文章编号: 1001-0920 (2015) 07-1333-07 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2014.0479

基于直觉梯形模糊数的灰关联投影寻踪动态聚类多属性决策方法

巩奕成, 任仲宇, 丁 飞, 兰双双, 王 昊, 唐 颖, 秦 灿

(北京工业大学 a. 建筑工程学院，b. 水质科学与水环境恢复工程北京市重点实验室，北京 100124)

摘 要: 针对属性权重完全未知, 属性值以直觉梯形模糊数形式给出的多属性决策问题, 提出一种灰关联投影寻踪动态聚类法. 该方法综合考虑灰色关联和优隶属度, 改进灰关联投影法 (GRPM), 并将改进的灰关联投影法与投影寻踪动态聚类 (PPDC) 方法结合, 构建投影目标函数. 引入萤火虫算法 (FA) 优化投影目标函数, 寻求灰关联投影值的最佳投影方向, 从而求得灰关联投影值. 根据灰关联投影值的大小对备选方案进行分类、排序和择优. 实例分析结果验证了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 灰关联投影；投影寻踪；动态聚类；多属性决策；直觉梯形模糊数

中图分类号: C934 **文献标志码:** A

Grey relation-projection pursuit dynamic cluster method for multi-attribute decision making assessment with trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers

GONG Yi-cheng, *REN Zhong-yu*, *DING Fei*, *LAN Shuang-shuang*, *WANG Hao*, *TANG Ying*, *QIN Can*

(a. College of Architecture and Civil Engineering，b. Key Laboratory of Beijing for Water Quality Science and Water Environment Recovery Engineering，Beijing University of Technology，Beijing 100124，China. Correspondent: GONG Yi-cheng，E-mail：gongyc@emails.bjut.edu.cn)

Abstract: Aiming at unknown attribute weights and attribute values which are expressed in trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers, a gray relation projection pursuit dynamic cluster method is proposed. This method improves grey correlation projection method(GRPM) under the comprehensive consideration of preferential membership and grey correlation, combines projection pursuit dynamic cluster(PPDC) method and the grey relation projection method, and constructs the projection objective function. The firefly algorithm(FA) is adopted to optimize the objective function of projection for obtaining the best projection direction of grey correlation projection values, and the grey correlation projection values are evaluated, which are applied to classify, rank and prefer the alternatives. Results of the application examples verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: grey relation projection；projection pursuit；dynamic cluster；multi-attribute decision making；trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers

0 引 言

多属性决策 (MADM) 是现代决策科学的一个重要组成部分, 主要是利用已有决策信息, 对有限个备选方案按照一定方式进行排序择优[1-3], 以解决多个属性有限个方案的决策问题, 其理论和方法在应急会商、系统工程和管理科学等诸多领域有广泛的应用.

现有研究成果对属性值为区间数、三角模糊数和梯形模糊数的 MADM 问题均有研究[1-6]. 自文献 [7] 提出模糊集理论以来, 该理论便被广泛用于研究模糊决策问题; 文献 [8-9] 提出了直觉模糊集, 并在此基础上进一步研究了区间直觉模糊集 (IVIFS); 文献 [10] 针对属性权重不完全已知或完全未知的区间直觉模糊 MADM 问题, 提出了一种理想解的方法; 文献 [11] 定义了直觉三角模糊数及其运算, 并应用于直觉

收稿日期: 2014-04-03；**修回日期:** 2014-11-14.

基金项目: 国家科技支撑计划项目 (2011BAC12B03).

作者简介: 巩奕成(1988−), 男, 博士生, 从事水资源管理与决策的研究；任仲宇(1968−), 男, 副教授, 从事水资源管理和水环境应急决策的研究.

模糊故障数分析; 文献 [12] 定义了直觉梯形模糊数和区间直觉梯形模糊数; 文献 [13] 定义了直觉梯形模糊数的距离公式和加权算数平均算子, 并提出了信息不完全确定的多准则决策方法; 文献 [14] 从几何角度定义了直觉梯形模糊数期望值和期望函数, 以及直觉梯形模糊数有序加权集成算子; 文献 [15] 定义了直觉梯形模糊有序加权平均算子和混合集成算子, 并提出了用于解决直觉梯形模糊数的多属性群决策方法; 文献 [16] 针对属性值为直觉梯形模糊数, 属性权重完全未知的多属性决策问题, 提出了一种扩展的 VIKOR 方法; 文献 [4] 提出了直觉梯形模糊数的幂均算子, 并将其应用于多属性群决策问题.

目前, 基于直觉梯形模糊多属性决策问题的研究尚处于起步阶段. 为了避免确定属性权重时主观人为因素的干扰以及决策信息的缺失, 解决多属性决策问题中的不相容性和模糊性, 本文提出一种灰关联投影寻踪动态聚类方法, 并将其用于解决属性权重完全未知且属性值以直觉梯形模糊数形式给出的多属性决策问题.

