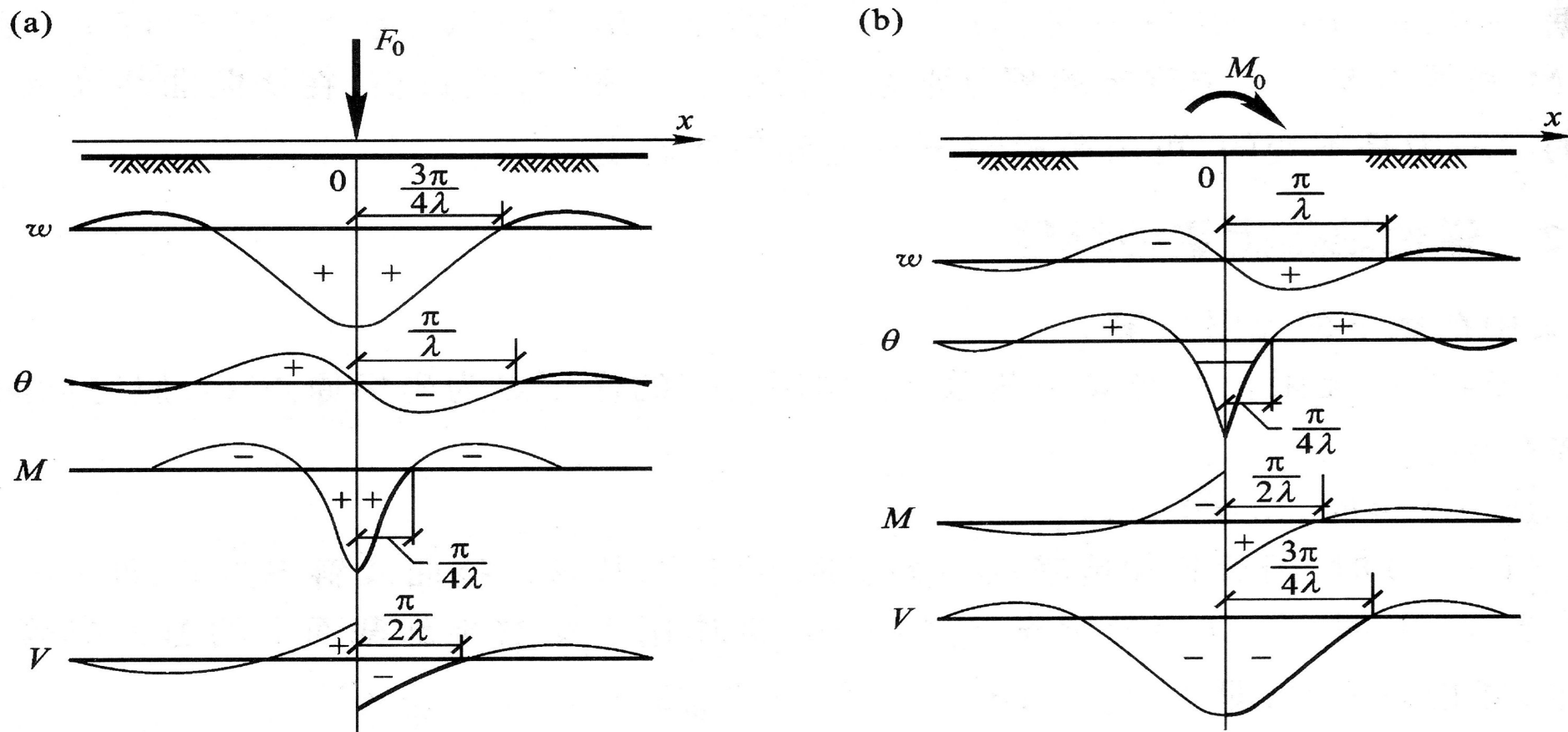


图3-12 文克尔地基上无限长梁的挠度和内力
(a) 集中力作用; (b) 集中力偶作用

$$w = \frac{P_0 \lambda}{2kb} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) = \frac{F_0 \lambda}{2kb} A_x \quad (3-18a)$$

$$w = \frac{F_0}{8E I \lambda^3} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) = \frac{F_0}{8E I \lambda^3} A_x \quad (3-18a')$$

$$\theta = -\frac{F_0 \lambda^2}{kb} e^{-\lambda x} \sin \lambda x = -\frac{F_0 \lambda^2}{kb} B_x \quad (3-18b)$$

$$M = \frac{F_0}{4\lambda} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) = \frac{F_0}{4\lambda} C_x \quad (3-18c)$$

$$V = -\frac{F_0}{2} e^{-\lambda x} \cos \lambda x = -\frac{F_0}{2} D_x \quad (3-18d)$$

$$P = kw = \frac{F_0 \lambda}{2b} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) = \frac{F_0 \lambda}{2b} A_x \quad (3-18e)$$

$$A_x = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \quad (3-19a)$$

$$B_x = e^{-\lambda x} \sin \lambda x \quad (3-19b)$$

$$C_x = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) \quad (3-19c)$$

$$D_x = e^{-\lambda x} \cos \lambda x \quad (3-19d)$$

这些系数已经制定成了表格，手算时查有关(附录)表格。

在 P_0 作用下无限长梁变形、内力图如图3-12a所示。以上算式适合于无限长梁的右半部分，即适用范围为 $0 \leq x < \infty$ ，对于 $x < 0$ 的情况，可按对称条件确定。

(2) 集中力偶 M_0 作用下

若有集中力偶 M_0 作用于无限长梁上，如图3-12b所示。取力的作用点为原点 O ，梁也总是对称的。同样取右半部分梁进行研究，边界条件如下：

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时， $w \rightarrow 0$ 代入式 (3-14) 得：

$$w = e^{\lambda x} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) = 0$$

$$C_3 = 0$$

当 $x = 0 + \varepsilon$ (ε 为正的无穷小量) 时，作用于梁右半部分该截面上的弯矩为 $M = M_0 / 2$ ；

$$M = -E_c I \frac{d^2 \omega}{dx^2}$$

$$= 2C_4 E_c I \lambda^2 e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x)$$

$$2C_4 E_c I \lambda^2 = \frac{M_0}{2}$$

$$C_4 = \frac{M_0}{4E_c I \lambda^2}$$

据此可以求得在力偶 M_0 作用下地基梁的变形和内力表达式如下：

$$w = \frac{M_0 \lambda^2}{kb} e^{-\lambda x} \sin \lambda x = \frac{M_0 \lambda^2}{kb} B_x \quad (3-21a)$$

$$\theta = \frac{M_0 \lambda^3}{kb} e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) = \frac{M_0 \lambda^3}{kb} C_x \quad (3-21b)$$

$$M = \frac{M_0}{2} e^{-\lambda x} \cos \lambda x = \frac{M_0}{2} D_z \quad (3-21c)$$

$$V = -\frac{M_0}{2} \lambda e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) = -\frac{M_0 \lambda}{2} A_x \quad (3-21d)$$

~~在 M_0 作用下无限长梁变形、内力图如图3-12b所示。以上算式适合于无限长梁的右半部分，即适用范围为 $0 \leq x < \infty$ 。对于 $x < 0$ 的情况，考虑在力偶作用下变形和内力的对称条件， θ 和 V 是对称的， w 和 M 是反对称的。所以，仍可按以上各式计算，但计算时 x 取绝对值， w 和 M 则取相反符号。~~