

文章编号: 1000-4750(2015)03-0110-09

二维堤坝管涌的数值模拟研究

胡亚元^{1,2}, 马攀^{1,2}

(1. 浙江大学滨海和城市岩土工程研究中心, 杭州 310058; 2. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点试验室, 杭州 310058)

摘 要: 根据修正的 SPV(Stavropoulou-Papanastasiou-Vardoulakis)管涌控制方程, 采用 Newton-Raphson 求解法和传导矩阵调整法, 对二维带自由面的均质土石坝坝体渗流侵蚀问题进行了有限元数值分析。数值分析表明: 在具有渗流自由面的均质土石坝坝体中, 溢出面和自由面附近区域的水力梯度较大, 比其他区域更容易大于管涌临界水力梯度。管涌侵蚀区(孔隙率明显增大)和细颗粒最大浓度区首先出现在溢出面处, 然后沿着渗流自由面附近区域向上游扩展, 最终达到自由面附近的进水面, 形成孔隙率明显增大的侵蚀贯通通道。管涌侵蚀增大堤坝的渗透系数, 它对堤坝渗透速度的影响较大, 但对孔压分布和自由面位置的影响较小。

关键词: 堤坝; 管涌; 侵蚀; 自由面; 数值分析

中图分类号: TV139.14 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.09.0872

THE NUMERICAL SIMULATION OF PIPING IN THE TWO-DIMENSIONAL EMBANKMENT

HU Ya-yuan^{1,2}, MA Pan^{1,2}

(1. Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China;

2. Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering of Ministry of Education, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: Based on the modified SPV (Stavropoulou-Papanastasiou-Vardoulakis) control equation, the seepage erosion of a two-dimensional homogenous embankment dam with free surfaces is numerically analyzed by employing the Newton-Raphson method and conducting matrix adjustment finite elemental method. The numerical analysis shows that the hydraulic gradients around both the overflow surface and the free surface are bigger than those in other regions, so they more easily exceed the critical hydraulic gradient for piping in a homogenous dam with free surface seepage. The erosion area (Porosity increases significantly) and the area of maximum fine particle concentration first occur near the spilling area, then extend to upstream along the seepage free surface, finally reaching the water inlet near the free surface and forming a channel. Piping erosion enhances the coefficient of permeability and has significant effects on the seepage velocity, though it has little effect on pore-pressure distribution and free surface location.

Key words: embankment; piping; erosion; free surface; numerical analysis

流体在堤坝中的渗流特性是岩土和水力工程中的重要科研课题^[1-5]。流体渗流引起的管涌具有侵蚀(向后侵蚀, 内部侵蚀)、隆起和管流等各种形式, Foster 等^[4]调研了大量的土石坝破坏事故, 发现 66%的管涌破坏是由坝体侵蚀引起的, 其中均质土坝中的管涌破坏占有坝体类型侵蚀破坏的

36%。Richards 和 Reddy^[5]总结了前人的研究成果, 发现坝体侵蚀等诱因引起的坝体破坏约占管涌破坏的三分之一。因此, 探索管涌的侵蚀机理和侵蚀特性是管涌试验和理论研究的一个重要课题。

Kenney 和 Lau^[6]发现管涌是由细颗粒在渗透力作用下沿骨架孔隙流失引起的, 土的颗粒级配决定

收稿日期: 2013-09-21; 修改日期: 2014-02-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(51178419)

通讯作者: 胡亚元(1968—), 男, 浙江兰溪人, 副教授, 博士, 主要从事环境土工和土体本构关系的研究工作(E-mail: huyayuan@ccea.zju.edu.cn).

作者简介: 马攀(1987—), 男(回族), 新疆奇台人, 硕士生, 主要从事多场耦合土体本构关系的研究工作(E-mail: 632749787@qq.com).

了细颗粒抵抗流失的能力。根据管涌室内试验, Kenney 和 Lau^[6]通过细颗粒在颗粒级配中的含量建立了无粘性土渗流稳定性的临界指标。Skempton 和 Brogan^[7]发现当水力梯度远小于理论临界水力梯度时, 细颗粒就会大量流失, 并根据室内管涌试验建立了管涌启动时临界水力梯度与颗粒级配渗流稳定性指标之间的关系。Moffat 和 Fannin^[8]试验研究了水力梯度、细颗粒流失浓度、流量和渗流系数之间的相互影响规律, Bendahmane 等^[9]认为土体所受的围压会约束细颗粒的流失, 并试验研究了围压对细颗粒流失速率的影响。Richards 和 Reddy^[5,10]试验研究了土体竖向压力和渗流方向对细颗粒流失速率的影响, Chang 和 Zhang^[11]试验研究了偏压力对细颗粒运移浓度的影响。

管涌试验研究主要针对实验室小尺寸试样进行, 把室内试验的研究成果运用到大尺寸实际坝体工程中去, 还需要进行适当的理论研究和数值模拟工作。Stavropoulou 等^[12]把油井出沙机理视为可动细颗粒与土骨架和流体之间的多相耦合相互作用, 建立了细颗粒渗流运移模型, 结合三相质量守恒方程、达西定律、土体平衡方程和弹塑性本构关系建立了三相耦合控制方程, 用于数值模拟油井的出沙规律。鉴于油井出沙机理与管涌侵蚀机理的相似性, 他们认为油井的出沙控制方程可推广到管涌研究^[13]。Cividini 和 Gioda^[14]在分析前人实验的基础上, 用数值拟合方法给出了土体侵蚀和沉积表达式, 采用有限元法数值模拟了一维及二维矩形地基管涌引起的沉降。张家发等^[15]从宏观角度提出管涌渗透变形扩展模型, 通过增大渗透系数的方式对管涌发展过程进行了数值模拟, 再现了管涌破坏渐进过程。周晓杰等^[16]认为堤基渗透破坏的过程实际上是“土中水”转变为“水中土”的过程, 提出管涌区管流模型, 通过渗流-管流耦合流动和无网格伽辽金法对渗流场进行分析。罗玉龙等^[17-18]首先采用 Stavropoulou 等^[12]提出的管涌控制方程分析堤防工程的管涌侵蚀特性, 并用 SUPG 格式消除有限元求解管涌纯对流方程时的数值振荡难题^[18]。介玉新等^[19]在渗流-管流耦合方法的基础上引入了粒径级配曲线, 提出了模拟管涌通道随时间发展变化的计算方法。实际坝体的管涌发生发展过程极其复杂, 陈生水等^[20]把管涌整个发展过程分为化学溶解、细颗粒运移、管流冲刷和失稳破坏等阶段, 不同管涌阶段具有不同的渗流-侵蚀特点。笔者认为, 既然管涌各阶段的破坏机理迥异, 管涌的理论研究应当