1 预备知识

1.1 直觉梯形模糊数

定义 1[12, 17] 设 $\tilde{a}$ 为实数集中的一个直觉梯形模糊数, 其隶属函数可表示为

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}\mu_{\tilde{a}},\ a\leqslant x<b;\\ \mu_{\tilde{a}},\ b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{d-x}{d-c}\mu_{\tilde{a}},\ c<x\leqslant d;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}\tag{1}$$

非隶属函数为

$$\nu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\dfrac{b-x+\nu_{\tilde{a}}(x-a)}{b-a_1}\mu_{\tilde{a}},\ a_1\leqslant x<b;\\ \nu_{\tilde{a}},\ b\leqslant x\leqslant c;\\ \dfrac{x-c+\nu_{\tilde{a}}(d_1-x)}{d_1-c}\mu_{\tilde{a}},\ c<x\leqslant d_1;\\ 0,\ \text{otherwise}.\end{cases}\tag{2}$$

其中: $0\leqslant\mu_{\tilde{a}}\leqslant 1, 0\leqslant\nu_{\tilde{a}}\leqslant 1, \mu_{\tilde{a}}+\mu_{\tilde{a}}\leqslant 1$; $a, a_1, b, c, d, d_1\in R$. 称 $\tilde{a}=\langle([a,b,c,d];\mu_{\tilde{a}}),([a_1,b,c,d_1];\nu_{\tilde{a}})\rangle$ 为直觉梯形模糊数. 如果 $[a,b,c,d]=[a_1,b,c,d_1]$, 则直觉梯形模糊数可简记为 $\tilde{a}=([a,b,c,d];\mu_{\tilde{a}},\nu_{\tilde{a}})$. 另外, $\pi=1-\mu_{\tilde{a}}-\nu_{\tilde{a}}$ 表示模糊数的犹豫程度, $\pi_{\tilde{a}}$ 越小, 模糊数越确定. 特别地, 当 $b=c$ 时, 直觉梯形模糊数将简化为直觉三角模糊数[18].

1.1.1 直觉梯形模糊数的运算法则和性质

定义 2 设 $\tilde{a}_1=([a_1,b_1,c_1,d_1];\mu_{\tilde{a}_1},\nu_{\tilde{a}_1})$, $\tilde{a}_2=([a_2,b_2,c_2,d_2];\mu_{\tilde{a}_2},\nu_{\tilde{a}_2})$ 为两个任意的直觉梯形模糊数, $\lambda\geqslant 0$, 直觉梯形模糊数的基本运算法则定义如下:

1) $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=([a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2];\mu_{\tilde{a}_1}\bigwedge\mu_{\tilde{a}_2},\nu_{\tilde{a}_1}\bigvee\nu_{\tilde{a}_2})$. 其中: 算子"$\bigwedge$"为通过比较取其小, "$\bigvee$"为通过比较取其大.

2) $\tilde{a}_1\tilde{a}_2=([a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2,d_1d_2];\mu_{\tilde{a}_1}\bigwedge\mu_{\tilde{a}_2},\nu_{\tilde{a}_1}\bigvee\nu_{\tilde{a}_2})$;

3) $\lambda\tilde{a}_1=([\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1,\lambda d_1];\mu_{\tilde{a}_1},\nu_{\tilde{a}_1})$;

4) $\tilde{a}_1^{\lambda}=([a_1^{\lambda},b_1^{\lambda},c_1^{\lambda},d_1^{\lambda}];\mu_{\tilde{a}_1},\nu_{\tilde{a}_1})$.

性质 1 设 $\tilde{a}_1=([a_1,b_1,c_1,d_1];\mu_{\tilde{a}_1},\nu_{\tilde{a}_1})$, $\tilde{a}_2=([a_2,b_2,c_2,d_2];\mu_{\tilde{a}_2},\nu_{\tilde{a}_2})$ 为两个任意的直觉梯形模糊数, $\lambda\geqslant 0$, 易见 $\tilde{a}_1,\tilde{a}_2$ 具有以下性质:

1) $\tilde{a}_1+\tilde{a}_2=\tilde{a}_2+\tilde{a}_1, \tilde{a}_1\tilde{a}_2=\tilde{a}_2\tilde{a}_1$.

2) $\lambda(\tilde{a}_1+\tilde{a}_2)=\lambda\tilde{a}_1+\lambda\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_1^{\lambda_1}+\tilde{a}_1^{\lambda_2}=\tilde{a}_1^{\lambda_1+\lambda_2}$, $\lambda_1\tilde{a}_1+\lambda_2\tilde{a}_1=(\lambda_1+\lambda_2)\tilde{a}_1$. 其中: $\lambda\geqslant 0$, $\lambda_1\geqslant 0, \lambda_2\geqslant 0$.

3) $(\tilde{a}_1^{\lambda})^k=\tilde{a}_1^{\lambda k}$. 其中: $\tilde{a}_1\geqslant 0, \lambda\geqslant 0, k\geqslant 0$.

1.1.2 直觉梯形模糊数的距离

定义 3[19] 设 Z 为 Banach 空间, U 和 V 为 Z 中的任意两个子集, 则 U 与 V 之间的 Hausdorff 距离为

$$d(U,V)=\max\{\sup_{u\in U}\inf_{v\in V}|u-v|,\sup_{v\in V}\inf_{u\in U}|u-v|\}.$$

如果 $Z=R, U=[u_1,u_2]$ 和 $V=[v_1,v_2]$ 为区间数, 则距离简化为 $d(U,V)=\max\{|u_1-v_1|,|u_2-v_2|\}$.

