

基于模型退化的平面四连杆欠驱动机械系统位置控制

熊培银¹, 赖旭芝², 吴敏²

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 长沙 410083; 2. 中国地质大学 自动化学院, 武汉 430074)

摘要: 针对第2关节为被动的平面四连杆欠驱动机械系统, 提出基于模型退化的分阶段控制策略. 首先, 建立系统的数学模型, 并通过控制第1杆维持初始状态, 使系统模型退化; 然后, 根据第1关节为被动的平面连杆系统的积分特性, 得到系统角度约束关系, 基于角度关系和目标位置, 利用粒子群优化算法获得驱动杆的目标角度; 最后, 基于Lyapunov函数分阶段设计控制律, 实现系统从初始位置到目标位置的控制目标. 仿真结果验证了所提出控制策略的有效性.

关键词: 平面欠驱动机械系统; 模型退化; 位置控制; 粒子群优化算法

中图分类号: TP24

文献标志码: A

Position control for planar four-link underactuated mechanical system based on model degeneration

XIONG Pei-yin¹, LAI Xu-zhi², WU Min²

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China; 2. School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China. Correspondent: LAI Xu-zhi, E-mail: laixz@cug.edu.cn)

Abstract: A piecewise control strategy is proposed for the planar four-link underactuated system with a passive second joint. Firstly, a mathematical model of the system is built, and it is degenerated by controlling the first link maintaining at the initial state. Then, the angle constraint relationships are obtained by employing the integral characteristics of the planar link system with a first passive joint. The target angles of actuated links are calculated by using particle swarm optimization algorithm based on the angle constraint relationships and target position. Finally, the controllers designed by employing Lyapunov functions achieve the control objective from an initial position to a target position. Simulation results show the effectiveness of the proposed control method.

Keywords: planar underactuated mechanical systems; model degeneration; position control; PSO algorithm

0 引言

欠驱动机械系统是系统的控制输入个数少于自由度个数的一类非线性系统^[1]. 相对于全驱动机械系统, 该系统减少了驱动装置并且能够完成全驱动机械系统的任务, 在减轻系统质量的同时又降低了能源消耗. 在全驱动系统部分驱动失灵时, 欠驱动系统的控制策略可以保证系统的持续运行, 极大地提高了系统运行的可靠性, 增加了系统的灵活度.

欠驱动机械系统分为垂直欠驱动机械系统和平面欠驱动机械系统, 垂直平面上运动的欠驱动机械系统(具有重力作用)的控制问题已得到国内外学者的广泛关注, 形成了较为成熟的控制理论与控制

方法^[2-5]. 然而, 随着空间技术和深海探测技术发展的需要, 平面欠驱动机械系统(不具有重力作用)逐渐成为当前机器人研究领域的一个重要方向. 对于平面欠驱动机械系统, Luca等^[6-7]研究了第2关节为被动的平面Pendubot的控制问题, 根据迭代转向技术设计非光滑反馈控制器实现对目标的控制, 但由于平面Pendubot不满足小时域局部可控性判定条件(STLC), 无法实现系统在目标位置上的完全静止, 只能通过驱动连杆的反复摆动使系统动态地控制在目标位置附近; 文献[8-9]提出了考虑系统摩擦力和附带制动装置等的控制方法, 虽然这些方法能够实现平面Pendubot的稳定控制, 但由于对被动关节施加

收稿日期: 2014-04-11; 修回日期: 2014-10-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374106).

作者简介: 熊培银(1980—), 男, 博士生, 从事欠驱动机器人、非线性控制的研究; 赖旭芝(1966—), 女, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、机器人控制和非线性系统等研究.

了外力,在一定程度上破坏了系统的欠驱动特性;针对第1关节为欠驱动的平面 Acrobot 控制问题, Oriolo 等^[10]证明了其有完全可积分的特性,属于二阶完整系统;文献[11]通过控制驱动连杆实现被动连杆的连带控制,从而实现平面 Acrobot 的位置控制;随后, Luca 等^[12]分析了第1关节为欠驱动的平面多连杆系统积分特性;针对具有欠驱动关节的平面欠驱动多连杆系统,文献[13-14]在欠驱动关节安装制动装置对系统进行控制,对于欠驱动关节处于自由状态下的系统,没有给出有效的控制策略。