分阶段进行, 一个研究课题最好仅侧重于管涌某个阶段, 以便简化并加深管涌的机理研究。例如: Stavropoulou 等^[12]、Papanastasiou 与 Vardoulakis^[13]、Cividini 和 Gioda^[14]等管涌模型, 侧重考虑的是细颗粒在土骨架中漂移流动弥散过程, 比较接近于管涌化学溶解和细颗粒运移阶段的渗流-侵蚀特性。而周晓杰等^[16]和介玉新等^[19]的管涌模型与管涌的管流阶段相类似。本文采用修正的 Stavropoulou-Papanastasiou-Vardoulakis 渗流侵蚀模型^[12](本文把 Stavropoulou-Papanastasiou-Vardoulakis 渗流侵蚀本构模型简称为 SPV 管涌模型, 下同)研究梯形坝体的管涌渗流-侵蚀特性, 主要反映的是管涌初中期细颗粒潜蚀运移阶段的管涌渗流侵蚀性质。

笔者发现, 已有的管涌数值分析大多数局限在一维和轴对称情况^[12-14,17,21], 部分二维管涌研究也主要针对矩形坝基和有压渗流展开^[15-16,18-19], 未考虑渗流自由面对管涌特性的影响。管涌事故调研发现, 约占 1/3 的管涌侵蚀破坏发生在坝体中^[4-5], 而坝体的管涌渗流场绝大多数情况下具有自由面和溢出面, 因此, 有必要对二维带自由面土石坝的管涌侵蚀特性进行理论分析, 以便使管涌的数值模拟更符合管涌发生时的实际情况。同时, 笔者比对了管涌室内试验^[9-11]和 Stavropoulou 等^[12]提出的 SPV 管涌侵蚀模型, 发现存在一些缺陷, 如: 1) 管涌临界水力梯度在管涌研究和治理中占有重要的地位, 但在 SPV 管涌模型中未能体现; 2) 在 SPV 管涌模型中, 任意小的渗流速度都会使土单元中的所有颗粒完全流失, 这不符合中低水力梯度作用下只有部分土颗粒流失的管涌室内试验结果^[9-11]; 3) 近年来的管涌室内试验表明, 应力状态对渗流-侵蚀发展的影响不可忽略^[9-11], 然而, 在 SPV 管涌模型中未能考虑应力状态对管涌发展的影响。据此, 胡亚元和马攀^[21]利用管涌应力-渗流-侵蚀试验成果修正了 SPV 管涌本构方程, 并对一维轴对称条件下的管涌发展过程进行了数值模拟。与原 SPV 本构方程相比, 修正后的 SPV 本构方程能够模拟 Chang 和 Zhang^[11]管涌试验后期细颗粒浓度不断下降现象^[21]。因此, 本文采用修正 SPV 本构方程来数值模拟二维带自由面坝体的管涌侵蚀特性。

1 理论基础

胡亚元和马攀^[21]根据 Bendahmane 等^[9]和 Chang 和 Zhang^[11]的应力-渗流-侵蚀耦合管涌试验,

通过引入临界水力梯度 i_{cr} 和稳定孔隙率 φ_s 提出修正的 SPV 管涌渗流侵蚀控制方程^[21]:

$$\frac{\partial(c\varphi)}{\partial t} - \frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial c}{\partial z} \bar{\rho} g - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{3-\varphi}{\varphi(1-\varphi)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \bar{\rho} g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\rho_s - \rho_f}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} \right) = 0 \quad (1b)$$

$$\text{当 } \|\bar{i}\| < \|\bar{i}_{cr}\| \text{ 时: } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (1c)$$

当 $\|\bar{i}\| \geq \|\bar{i}_{cr}\|$ 时:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{K_0 \lambda}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{(\varphi_s - \varphi) \varphi^3}{(1-\varphi)^2} \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \times \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right)^2} = 0 \quad (1d)$$

式中: φ 为孔隙率; c 为细颗粒浓度; P 为孔隙水压力; K_0 为渗透率; $\bar{\rho}$ 为含细颗粒的混水密度; ρ_s 为土颗粒的密度; ρ_f 为纯水的密度; λ 为细颗粒侵蚀系数; c_{cr} 为细颗粒最大浓度; φ_s 为侵蚀稳定孔隙率, $\varphi_s \leq 1$ 。管涌试验表明: λ 、 c_{cr} 和 φ_s 一般为水力梯度 \bar{i} 和应力状态 σ_{ij} 的函数。注意到各深度处混水密度是不同的, 二维堤坝坝体的渗流边界条件为(示意图如图 1):

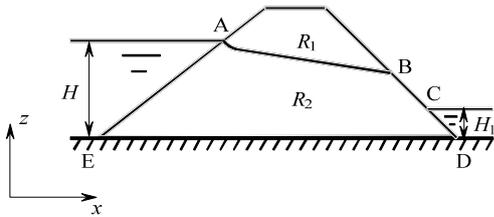


图 1 稳定渗流堤坝边界条件示意图

Fig.1 Steady seepage embankment boundary conditions

AE 边界上(进水面):

$$P = \int_z^H \bar{\rho} g dz = \int_z^H \rho_f g dz = \rho_f g z; \quad 0 \leq z \leq H \quad (2a)$$