定义 4 设 $\tilde{a}_1=([a_1,b_1,c_1,d_1];\mu_1,\nu_1)$, $\tilde{a}_2=([a_2,b_2,c_2,d_2];\mu_2,\nu_2)$ 为两个任意的直觉梯形模糊数, 基于 Hausdorff 距离的定义, 它们之间的 Hamming 距离和 Euclidean 距离分别定义如下:

$$\begin{aligned}&d_h(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=\\&\frac{1}{4}(|a_1-a_2|+|b_1-b_2|+|c_1-c_2|+\\&|d_1-d_2|)+\max\{|\mu_1-\mu_2|,|\nu_1-\nu_2|\};\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&d_e(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2)=\\&\frac{1}{2}((a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2+\\&(d_1-d_2)^2+\max\{|\mu_1-\mu_2|^2,|\nu_1-\nu_2|^2\})^{1/2}.\end{aligned}\tag{4}$$

若 $\mu_1=\mu_2=1$, $v_1=v_2=0$, 则直觉梯形模糊数 $\tilde{a}_1=([a_1,b_1,c_1,d_1];\mu_1,\nu_1)$ 和 $\tilde{a}_2=([a_2,b_2,c_2,d_2];\mu_2,\nu_2)$ 退化为梯形模糊数. 因此, 式 (3) 和 (4) 均退化为梯形模糊数的 Hamming 距离和 Euclidean 距离.

1.2 改进的灰关联投影法

1.2.1 建立方案评价集矩阵

灰关联投影法是一种多目标系统决策方法, 它将灰色系统理论与矢量投影原理相结合, 理论简捷, 可操作性好. 该方法能够全面地分析指标间的相互关系, 反映整个指标空间的影响, 避免单方向偏差[20]. 为了便于分析并保证方案集中各指标之间具有等效性和同序性, 首先根据模糊数学隶属函数理论, 对

指标原始数据进行归一化处理并消除量纲. 设有备选方案集 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$, 指标 (属性) 集 $B=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$, 备选方案 X_i 在指标 B_j 下的属性值为 x_{ij}, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$, w_j 为指标的权重, $w\in[0,1]$, $j=1,2,\cdots,n$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$. 记 X^* 为 X 的决策矩阵, 对于效益型指标 (越大越优), 通过下式进行归一化处理并消除量纲:

$$x_{ij}^*=\frac{x_{ij}-x_{j(\min)}}{x_{j(\max)}-x_{j(\min)}};\tag{5}$$

对于成本型指标 (越小越优), 其处理方式为

$$x_{ij}^*=\frac{x_{j(\max)}-x_{ij}}{x_{j(\max)}-x_{j(\min)}}.\tag{6}$$

其中: $x_{j(\max)}$ 和 $x_{j(\min)}$ 分别为第 j 个指标的最大值和最小值, x_{ij}^* 为指标值的归一化数列. 于是, 备选方案集 X 对指标集 B 的决策矩阵为

$$X^*=(x_{ij}^*),\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

理想方案参考数列的元素应由各备选方案规范化后的指标 (属性) 值最优解组成, 即

$$X_0^*=(x_{01}^*,x_{02}^*,\cdots,x_{0n}^*),\tag{7}$$

其中 $x_{0j}^*=\max_j x_{ij}^*$, $j=1,2,\cdots,n$.

1.2.2　差异空间变换矩阵

记 σ_{ij} 为理想方案参考数列 X_0^* 与备选方案指标数列 X_i^* 之间差值的绝对值, 即

$$\sigma_{ij}=|x_{0j}^*-x_{ij}^*|,\tag{8}$$

$$\varDelta=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\dots&\sigma_{1n}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}&\dots&\sigma_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\sigma_{m1}&\sigma_{m2}&\dots&\sigma_{mn}\end{bmatrix}.\tag{9}$$

其中: σ_{ij} 的最大值为两极最大值 $\sigma_{\max}$, 最小值为两极最小值 $\sigma_{\min}$.

1.2.3　确定加权灰色关联决策矩阵

记 $\varOmega$ 为灰色关联空间, ζ 为特定关联映射, r_{ij} 为灰色关联系数[21], 则

$$r_{ij}=\frac{\sigma_{\min}+\lambda\sigma_{\max}}{\sigma_{ij}+\lambda\sigma_{\max}},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.\tag{10}$$

其中 λ 为分辨系数, $\lambda\in[0,1]$, 通常取 $\lambda=0.5$. 将 $m\times n$ 个灰色关联系数 r_{ij} 组成灰色关联度判断矩阵 R, 记指标权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$, 于是对 R 加权后可得加权灰色关联决策矩阵

$$R^*=\begin{bmatrix}w_1r_{11}&w_2r_{12}&\dots&w_nr_{1n}\\w_1r_{21}&w_2r_{22}&\dots&w_nr_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\w_1r_{m1}&w_2r_{m2}&\dots&w_nr_{mn}\end{bmatrix}.\tag{11}$$

1.2.4　计算灰色关联投影值

将每个备选方案堪称一个行向量 (矢量), 则称备选方案与理想方案之间的夹角为灰色关联投影角[20], 其余弦值为

$$d_i=\cos\alpha=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}w_jr_{ij}w_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}[w_jr_{ij}]^2}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}w_j^2}}.\tag{12}$$