基于平面 Pendubot 难于稳定到平衡位置以及平面 Acrobot 和平面 PAA 系统的积分特性,本文针对平面四连杆 APAA 欠驱动机械系统,提出一种基于模型退化的分阶段控制策略。首先,建立系统的数学模型。然后,将系统退化为部分可积的平面 PAA 系统;为了获得系统基于目标位置的连杆目标角度,进一步将平面 PAA 系统的控制分成两个阶段,使 PAA 系统在每个阶段都是完全可积的 Acrobot 系统,从而基于 Acrobot 完全可积特性获得每个阶段驱动连杆与欠驱动连杆之间的角度约束关系;基于多个角度约束关系,利用粒子群优化 (PSO) 算法^[15]获得系统目标角度;分阶段构造 Lyapunov 函数,设计相应的控制器,从而实现系统控制目标。最后,通过 Matlab 仿真实验验证了控制策略的有效性。

1 平面 APAA 欠驱动机械系统动力学模型

平面 APAA 欠驱动机械系统的模型结构如图1所示。

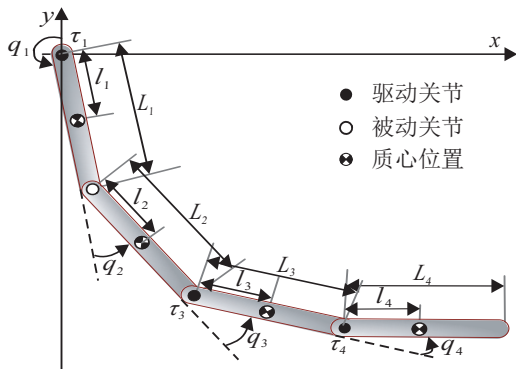


图1 平面 APAA 欠驱动机械系统模型

图1中: m_i 为第 i 杆的质量, L_i 为第 i 杆的长度, l_i 为从第 i 关节到第 i 杆质心的距离, J_i 为第 i 杆相对于质心的转动惯量, q_1 为第1杆相对于 y 轴的角度, q_j 为第 $j-1$ 杆的延长线与第 j 杆所构成的角度 ($j=2, 3, 4$), τ_i 为作用在第 i 关节的驱动力矩。

平面 APAA 欠驱动机械系统在水平面运动,系统势能 $E_p \equiv 0$, 记 $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$, 选择系统的拉格朗日函数

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}. \quad (1)$$

其中: $q, \dot{q}, K(q, \dot{q})$ 分别为系统的角度、角速度和系统动能; $M(q) = (M_{ij})_{4 \times 4}$ 为系统的惯性矩阵, 具有正定性和对称性, 且有

$$\begin{aligned} M_{11} &= a_1 + a_2 + a_4 + 2a_3 \cos q_2 + \\ &\quad 2a_5 \cos(q_2 + q_3) + a_7 \cos(q_2 + q_3 + q_4) + \\ &\quad 2a_8 \cos(q_3 + q_4) + 2a_9 \cos q_4 + a_{10}, \\ M_{12} &= a_2 + a_4 + a_3 \cos q_2 + a_5 \cos(q_2 + q_3) + \\ &\quad 2a_6 \cos q_3 + a_7 \cos(q_2 + q_3 + q_4) + \\ &\quad 2a_8 \cos(q_3 + q_4) + 2a_9 \cos q_4 + a_{10}, \\ M_{13} &= a_4 + a_{10} + a_5 \cos(q_2 + q_3) + \\ &\quad a_6 \cos q_3 + a_7 \cos(q_2 + q_3 + q_4) + \\ &\quad a_8 \cos(q_3 + q_4) + 2a_9 \cos q_4, \\ M_{14} &= a_7 \cos(q_2 + q_3 + q_4) + \\ &\quad a_8 \cos(q_3 + q_4) + a_9 \cos q_4 + a_{10}, \\ M_{22} &= a_2 + a_4 + a_{10} + 2a_6 \cos q_3 + \\ &\quad 2a_8 \cos(q_3 + q_4) + 2a_9 \cos q_4, \\ M_{23} &= a_4 + a_6 \cos q_3 + 2a_9 \cos q_4 + a_{10}, \\ M_{24} &= a_8 \cos(q_3 + q_4) + a_9 \cos q_4 + a_{10}, \\ M_{33} &= a_4 + 2a_9 \cos q_4 + a_{10}, \\ M_{34} &= a_9 \cos q_4 + a_{10}, \\ M_{44} &= a_{10}. \end{aligned}$$