CD 边界上(溢出面):

$$P = \int_z^{H_1} \bar{\rho} g dz; \quad 0 \leq z \leq H_1 \quad (2b)$$

AB 边界上(自由面):

$$P = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} \cos n + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right) \sin n = 0 \quad (2c)$$

n 为边界法向方向与水平方向的夹角。

$$\text{ED 边界上(底面): } \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\bar{\rho} g \quad (2d)$$

$$\text{BC 边界上(溢出面): } \quad P = 0 \quad (2e)$$

式(1)是一个非线性方程: 由于事先不能确定自由面和溢出面位置, 因此不能像有压渗流问题那样一次求解, 需要反复迭代才能确定自由面和溢出面位置, 故式(2)属于非线性边界条件。因此带自由面的堤坝渗流侵蚀管涌分析是一个高度非线性问题, 本文采用有限元法求解。在空间域选择四边形等参单元进行离散, 在时间域采用有限差分法进行离散。结合边界条件式(2), 式(1)“弱形式”积分的 Galerkin 加权余量为:

$$\begin{aligned} R_i^1 = & \iint (1-a) \left\{ - \left[\frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \right]^n - \right. \\ & \left. \left[\frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} \right]^n \right\} \Phi_i dx dz + \\ & \iint \left\{ -a \left[\frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \right]^{n+1} - \right. \\ & \left. a \left[\frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} \right]^{n+1} + \right. \\ & \left. \frac{(c\varphi)^{n+1} - (c\varphi)^n}{\Delta t} \right\} \Phi_i dx dz + \\ & \iint \left\{ -a \left[\frac{K_0}{\eta_k} \frac{\varphi^3 g}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial c}{\partial z} \right]^{n+1} - \right. \\ & \left. (1-a) \left[\frac{K_0}{\eta_k} \frac{\varphi^3 g}{(1-\varphi)^2} \frac{\partial c}{\partial z} \right]^n - \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} \right\} \Phi_i dx dz \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} R_i^2 = & \iint \left\{ a \left[\frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{K_0}{\eta_k} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} g \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right]^{n+1} \right\} dx dz + \\ & \iint \left\{ (1-a) \left[\frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{K_0}{\eta_k} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2} g \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right]^{n+1} \right\} dx dz \end{aligned} \quad (3b)$$

当 $\|\bar{i}\| < \|\bar{i}_{cr}\|$ 时:

$$R_i^3 = 0 \text{ 和 } \varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n \quad (3c-1)$$

当 $\|\bar{i}\| \geq \|\bar{i}_{cr}\|$ 时:

$$R_i^3 = \iint \left\{ \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} - a \left[\frac{K_0 \lambda (\varphi_s - \varphi) \phi^3}{\eta_k \bar{\rho} (1 - \varphi)^2} \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \times \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right)^2} \right]^{n+1} \right\} \Phi_i dx dz - \iint \left\{ (1-a) \left[\frac{K_0 \lambda (\varphi_s - \varphi) \phi^3}{\eta_k \bar{\rho} (1 - \varphi)^2} \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \times \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right)^2} \right]^n \right\} \Phi_i dx dz \quad (3c-2)$$

式中的 $i=1,2,3,4$, $a=0.5$ 时为中间差分公式, 上标 n 和 $n+1$ 表示第 n 和 $n+1$ 个时间点的值, 并不表示指数函数。对式(3)采用 Newton-Raphson 法求解得:

$$\begin{bmatrix} \partial R_i^1 / \partial \varphi_j & \partial R_i^1 / \partial c_j & \partial R_i^1 / \partial P_j \\ \partial R_i^2 / \partial \varphi_j & \partial R_i^2 / \partial c_j & \partial R_i^2 / \partial P_j \\ \partial R_i^3 / \partial \varphi_j & \partial R_i^3 / \partial c_j & \partial R_i^3 / \partial P_j \end{bmatrix}^m \begin{bmatrix} \delta \varphi_j \\ \delta c_j \\ \delta P_j \end{bmatrix}^{(m+1)} = - \begin{bmatrix} R_i^1 \\ R_i^2 \\ R_i^3 \end{bmatrix}^m \quad (4)$$

式中的 $j=1,2,3,4$, m 为迭代次数。式(4)中各式的具体形式为:

$$\frac{\partial R_i^1}{\partial \varphi_j} = \iint \left[\frac{c-1}{\Delta t} - a \frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{3\varphi^2 - \varphi^3}{(1-\varphi)^3} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} + \bar{\rho} g \frac{\partial c}{\partial z} \right) \right] \Phi_i \Phi_j dx dz,$$

$$\frac{\partial R_i^1}{\partial c_j} = \iint \left[\frac{\varphi}{\Delta t} + a \frac{K_0}{\eta_k} \frac{\phi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\rho_s - \rho_f}{\bar{\rho}^2} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \right] \Phi_i \Phi_j dx dz - \iint \left[a \frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\phi^3}{(1-\varphi)^2} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} + \bar{\rho} g \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right) \right] \Phi_i dx dz,$$

$$\frac{\partial R_i^1}{\partial P_j} = \iint \left[-a \frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\phi^3}{(1-\varphi)^2} \times \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \right] \Phi_i dx dz,$$

$$\frac{\partial R_i^2}{\partial \varphi_j} = \iint \left[a \frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{3\varphi^2 - \varphi^3}{(1-\varphi)^3} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \bar{\rho} g \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right) \Phi_j dx dz,$$

$$\frac{\partial R_i^2}{\partial c_j} = \iint \left[-a \frac{K_0}{\eta_k} \frac{\phi^3}{(1-\varphi)^2} \frac{\rho_s - \rho_f}{\bar{\rho}^2} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right) \right] \Phi_j dx dz,$$

$$\frac{\partial R_i^2}{\partial P_j} = \iint \left[a \frac{K_0}{\eta_k \bar{\rho}} \frac{\phi^3}{(1-\varphi)^2} \times \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right) \right] dx dz.$$