显然, 夹角余弦 $0\leqslant d_i\leqslant1$, 且总是越大越好. d_i 越大, 表示 X_i^* 与 X_0^* 之间的变化方向越一致. 记 X_i^* 的模数为 a_i, 备选方案 X_i^* 在理想方案 X_0^* 上的灰色关联投影值[20]为

$$z_i=a_id_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}w_j^2r_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}w_j^2}}=\sum_{j=1}^{n}\bar{w_j}r_{ij}.\tag{13}$$

其中

$$\bar{w_j}=w_j^2\Big/\sqrt{\sum_{j=1}^{n}w_j^2},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n;\tag{14}$$

称 $\bar{w_j}=(\bar{w_1},\bar{w_2},\cdots,\bar{w_n})$ 为灰色关联投影值矢量. 依据灰色关联投影值 $z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的大小对各备选方案进行排序并择优; 灰色关联投影值越大, 对应的方案越优.

1.3　投影寻踪动态聚类法[22]

1.3.1　备选方案评价指标集的归一化处理

设有备选方案集 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$, 指标 (属性) 集 $B=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$, 备选方案 X_i 在指标 B_j 下的属性值为 x_{ij}, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$. 由于各指标的量纲不同或数值范围相差较大, 根据式 (5) 和 (6) 对指标进行归一化处理并消除量纲.

1.3.2　线性投影

PP 方法是将 n 维数据 $\{x_{ij}|j=1,2,\cdots,n\}$ 综合成以 $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为投影方向的一维投影值

$$z_i=\sum_{j=1}^{n}a_jx_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,$$

其中 a 为单位长度向量.

1.3.3　构造投影指标

设备选方案投影特征值集合为 $\varOmega=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$, 记 $s(z_i,z_k)$ 为任意两投影特征值间的绝对值距离, 即 $s(z_i,z_k)=|z_i-z_k|$, $k=1,2,\cdots,n$; 将待聚类方案分为 $N(N\leqslant n)$ 类, 用 $\varTheta_h(h=1,2,\cdots,n)$ 表示第 h 类备选方案投影特征值集合, 即

$$\Theta_h=\{z_i|d(A_h-z_i)\leqslant d(A_t-z_i),\\ t=1,2,\cdots,N;t\neq h\}.$$

其中

$$d(A_h-z_i)=|z_i-A_h|,\ d(A_t-z_i)=|z_i-A_t|,$$

A_h 和 A_t 分别为第 h 类和第 t 类的初始聚核. 在实际操作过程中, 用前一次得到的分类备选方案投影特征值的均值迭代替换. 类内方案的邻近程度用类内聚度 $\mathrm{dd}(a)$ 表示为

$$\mathrm{dd}(a)=\sum_{h=1}^{N}d_h(a), \tag{15}$$

其中: $d_h(a)=\sum\limits_{z_i,z_k\in\Theta_h}s(z_i,z_k)$, $\mathrm{dd}(a)$ 越小类内方案的聚集程度越高.

方案间的离散程度用类间分散度 $\mathrm{ss}(a)$ 表示为

$$\mathrm{ss}(a)=\sum_{z_i,z_k\in\Omega}s(z_i,z_k), \tag{16}$$

$\mathrm{ss}(a)$ 越大备选方案离散程度越高.

根据动态聚类法构建的投影指标为

$$\mathrm{QQ}(a)=\mathrm{ss}(a)-\mathrm{dd}(a). \tag{17}$$

显然, 当 $\mathrm{QQ}(a)$ 取最大值时, 可实现类内备选方案尽量集中、类间备选方案尽量散开的聚类目标.

1.3.4 优化投影指标

通过上述分析, 投影寻踪动态聚类法可转化为如下非线性优化问题:

$$\begin{cases}\max\ \ \mathrm{QQ}(a);\\ \|a\|=1.\end{cases} \tag{18}$$

本文采用萤火虫算法 (FA) 求解. FA 算法是群集智能优化算法领域的最新算法, 由英国剑桥大学 YANG[23] 根据萤火虫的特性提出, 具体算法参见文献 [23]. 下面简要介绍萤火虫算法的流程[24].

Step 1: 初始化算法基本参数. 设置萤火虫数目 m, 光强吸收系数 γ, 最大吸引度 β_0, 步长因子 α , 搜索精度 ε 或最大迭代次数 $\max N$.

Step 2: 随机初始化萤火虫的位置, 计算萤火虫的目标函数值, 并将其作为各自最大萤光亮度 I_0.

Step 3: 计算群体中萤火虫的相对亮度 I 和吸引度 β, 根据相对亮度决定萤火虫的移动方向.

Step 4: 更新萤火虫的空间位置, 对处在最优位置的萤火虫进行随机扰动. 根据更新后萤火虫的位置, 重新计算萤火虫的亮度.

Step 5: 当搜索精度满足要求或达到最大搜索次数时转 Step 6; 否则, 搜索次数增加 1, 转 Step 4, 进行下一次搜索.

Step 6: 输出全局极值点和最优个体值.

算法的时间复杂度为 $O(m^2)$, m 为萤火虫数目.