当 $\|\bar{i}\| < \|\bar{i}_{cr}\|$ 时:

$$\frac{\partial R_i^3}{\partial \varphi_j} = 1; \quad \frac{\partial R_i^3}{\partial c_j} = 0; \quad \frac{\partial R_i^3}{\partial P_j} = 0; \quad \varphi_i^{m+1} = \varphi_i^m;$$

$$\delta \varphi_i^{m+1} = 0.$$

当 $\|\bar{i}\| \geq \|\bar{i}_{cr}\|$ 时:

$$\frac{\partial R_i^3}{\partial \varphi_j} = \iint \left[-a \frac{K_0 \lambda \varphi^2 (\varphi_s - \varphi) (3 - \varphi) - \varphi (1 - \varphi)}{\eta_k \bar{\rho} (1 - \varphi)^3} \times \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right)^2} + \frac{1}{\Delta t} \right] \Phi_i \Phi_j dx dz$$

$$\frac{\partial R_i^3}{\partial c_j} = \iint \left[a \frac{K_0 \lambda (\varphi_s - \varphi) \phi^3}{\eta_k (1 - \varphi)^2} \times \frac{\rho_s - \rho_f}{\bar{\rho}^2} \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \times \right.$$

$$\left. \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right)^2} \right] \Phi_i \Phi_j dx dz -$$

$$\iint \left[\frac{a K_0 \lambda (\varphi_s - \varphi) \phi^3}{\eta_k \bar{\rho} (1 - \varphi)^2} \left(1 - \frac{2c}{c_{cr}} \right) \times \right.$$

$$\left. \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right)^2} \right] \Phi_i \Phi_j dx dz -$$

$$\iint \left[\frac{a K_0 \lambda (\varphi_s - \varphi) \phi^3}{\eta_k \bar{\rho} (1 - \varphi)^2} \times \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right) \times \right.$$

$$\left. \frac{(\rho_s - \rho_f) g}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho} g \right)^2}} \right] \Phi_i \Phi_j dx dz,$$

$$\frac{\partial R_i^3}{\partial P_j} = \iint \left[-a \frac{K_0 \lambda (\varphi_s - \varphi) \phi^3}{\eta_k \bar{\rho} (1 - \varphi)^2} \left(c - \frac{c^2}{c_{cr}} \right) \times \right.$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho}g \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right\} \Phi_j dx dz.$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \bar{\rho}g \right)^2}$$

2 渗流自由面的处理

土石坝坝体渗流数值模拟的一个难点在于确定渗流自由面的位置。目前有限元求解渗流自由面位置的方法有两种：变网格法和固定网格法。变网格法需要根据新自由面重新划分单元网格，存在计算量大、程序处理困难等缺陷。固定网格法在计算过程中固定网格不变，通过采用扩大了渗流区域来求解带有自由面的渗流问题。自 Neuman^[22]提出利用不变网格分析有自由面渗流的 Galerkin 方法以来，固定网格法得到了广泛的应用，主要有 Desai 的剩余流量法^[23]、Bathe 的单元传导矩阵调整法^[24]和张有天的初流量法等^[25]。本文采用传导矩阵调整法计算有自由面的稳定渗流问题。

Bathe^[24]的传导矩阵调整法是将全域剖分为两部分 R_1 和 R_2 ，如图 1 所示。 R_1 为自由面以上的子域 ($P < 0$)，在该域中各点的流速为零，取其渗透率 $K_0 = 0$ ； R_2 为自由面以下的子域 ($P \geq 0$)，在该域中各点的流速大于零，取其实际渗透率 K_0 。在实际计算中为了计算稳定，取 R_1 子域中的渗透率为一个大于零的很小值：

$$K_0 = \begin{cases} \mu K_0 & R_1 \text{子域, } P < 0 \\ K_0 & R_2 \text{子域, } P \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

μ 值一般取为 1/1000。该方法的计算步骤为：1) 首先在全域中划分网格，在全域中取实际渗透率，建立总体传导矩阵求解各点孔压；2) 根据孔压的正负号按照式(5)确定渗透率；3) 重新形成总体传导矩阵，求解各点孔压，直到自由面稳定为止。

3 数值计算结果分析

根据带自由面的二维管涌控制方程式(1)和边界条件式(2)、按照有限元刚度矩阵集成、Newton-Raphson 求解以及传导矩阵调整法求自由面位置等数值计算步骤编写有限元程序，程序流程图如图 2 所示。为了验证程序的可靠性，我们首先对不考虑管涌侵蚀的土石坝坝体自由面进行了数值计算，并与 Plaxis 的计算结果进行了对比，见图 3，图中三角形为本文程序计算结果，圆圈表示按照同样的参

数采用 Plaxis 软件计算的结果，两者计算结果很接近，说明本文所编制的有限元程序是正确的，可以进行后续分析。

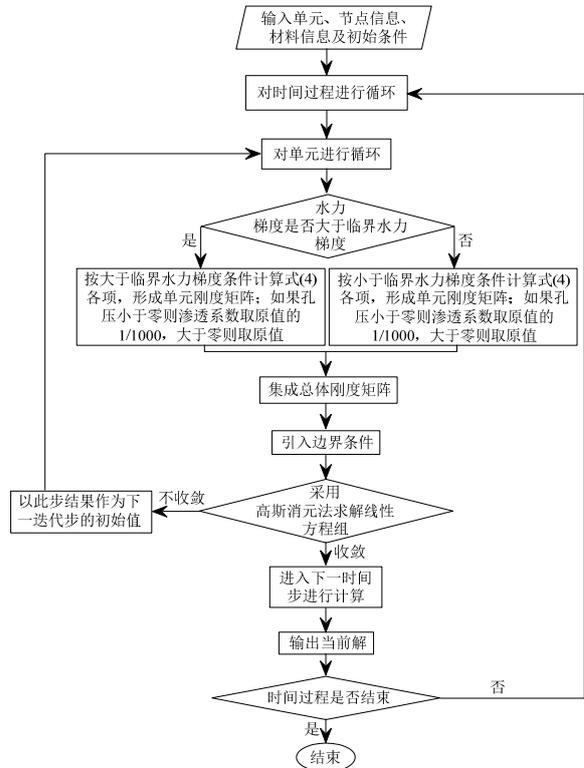


图 2 带自由面堤坝管涌有限元计算流程图

Fig.2 Modeling an embankment with free surface piping using finite element method

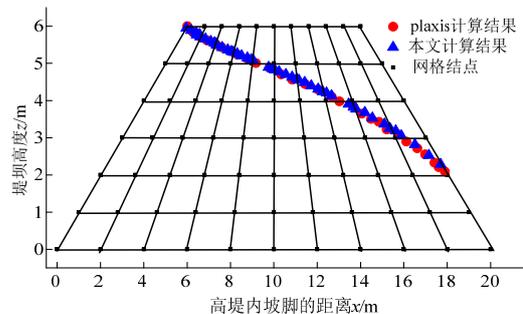


图 3 自由面有限元计算结果

Fig.3 Free surface from finite element method

土石坝坝体模型尺寸和水力边界条件如图 4 所示。有限元网格横向划分 21 节点，纵向划分 13 个节点，共划分 240 个四边形单元，273 个结点，节点布置图见图 4。土体计算参数见表 1，管涌启动时临界水力梯度为 $i_{cr} = 0.15$ ，侵蚀稳定孔隙率 φ_s 与水力梯度 \bar{i} 的函数关系为：

$$\varphi_s = 0.34 + \frac{|\bar{i}|}{5.072 + 1.533|\bar{i}|} \quad (6)$$

表 1 坝体管涌计算参数^[18,21]

Table 1 Calculation parameters of embankment piping

φ_0	c_0	c_{cr}	$K_0 / (\times 10^{-10} \text{m}^2)$	$\eta_k / (\times 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$	$\rho_f / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$\rho_s / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	λ / m^{-1}
0.34	0.005	0.3	2.312	1.005	1000	2610	10

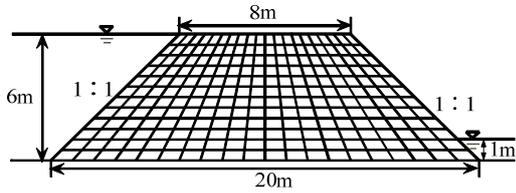


图 4 坝体管涌有限元计算网格划分图

Fig.4 Embankment piping from finite element method

图 5(a)~图 5(d)为 $t=1000\text{s}$ 、 $t=10000\text{s}$ 、 $t=30000\text{s}$ 和 $t=50000\text{s}$ 土体孔隙率云图。从图中可以看出，在管涌初期 $t=1000\text{s}$ 时，土体侵蚀不明显，随着时间的增加，当 $t=10000\text{s}$ 时在溢出面附近首先出现较明显的管涌侵蚀，当 $t=30000\text{s}$ 时，明显管涌侵蚀区域开始从溢出面附近逐渐向上游扩展，当 $t=50000\text{s}$ 时，明显管涌侵蚀区从溢出面到进水面已基本贯通，贯通区域主要集中在渗流自由面附近；而在进水面下部远离自由面区域则几乎不发生侵蚀，说明在溢出面和自由面附近区域的水力梯度比较容易大于管涌临界水力梯度。从图 5(a)~图 5(d)孔隙率随时间变化规律可以看出，管涌呈现出明显的向后侵蚀型特点。

图 6(a)~图 6(d)为 $t=1000\text{s}$ 、 $t=10000\text{s}$ 、 $t=30000\text{s}$ 和 $t=50000\text{s}$ 细颗粒浓度云图。从图中可以看出，在管涌初期 $t=1000\text{s}$ 时，细颗粒浓度在整个堤坝区域均较小；随着渗流侵蚀的发展，当 $t=10000\text{s}$ 时，堤坝渗流中的细颗粒浓度在溢出面附近增长最快，达到 $c=0.08$ ，而左下角进水面处增长最慢，呈现出离溢出面和自由面越远，细颗粒浓度越低的规律；当 $t=30000\text{s}$ 时，细颗粒在溢出面附近达到最大临界浓度 $c=0.3$ ，并从溢出面附近沿自由面向上游扩展；当 $t=50000\text{s}$ 时，在管涌侵蚀贯通区域，细颗粒浓度均较大，呈现出明显的细颗粒流失现象，而在堤坝左下角细颗粒浓度较小，未出现明显的管涌侵蚀。

图 7(a)~图 7(d)为 $t=1000\text{s}$ 、 $t=10000\text{s}$ 、 $t=30000\text{s}$ 和 $t=50000\text{s}$ 时流体渗透速度增大系数 $(\bar{q}(t)/\bar{q}_0, \bar{q}_0$ 为侵蚀未发生时的渗透速度)云图。从图中可以看出，管涌初期由于侵蚀程度交低，渗透速度增加不大，当 $t=10000\text{s}$ 时，在溢出面附近渗透速度增长较快，最大渗透速度已经达到管涌初期的 3 倍。当 $t=30000\text{s}$ 时，在溢出面和自由面等管涌明显侵蚀区