2 基于直觉梯形模糊数的灰关联投影寻踪动态聚类法

设有备选方案集 $X=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$, 指标 (属性) 集 $B=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$, 指标权重 w_j 完全未知, 满足 $w_j\in[0,1]$, $j=1,2,\cdots,n$, $\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$. 方案 X_i 在指标 B_j 下的属性值为 x_{ij}, 那么模糊决策矩阵为 $\tilde{X}=[\tilde{x_{ij}}]_{m\times n}$, $\tilde{x}_{ij}$ 可用直觉梯形模糊数表示为

$$\tilde{x}_{ij}=([h_{1i}(x_j),h_{2i}(x_j),h_{3i}(x_j),h_{4i}(x_j)];\mu_{ij},\nu_{ij}).$$

其中: μ_{ij} 表示方案 X_i 在属性 B_j 下属于梯形模糊数 $[h_{1i}(x_j),h_{2i}(x_j),h_{3i}(x_j),h_{4i}(x_j)]$ 的程度, ν_{ij} 表示方案 X_i 在属性 B_j 下不属于梯形模糊数 $[h_{1i}(x_j),h_{2i}(x_j),h_{3i}(x_j),h_{4i}(x_j)]$ 的程度, $0\leqslant\mu_{ij}\leqslant1$, $0\leqslant\nu_{ij}\leqslant1$, $\mu_{ij}+\nu_{ij}\leqslant1$.

针对属性值以直觉梯形模糊数形式表示且属性权重信息完全未知的多属性决策问题, 提出一种灰关联投影寻踪动态聚类方法, 具体计算步骤如下.

Step 1: 构造直觉梯形模糊决策矩阵 $\tilde{R}$ 并规范化. 若直觉梯形模糊数

$$\tilde{x}_{ij}=([h_{1i}(x_j),h_{2i}(x_j),h_{3i}(x_j),h_{4i}(x_j)];\mu_{ij},\nu_{ij}),$$

则对于效益型属性, 利用下式将 $\tilde{R}$ 规范化:

$$r_{li}(x_j)=\frac{h_{li}(x_j)-\min h_{1i}(x_j)}{\max h_{4i}(x_j)-\min h_{1i}(x_j)},\ l=1,2,\cdots,4; \tag{19}$$

对于成本型属性, 利用下式将 $\tilde{R}$ 规范化:

$$r_{li}(x_j)=\frac{\max h_{4i}(x_j)-h_{5-l,i}(x_j)}{\max h_{4i}(x_j)-\min h_{1i}(x_j)},\ l=1,2,\cdots,4. \tag{20}$$

其中: $h_{5-l,i}(x_j)$ 的下标 $5-l$ 能确保规范化后的结果满足 $r_{1i}(x_j)\leqslant r_{2i}(x_j)\leqslant r_{3i}(x_j)\leqslant r_{4i}(x_j)$, 即 $\tilde{r}_{ij}$ 仍为直觉梯形模糊数. 将 $\tilde{r}_{ij}$ 简记为 $\tilde{r}_{ij}=[r_{1i}(x_j),r_{2i}(x_j),r_{3i}(x_j),r_{4i}(x_j)]$, 规范化后的决策矩阵为 $\tilde{R}=[\tilde{r}_{ij}]_{m\times n}$.

Step 2: 确定参考数列. 将参考序列定义为

$$R_0=(r_{01},r_{02},\cdots,r_{0n}), \tag{21}$$

其中 $r_{0j}=([1,1,1,1];1,0)$.

Step 3: 计算属性值数列与参考数列对应元素之间的距离. 利用定义 4 中式 (3) 计算 Hamming 距离, 即

$$\sigma_{ij}=\\ \frac{1}{4}(|r_{1i}(x_j)-1|+|r_{2i}(x_j)-1|+|r_{3i}(x_j)-1|+\\ |r_{4i}(x_j)-1|)+\max\{|\mu_{ij}-1|,|\nu_{ij}-0|\}. \tag{22}$$

式 (22) 确定了属性值数列与参考数列对应元素之间距离 δ_{ij} , 这种处理方式比直接转化为实数失去的信息更少. 同时, 可获得所有距离的最大值 $\sigma_{\max}$ 和最

小值 $\sigma_{\min}$. 其中: $\sigma_{\max} = \max_{ij} \sigma_{ij}, \sigma_{\min} = \min_{ij} \sigma_{ij}$, $i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$.

Step 4: 计算灰色关联系数. 根据式 (10) 可得灰色关联系数

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{\min} + \lambda\sigma_{\max}}{\sigma_{ij} + \lambda\sigma_{\max}},$$
$$i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n, \tag{23}$$

取分辨系数 $\lambda = 0.5$.

Step 5: 计算灰关联投影值. 根据式 (13) 可得灰关联投影值

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j r_{ij},$$
$$i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{24}$$

灰关联投影法的基本原则为: 理想方案与备选方案之间应该有最大的灰关联投影值. 显然, 如果各属性权重信息已知, 根据式 (14) 可得灰关联投影值矢量, 从而求得灰关联投影值, 那么灰关联投影值越大, 备选方案便越优. 然而, 本文的属性权重信息完全未知, 故欲求灰关联投影值, 需求得属性权重或灰关联投影值矢量. 因此, 通过第 1.3 节中的投影寻踪动态聚类法建立优化模型计算灰关联投影值矢量为

$$\max\ z_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j^* r_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, m;$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_j^{*2} = 1,\ \bar{w}_j^{*2} \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n. \tag{25}$$

通过引入萤火虫算法对目标模型进行优化, 可得 $\bar{w}_j^* = (\bar{w}_1^*, \bar{w}_2^*, \cdots, \bar{w}_n^*)$, 通过式 (14) 求得灰关联投影值矢量 $\bar{w}_j = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \cdots, \bar{w}_n)$, 这样通过式 (13) 可得灰关联投影值 z_i.

Step 6: 对各备选方案进行排序. 依据灰关联投影值 $z_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 的大小对各备选方案进行分类和排序择优. 灰关联投影值 z_i 越大, 方案 X_i 越优.

3 实例分析

例 1 某流域发生水质污染事件, 流域主管部门对现有 5 个应急备选方案 $X_i (i = 1, 2, \cdots, 5)$ 进行选择, 会商决策者根据应急处理 (B_1)、现场控制 (B_2)、调配物资 (B_3)、跟踪监测 (B_4) 和事后恢复 (B_5) 5 项评估属性对各备选方案进行比选. 现由决策者给出决策信息, 如表 1 所示. 由于备选方案是一个多元复杂体系, 影响备选方案的评估属性较多, 规律性各不相同, 这便给选择最佳方案带来了众多模糊性和不确定性. 由于备选方案属性权重未知, 通过专家调查打分 (即离散方法) 确定备选方案某种评估属性的权重会过早地将模糊信息精确化, 造成信息的丢失, 这样将导致评判结果可信度降低[25]. 为了避免通过专家调查打分等方法确定属性权重时主观人为因素的干扰以及决策信息的缺失, 在选择最佳方案时, 可利用本文提出的决策方法进行求解, 求解过程如下:

1) 根据 Step 1 将直觉梯形模糊决策矩阵规范化, 结果如表 2 所示.

2) 根据 Step 3 计算各备选方案与参考数列之间的距离, 结果如表 3 所示.

3) 根据 Step 4 计算灰色关联系数, 结果如表 4 所示.

4) 根据 Step 5 计算灰色关联投影值. 首先根据投影寻踪动态聚类方法建立优化模型, 其中 $m = 5$, $n = 5$, $N = 2$ (即将方案聚类为两类), 可得到最佳投影方向

$$\bar{w}_j^* = (0.531\,9, 0.369\,3, 0.751\,7, 0.114\,4, 0.050\,2),$$

通过式 (14) 求得灰关联投影值矢量

$$\bar{w}_j = (0.155\,7, 0.075\,0, 0.310\,9, 0.007\,2, 0.001\,4),$$

表 1 直觉梯形模糊决策矩阵

方案	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
X_1	([1, 2, 3, 4]; 0.7, 0.3)	([5, 6, 7, 8]; 0.7, 0.3)	([3, 4, 5, 6]; 0.7, 0.3)	([4, 5, 7, 8]; 0.6, 0.3)	([4, 5, 6, 7]; 0.8, 0.0)
X_2	([2, 3, 4, 5]; 0.6, 0.3)	([6, 7, 8, 9]; 0.8, 0.1)	([4, 5, 6, 7]; 0.8, 0.2)	([3, 4, 5, 6]; 0.7, 0.3)	([6, 7, 8, 9]; 0.6, 0.3)
X_3	([1, 2, 3, 5]; 0.6, 0.4)	([4, 6, 7, 8]; 0.6, 0.3)	([3, 4, 5, 6]; 0.5, 0.5)	([4, 5, 6, 7]; 0.8, 0.1)	([5, 6, 7, 8]; 0.8, 0.2)
X_4	([2, 3, 4, 6]; 0.6, 0.2)	([5, 6, 7, 8]; 0.8, 0.2)	([2, 3, 5, 6]; 0.6, 0.4)	([3, 4, 5, 7]; 0.6, 0.3)	([4, 6, 7, 8]; 0.6, 0.3)
X_5	([2, 3, 4, 5]; 0.8, 0.2)	([4, 5, 6, 7]; 0.9, 0.0)	([3, 4, 5, 6]; 0.8, 0.2)	([3, 5, 7, 8]; 0.7, 0.1)	([4, 5, 6, 7]; 0.8, 0.0)

表 2 规范化决策矩阵

方案	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
X_1	([0.0, 0.2, 0.4, 0.6]; 0.7, 0.3)	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.7, 0.3)	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.7, 0.3)	([0.2, 0.4, 0.8, 1.0]; 0.6, 0.3)	([0.0, 0.2, 0.4, 0.6]; 0.8, 0.0)
X_2	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.6, 0.3)	([0.4, 06, 0.8, 1.0]; 0.8, 0.1)	([0.4, 0.6, 0.8, 0.1]; 0.8, 0.2)	([0.0, 0.2, 0.4, 0.6]; 0.7, 0.3)	([0.4, 0.6, 0.8, 1.0]; 0.6, 0.3)
X_3	([0.0, 0.2, 0.4, 0.8]; 0.6, 0.4)	([0.0, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.6, 0.3)	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.5, 0.5)	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.8, 0.1)	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.8, 0.2)
X_4	([0.2, 0.4, 0.6, 1.0]; 0.6, 0.2)	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.8, 0.2)	([0.0, 0.2, 0.6, 0.8]; 0.6, 0.4)	([0.0, 0.2, 0.4, 0.8]; 0.6, 0.3)	([0.0, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.6, 0.3)
X_5	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.8, 0.2)	([0.0, 0.2, 0.4, 0.6]; 0.9, 0.0)	([0.2, 0.4, 0.6, 0.8]; 0.8, 0.2)	([0.0, 0.4, 0.8, 1.0]; 0.7, 0.1)	([0.0, 0.2, 0.4, 0.6]; 0.8, 0.0)