的渗透速度明显增大，流速增大最快区域在溢出面处，为管涌初期的 7.15 倍；当 $t=50000\text{s}$ 时，管涌侵蚀范围进一步扩大，渗流速度增大倍数和增大区域进一步发展，在整个自由面附近，渗流速度比管涌初期平均增大了 4.0 倍，在溢出面处渗流增大最快，比管涌初期增大了 8.9 倍。

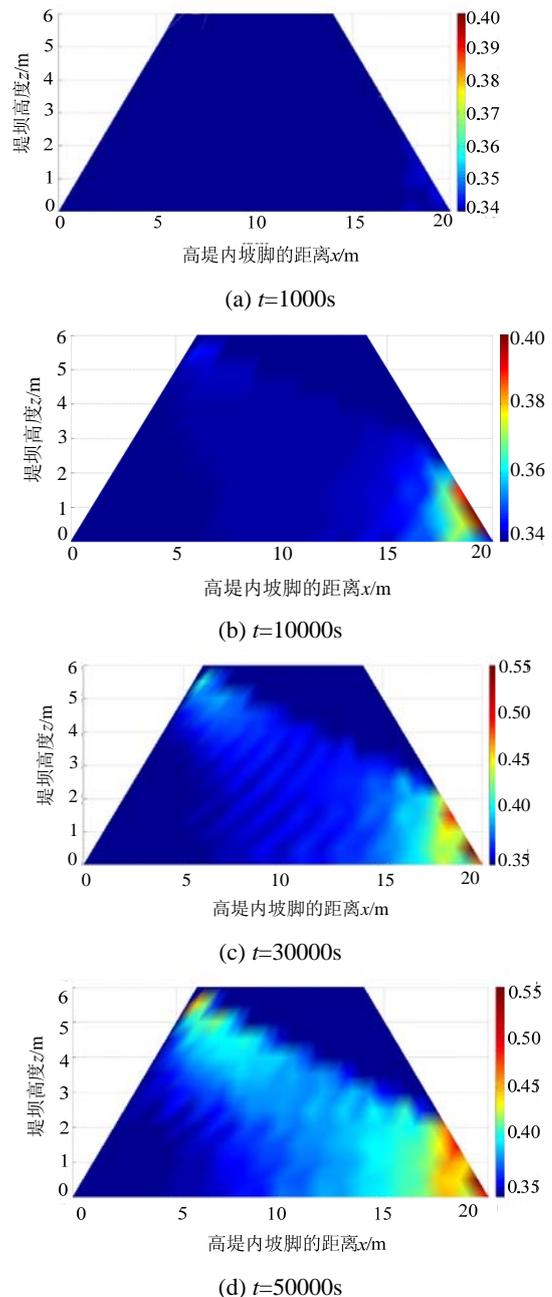
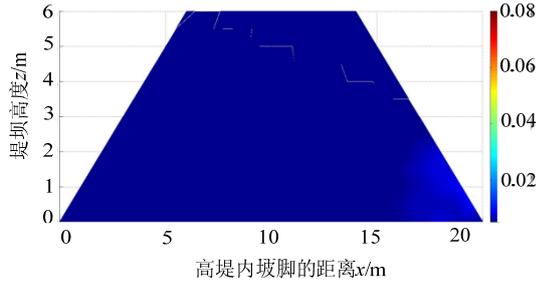
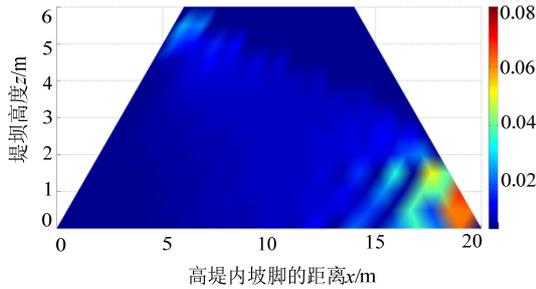