通过式 (24) 得到灰色关联投影值

$$z_i = (0.409\,8, 0.503\,9, 0.369\,6, 0.393\,4, 0.455\,2).$$

表 3 各方案与参考数列的距离

属性	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min_i \sigma_{ij}$	$\max_i \sigma_{ij}$
σ_{1j}	1.0	0.8	0.8	0.8	0.9	0.8	1.0
σ_{2j}	0.9	0.5	0.5	1.0	0.7	0.5	1.0
σ_{3j}	1.05	0.95	1.0	0.7	0.7	0.7	1.05
σ_{4j}	0.85	0.7	1.0	1.05	0.95	0.7	1.05
σ_{5j}	0.7	0.8	0.7	0.75	0.9	0.7	0.9
$\sigma_{\min}$						0.5	
$\sigma_{\max}$							1.05

表 4 灰色关联系数矩阵

属性	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
r_{1j}	0.672 1	0.773 6	0.773 6	0.773 6	0.719 3
r_{2j}	0.719 3	1.000 0	1.000 0	0.672 1	0.836 7
r_{3j}	0.650 8	0.694 9	0.672 1	0.836 7	0.836 7
r_{4j}	0.745 5	0.836 7	0.672 1	0.650 8	0.694 9
r_{5j}	0.836 7	0.773 6	0.836 7	0.803 9	0.719 3

由聚类结果可知: 方案 X_2 和 X_5 为一类, 这两种方案较优; X_1, X_4 和 X_3 为一类, 较 X_2 和 X_5 次之. 因为 $z_2 > z_5 > z_1 > z_4 > z_3$, 故有 $X_2 > X_5 > X_1 > X_4 > X_3$, 因此最佳方案为 X_2.

这一结果与文献 [26] 中采用的灰关联投影法、文献 [27] 中采用的灰色关联分析法以及文献 [13] 中的信息不完全确定的多准则决策方法的计算结果均相同.

例 2 某公司为了提升自己的市场竞争力, 拟定 3 个同行企业 $X_i(i = 1, 2, 3)$, 欲从中选择一个最佳企业形成合作联盟. 聘请专家针对 3 个指标属性: 生产能力 (B_1), 研发实力 (B_2) 和资金周转能力 (B_3) 进行评价, 这些都是效益型指标. 专家给出方案的直觉梯形模糊决策矩阵如表 5 所示.

表 5 直觉梯形模糊决策矩阵

方案	B_1	B_2	B_3
X_1	([3, 5, 6, 8]; 0.5, 0.4)	([2, 3, 4, 5]; 0.8, 0.2)	([2, 4, 5, 7]; 0.7, 0.1)
X_2	([1, 2, 3, 4]; 0.8, 0.0)	([3, 4, 6, 8]; 0.5, 0.4)	([3, 4, 6, 7]; 0.7, 0.2)
X_3	([2, 3, 4, 6]; 0.7, 0.2)	([1, 3, 5, 8]; 0.6, 0.2)	([1, 2, 4, 6]; 0.7, 0.2)

与例 1 中的分析计算步骤相同, 经计算可得最佳投影方向为

$$\bar{w}_j^* = (0.614\,3, 0.689\,0, 0.384\,7),$$

通过式 (14) 求得灰关联投影值矢量

$$\bar{w}_j = (0.377\,3, 0.474\,7, 0.148\,0),$$

通过式 (24) 得到灰色关联投影值

$$z_i = (0.833\,9, 0.815\,8, 0.765\,0).$$

因为 $z_1 > z_2 > z_3$, 故有 $X_1 > X_2 > X_3$, 因此最佳方案为 X_1. 这一结果与文献 [28] 中采用的关联变权法计算结果一致.

以上两个实例说明了本文所提出方法的可行性和有效性.

4 结 论

本文提出了一种新的灰色关联投影寻踪动态聚类法. 该方法运用投影寻踪动态聚类法建立了多目标优化模型, 并引入人工智能领域最新萤火虫算法优化目标模型, 通过求得的灰关联投影值对各备选方案进行排序择优.

本文方法避免了确定备选方案属性权重时主观人为因素的干扰以及决策信息的缺失, 可对备选方案进行分类、排序和择优, 从而解决多属性决策问题中的不确定性和模糊性.

实例应用表明, 本文方法逻辑清晰, 计算简便, 丰富并发展了多属性决策问题中的理论和方法, 可用于会商决策、动态评估等相关决策问题.

参考文献(References)

[1] Jiang Y C, Tang Y, Liu H. Entropy on intuitionistic fuzzy soft sets and on interval-valued fuzzy soft sets[J]. Information Sciences, 2013, 240(8): 95-114.

[2] Wang S P, Wang Q Y. The extended VIKOR method for multi-attribute group decision making with triangular intuitionistic fuzzy numbers[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(11): 65-77.

[3] Zhang S F, Liu S Y. An extended GRA method for MCDM with interval-valued triangular fuzzy assessments and unknown weights[J]. Computers & Industrial Engineering, 2011, 61(4): 1336-1341.

[4] Wan S P. Power average operators of trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers and application to multi-attribute group decision making[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4112-4126.

[5] Liu P D. A weighted aggregation operators multi-attribute group decision-making method based on interval-valued trapezoidal fuzzy numbers[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(1): 1053-1060.

[6] Liu P D, Zhang X. The study on multi-attribute decision making with risk based on linguistic variable [J]. Int J of Computational Intelligence Systems, 2010, 3(5): 601-609.

[7] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-356.

[8] Atanassov K T. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(1): 37-46.

[9] Atanassov K T. Operators over interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 64(2): 159-174.

[10] Xu Z S. Models for multiple attribute decision-making with intuitionistic fuzzy information[J]. Int J of Uncertainty,

Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2007, 15(3): 285-297.

[11] Shu M H , Cheng C H, Chang J R. Using intuitionistic fuzzy sets for fault-tree analysis on printed circuit board assembly[J]. Microelectronics Reliability, 2006, 46(12): 2139-2148.

[12] 王坚强. 模糊多准则决策方法研究综述[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 601-606.
(Wang J Q. Overview on fuzzy multi-criteria decision-making approach[J]. Control and Decision, 2008, 23(6): 601-606.)

[13] 王坚强, 张忠. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 226-230.
(Wang J Q, Zhang Z. Multi-criteria decision-making method with incomplete certain information based on intuitionistic fuzzy number[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 226-230.)

[14] 万树平, 董九英. 多属性群决策的直觉梯形模糊数法[J]. 控制与决策, 2010, 25(5): 773-776.
(Wan S P, Dong J Y. Method of intuitionistic trapezoidal fuzzy number for multi-attribute group decision[J]. Control and Decision, 2010, 25(5): 773-776.)

[15] Wei G W. Some arithmetic aggregation operators with intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers and their application to group decision making[J]. J of Computers, 2010, 5(3): 345-351.

[16] Du Y, Liu P D. Extended fuzzy vikor method with intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers[J]. Information: An Int Interdisciplinary J, 2011, 14(8): 2575-2584.

[17] Wang J Q, Zhang Z. Aggregation operators on intuitionistic trapezoidal fuzzy number and its application to multi-criteria decision making problems[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(2): 321-326.

[18] Li D F. A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 60(6): 1557-1570.

[19] Przemys L G. Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 148(2): 319-328.

[20] 吕锋, 崔晓辉. 多目标决策灰色关联投影法及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(1): 103-107.
(Lü F, Cui X H. Multi-criteria decision grey relation projection method and its application[J]. Systems Engineering - Theory & Practice, 2002, 22(1): 103-107.)

[21] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 135-141.
(Deng J L. Gray theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002: 135-141.)

[22] 倪长健, 崔鹏. 投影寻踪动态聚类模型[J]. 系统工程学报, 2007, 22(6): 634-638.
(Ni C J, Cui P. Projection pursuit dynam ic cluster model[J]. J of Systems Engineering, 2007, 22(6): 634-638.)

[23] Yang X S. Firefly algorithms for multimodal optimization[C]. Proc of the 5th Int Symposium on Stochastic Algorithms: Foundations and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 169-178.

[24] 曾冰, 李明富, 张翼, 等. 基于萤火虫算法的装配序列规划研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(11): 177-184.
(Zeng B, Li M F, Zhang Y, et al. Research on assembly sequence planning based on firefly algorithm [J]. J of Mechanical Engineering, 2013, 49(11): 177-184.)

[25] 穆瑞, 张家泰. 基于递阶质量屋的多属性灰色模糊评价系统研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2009, 30(1): 73-80.
(Mu R, Zhang J T. A multi-attribute grey fuzzy evaluation system based on hierarchical house of quality[J]. J of Harbin Engineering University, 2009, 30(1): 73-80.)

[26] Zhang X, Jin F, Liu P D. A grey relational projection method for multi-attribute decision making based on intuitionistic trapezoidal fuzzy number[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(5): 3467-3477.

[27] 张市芳, 刘三阳, 翟任何. 直觉梯形模糊数 MADM 问题的灰色关联分析法[J]. 计算机科学, 2010, 11(37): 214-216.
(Zhang S F, Liu S Y, Zhai R H. Method of grey relational analysis for MADM problem with intuitionistic trapezoidal fuzzy numbers[J]. Computer Science, 2010, 11(37): 214-216.)

[28] 高岩, 周德群, 章玲. 基于直觉梯形模糊数的关联变权多属性决策方法[J]. 系统工程, 2011, 29(5): 102-107.
(Gao Y, Zhou D Q, Zhang L. Multi-attribute decision making with variable weight relationship based on intuitionistic trapezoidal fuzzy number[J]. Systems Engineering, 2011, 29(5): 102-107.)

(责任编辑: 滕 蓉)