图 5 孔隙率在各管涌时间点上的分布云图

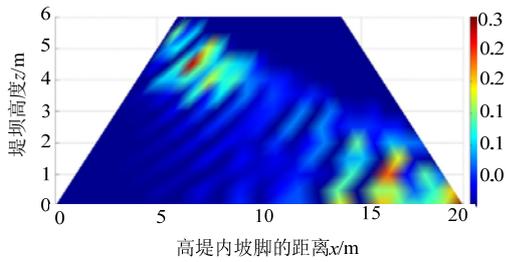
Fig.5 Porosity over time



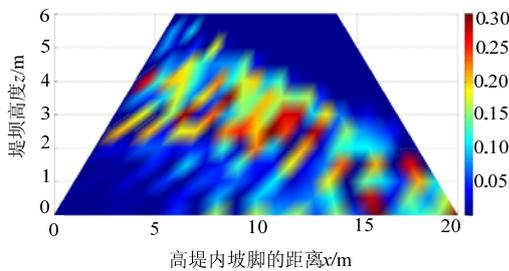
(a) $t=1000s$



(b) $t=10000s$

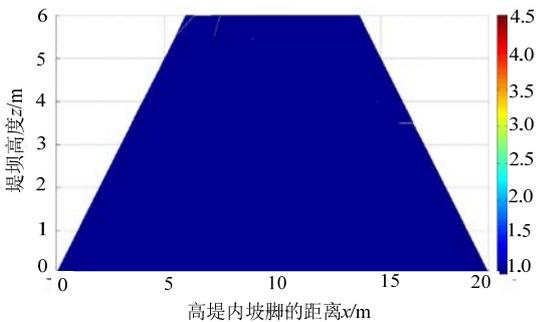


(c) $t=30000s$

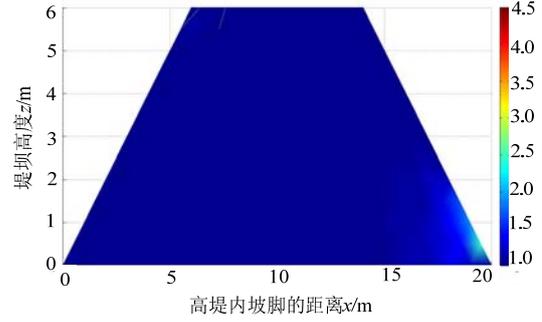


(d) $t=50000s$

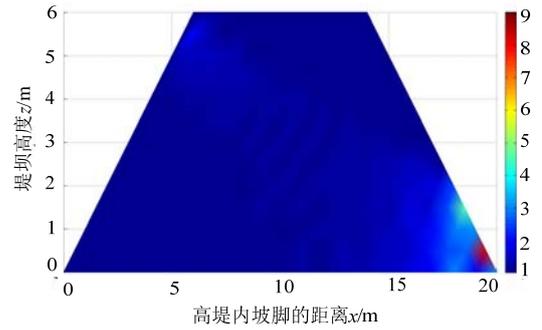
图6 细颗粒浓度在各管涌时间点上的分布云图
Fig.6 Fine particle concentration over time



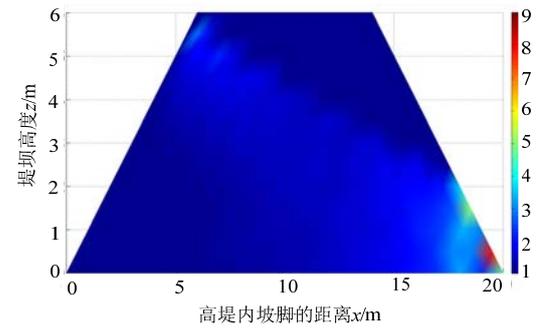
(a) $t=1000s$



(b) $t=10000s$



(c) $t=30000s$

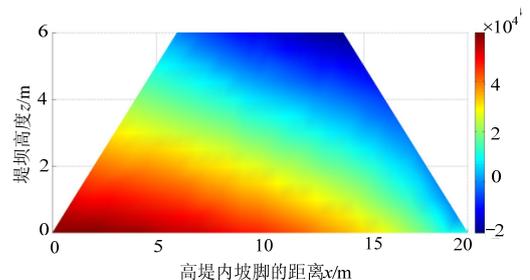


(d) $t=50000s$

图7 渗流速度增大系数随管涌时间变化图

Fig.7 Amplification of seepage velocity over time

图8(a)~图8(d)为 $t=1000s$ 、 $t=10000s$ 、 $t=30000s$ 和 $t=50000s$ 孔隙水压力云图。从图中可以看出,管涌对孔隙水压力在堤坝中的分布和渗流自由面位置略有影响,但影响不大。



(a) $t=1000s$

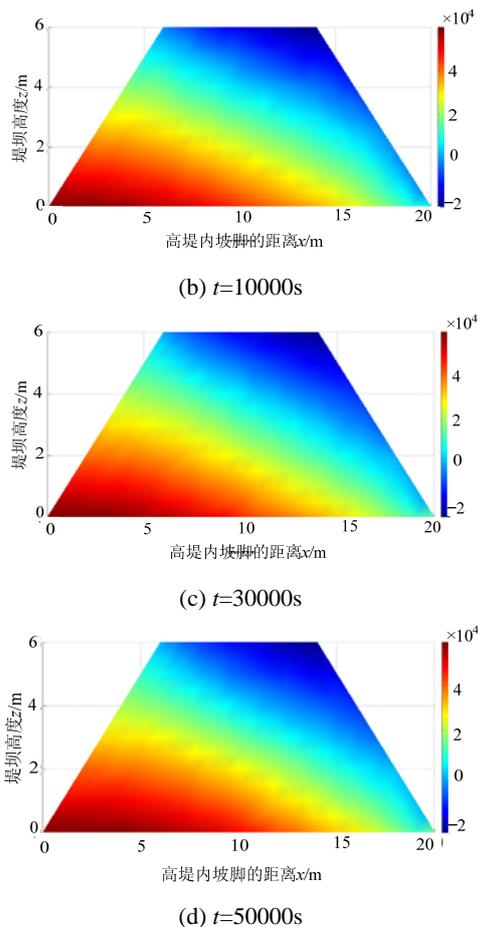


图8 孔隙水压力在各管涌时间点上的分布云图

Fig.8 Pore water pressure over time

4 结论

根据修正的 SPV 管涌渗流侵蚀控制方程, 采用传导矩阵调整法, 对带自由面的均质土石坝坝体渗流管涌规律进行了数值分析, 得出如下结论:

(1) 对于均质土石坝坝体, 管涌侵蚀首先出现在溢出面附近, 随着侵蚀时间的增加, 沿着自由面附近区域逐渐向上游扩展, 直至管涌侵蚀贯通。

(2) 在本算例中, 水中细颗粒浓度的大小与管涌侵蚀程度基本一致: 在管涌侵蚀明显的区域, 水中细颗粒浓度比较大, 在管涌侵蚀不明显区域, 细颗粒浓度比较小。

(3) 管涌对渗流速度的影响较大, 在管涌后期, 溢出面处的渗流速度为管涌初期的 8.9 倍, 在自由面附近区域, 渗流速度比管涌初期平均增大了 4 倍。管涌对在堤坝中孔隙水压力的分布和渗流自由面的位置略有影响, 但影响不大。

需要指出的是, 在实际管涌中, 由于细颗粒在渗流作用下沿水平向的运移能力和沿垂直向的运

移能力不尽相同, 土体水平向的临界水力梯度和垂直向的临界水力梯度也不一致, 因此采用横观各向异性侵蚀本构关系来反映管涌的渗流侵蚀性质更为合适。此时坝体管涌将呈现出与本文不同的侵蚀规律, 是笔者下一步的研究方向。

参考文献:

- [1] 介玉新, 许延春, 李广信. 固结计算中接触面渗流问题的模拟[J]. 工程力学, 2007, 24(增刊 1): 104—107.
Jie Yuxin, Xu Yanchun, Li Guangxin. Simulating seepage through interface in consolidation analysis [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(Suppl 1): 104—107. (in Chinese)
- [2] 李顺才, 缪协兴, 陈占清, 茅献彪. 承压破碎岩石非 Darcy 渗流的渗透特性试验研究[J]. 工程力学, 2008, 25(4): 85—92.
Li Shuncai, Miao Xiexing, Chen Zhanqing, Mao Xianbiao. Experimental study on seepage properties of non-Darcy flow in confined broken rocks [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(4): 85—92. (in Chinese)
- [3] 邹金锋. 考虑水-力耦合时交通隧道非线性解析[J]. 工程力学, 2011, 28(12): 105—111.
Zou Jinfeng. Nonlinear analytical solution on traffic tunnels considering the hydraulic-mechanical coupling [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(12): 105—111. (in Chinese)
- [4] Foster M A, Fell R, Spannagle M. The statistics of embankment dam failures and accident [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2000, 37(5): 1000—1024.
- [5] Richards K S, Reddy K R. Critical appraisal of piping phenomena in earth dams [J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2007, 66(4): 381—402.
- [6] Kenney T C, Lau D. Internal stability of granular filters [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1985, 22(2): 215—225.
- [7] Skempton A W, Brogan J M. Experiments on piping in sandy gravels discussion [J]. Geotechnique, 1994, 44(3): 449—460.
- [8] Moffat R A, Fannin R J. A large parameter for study of internal stability in cohesionless soils [J]. Geotechnical Testing Journal, 2006, 29(4): 273—279.
- [9] Bendahmane F, Marot D, Alexis A. Experimental parametric study of suffusion and backward erosion [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2008, 134(1): 57—67.
- [10] Richards K S, Reddy K R. Experimental investigation of initiation of backward erosion piping in soils [J]. Geotechnique, 2012, 62(10): 933—942.
- [11] Chang D S, Zhang L M. A stress-controlled erosion apparatus for studying internal erosion in soils [J]. Geotechnical Testing Journal, 2011, 34(6): 1—11.

- [12] Stavropoulou M, Papanastasiou P, Vardoulakis I. Coupled wellbore erosion and stability analysis [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1998, 22(9): 749—769.
- [13] Papanastasiou P, Vardoulakis I. Sand erosion with a porosity diffusion law [J]. *Computers and Geotechnics*, 2005, 32(1): 47—58.
- [14] Cividini A, Gioda G. Finite-element approach to the erosion and transport of fine particles in granular soils [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2004, 4(3): 191—198.
- [15] 张家发, 吴昌瑜, 朱国胜. 堤基渗透变形扩展过程及悬挂式防渗墙控制作用的试验模拟[J]. *水利学报*, 2002, 33(9): 108—111, 116.
Zhang Jiafa, Wu Changyu, Zhu Guosheng. Experimental study on seepage deformation propagation control using impervious wall of suspension type [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2002, 33(9):108—111, 116. (in Chinese)
- [16] 周晓杰, 介玉新, 李广信. 基于渗流和管流耦合的管涌数值模拟[J]. *岩土力学*, 2009, 30(10): 3154—3158.
Zhou Xiaojie, Jie Yuxin, Li Guangxin. Numerical simulation of piping based on coupling seepage and pipe flow [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, 30(10): 3154—3158. (in Chinese)
- [17] 罗玉龙, 彭华, 张晋. 一维三相渗流侵蚀耦合管涌程序的研制与验证[J]. *固体力学学报*, 2008, 29(增刊): 118—121.
Luo Yulong, Peng Hua, Zhang Jin. Design and validation of 1D three-phase seepage erosion coupled piping program [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, 29(Suppl): 118—121. (in Chinese)
- [18] 罗玉龙, 彭华, 张晋. 基于 SUPG 稳定有限元技术的纯对流耦合管涌模型[J]. *岩土工程学报*, 2010, 32(7): 1072—1078.
Luo Yulong, Peng Hua, Zhang Jin. Pure convection coupled piping model based on stabilized finite element SUPG [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, 32(7): 1072—1078. (in Chinese)
- [19] 介玉新, 董唯杰, 付旭东, 等. 管涌发展的时间过程模拟[J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(2): 215—219.
Jie Yuxin, Dong Weijie, Fu Xudong, et al. Modelling of developing course of piping with time [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, 33(2): 215—219. (in Chinese)
- [20] 陈生水, 钟启明, 任强. 土石坝管涌破坏溃口发展数值模型研究[J]. *岩土工程学报*, 2009, 31(5): 653—657.
Chen Shengshui, Zhong Qiming, Ren Qiang. Numerical study on break development due to piping failure for earth-rock dams [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, 31(5): 653—657. (in Chinese)
- [21] 胡亚元, 马攀. 三相耦合渗流侵蚀管涌机制研究及有限元模拟[J]. *岩土力学*, 2013, 34(4): 913—921.
Hu Yayuan, Ma Pan. Mechanism study and finite element simulation of three-phase coupling seepage erosion piping [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2013, 34(4): 913—921. (in Chinese)
- [22] Neuman S P. Saturated-unsaturated seepage by finite elements [J]. *Journal of Hydraulic Division ASCE*, 1973, 99(12): 2233—2250.
- [23] Desai C S. Finite element residual schemes for unconfined flow [J]. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1976, 10(6): 1415—1418.
- [24] Bathe K J. Finite element for surface seepage analysis without mesh iteration [J]. *Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1979, 3(3): 13—22.
- [25] 张有天, 陈平, 王镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. *水利学报*, 1988(8): 18—26.
Zhang Youtian, Chen Ping, Wang Lei. Initial flow method for seepage analysis with free surface [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1988(8): 18—26. (in Chinese)