系统的结构参数 a_i ($i=1, 2, \dots, 10$) 为

$$\begin{cases} a_1 = J_1 + m_1 l_1^2 + (m_2 + m_3 + m_4) L_1^2, \\ a_2 = J_2 + m_2 l_2^2 + (m_3 + m_4) L_2^2, \\ a_3 = (m_2 l_2 + m_3 L_2 + m_4 L_2) L_1, \\ a_4 = J_3 + m_3 l_3^2 + m_4 L_3^2, \quad a_5 = m_3 L_2 l_3 + m_4 L_1 L_3, \\ a_6 = m_3 L_2 l_3 + m_4 L_1 L_3, \quad a_7 = m_4 L_1 l_4, \\ a_8 = m_4 L_2 l_4, \quad a_9 = m_4 L_3 l_4, \quad a_{10} = J_4 + m_4 l_4^2. \end{cases}$$

由欧拉-拉格朗日公式得到系统的动力学方程

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i=1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

将系统的动力学方程改写为如下矩阵方程形式:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中: $[\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \ddot{q}_4]^T$ 为系统角加速度向量; $\tau = [\tau_1, 0, \tau_3, \tau_4]^T$ 为驱动力矩向量; $H(q, \dot{q}) = [H_1, H_2, H_3, H_4]^T$ 为科氏力与离心力的结合向量, 且有

$$\begin{aligned} H_1 &= \\ & - a_3(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 \sin q_2 - a_6(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 \sin q_3 - \\ & a_5(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin(q_2 + q_3) - a_7(2\dot{q}_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) \sin(q_2 + q_3 + q_4) - \\ & a_8(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)(\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \sin(q_3 + q_4) - \\ & a_9(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4)\dot{q}_4 \sin q_4, \end{aligned}$$

$$H_2 =$$

$$\begin{aligned} & a_3\dot{q}_1^2 \sin q_2 + a_5\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3) - a_6(2\dot{q}_1 + \\ & \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3 \sin q_3 + a_7\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3 + q_4) - \\ & a_8(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4)(\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \sin(q_3 + q_4) - \\ & a_9(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4)\dot{q}_4 \sin q_4, \end{aligned}$$

$$H_3 =$$

$$\begin{aligned} & a_5\dot{q}_2^2 \sin(q_2 + q_3) + a_6(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \sin q_3 + \\ & a_7\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3 + q_4) + a_8(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin(q_3 + q_4) - \\ & a_9(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_3 + \dot{q}_4)\dot{q}_4 \sin q_4, \end{aligned}$$

$$H_4 =$$

$$\begin{aligned} & a_7\dot{q}_1^2 \sin(q_2 + q_3 + q_4) + a_8(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \sin(q_3 + q_4) + \\ & a_9(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \sin q_4. \end{aligned}$$

2 系统模型退化与积分特性

本节通过控制第1杆始终保持静止,将系统第1杆虚拟为系统的固定部件,将系统退化为第1关节为欠驱动的平面PAA欠驱动机械系统,即系统的第2杆~第4杆构成平面三连杆PAA系统,分析其可积分特性,并获得退化后系统驱动杆与欠驱动杆之间的角速度约束关系。

初始时刻各杆角度、角速度和最后时刻角度分别记为 $q_{i0}, \dot{q}_{i0}, q_{id}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). 在系统控制过程中,控制第1杆保持静止时, $\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_1 = 0, q_1 = q_{10}$, 系统的动力学方程(3)中欠驱动关节的动力学约束

$$\begin{aligned} & M_{21}(q)\ddot{q}_1 + M_{22}(q)\ddot{q}_2 + \\ & M_{23}(q)\ddot{q}_3 + M_{24}(q)\ddot{q}_4 + H_2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

退化为

$$M_{22}(q)\ddot{q}_2 + M_{23}(q)\ddot{q}_3 + M_{24}(q)\ddot{q}_4 + H_{20} = 0, \quad (5)$$

其中 $H_{20} = H_2(\dot{q}_1 = 0, \dot{q}_1 = 0, q_1 = q_{10})$. 相应的系统惯性矩阵 $M(q)$ 退化为矩阵

$$M_T = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}.$$

下面分析系统的积分特性。

引理1^[10] 欠驱动关节动力学约束部分可积的充分必要条件为:

- 1) 欠驱动关节动力学约束中的重力项为常数;
- 2) 欠驱动关节变量不在惯性矩阵中出现。

由于欠驱动关节变量 q_2 出现在平面APAA系统惯性矩阵 $M(q)$ 中,即欠驱动关节动力学约束(4)不

满足部分可积分的条件,平面APAA系统为二阶非完整系统,不能通过积分得到系统的角速度约束关系;而退化后的平面PAA系统的欠驱动关节动力学约束(5)的重力项为零,满足引理1的条件1),且被动关节变量 q_2 未出现在退化后系统惯性矩阵 M_T 中,因此退化后的平面PAA系统的欠驱动关节动力学约束(5)满足部分可积条件。

通过对方程(5)进行积分,可得如下角速度约束关系:

$$M_{22}(q)\dot{q}_2 + M_{23}(q)\dot{q}_3 + M_{24}(q)\dot{q}_4 + \eta = 0, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta = & -(a_2 + a_4 + 2a_6 \cos q_{30} + 2a_8 \cos(q_{30} + q_{40}) + \\ & 2a_9 \cos q_{40} + a_{10})\dot{q}_{20} - (a_4 + a_6 \cos q_{30} + \\ & 2a_9 \cos q_{40} + a_{10})\dot{q}_{30} - (2a_8 \cos(q_{30} + q_{40}) + \\ & 2a_9 \cos q_{40} + a_{10})\dot{q}_{40}. \end{aligned}$$

当初始角速度 $\dot{q}_{20} = \dot{q}_{30} = \dot{q}_{40} = 0$ 时, $\eta = 0$, 从而各杆角速度 \dot{q}_2, \dot{q}_3 和 \dot{q}_4 满足如下方程:

$$M_{22}(q)\dot{q}_2 + M_{23}(q)\dot{q}_3 + M_{24}(q)\dot{q}_4 = 0. \quad (7)$$

由式(7)可知,当驱动杆角速度为 $\dot{q}_3 = \dot{q}_4 = 0$ 时,必然有欠驱动杆角速度 $\dot{q}_2 = 0$,从而通过控制驱动杆静止能够连带实现欠驱动杆静止。

令 $A = [M_{22}, M_{23}, M_{24}]$,将式(7)改写为向量积形式

$$A[\dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4]^T = 0. \quad (8)$$

引理2^[10] 欠驱动关节动力学约束完全可积的充分必要条件为:

- 1) 欠驱动关节动力学约束部分可积条件成立;
- 2) A 的零空间分布是对合的。

由引理1可知,方程(5)的部分可积条件成立, A 的零空间 $\Delta = \text{span}\{\theta_1, \theta_2\}$, $\theta_1 = [-M_{23}, M_{22}, 0]^T$, $\theta_2 = [-M_{24}, 0, M_{22}]^T$. 若李括号 $[\theta_1, \theta_2] \in \Delta$,即矩阵 $B = [\theta_1, \theta_2, [\theta_1, \theta_2]]$ 不满秩,则分布 Δ 是对合的,而

$$[\theta_1, \theta_2] = \frac{\partial \theta_2}{\partial q^T} \theta_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial q^T} \theta_2 = M_{22} M_0,$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} a_8 \sin(q_3 + q_4) + 2a_9 \sin q_4 \\ 2a_8 \sin(q_3 + q_4) + 2a_9 \sin q_4 \\ -2a_8 \sin(q_3 + q_4) - 2a_6 \sin q_3 \end{bmatrix},$$

$$\det B = (M_{22})^2 [-M_{22}, M_{23}, M_{24}] M_0.$$

显然,当 $q_3 = q_4 = 0.5\pi$ 时, $\det B \neq 0$,因而 $\det B \neq 0$,即矩阵 B 满秩,故 Δ 不对合,方程(5)不满足完全可积条件.由引理1和引理2可得平面3连杆PAA欠驱动系统为一阶非完整系统。

由此可知,针对式(5)只能通过一次积分得到角速度约束关系(6),不能直接得到PAA系统角度约束关系。

3 系统角度约束

首先,从平面三连杆 PAA 欠驱动系统出发,将系统分为两个阶段的平面 Acrobot 运动过程;然后,基于平面 Acrobot 完全可积的特性^[10],通过积分得到平面 PAA 系统分阶段的角度约束关系;最后,根据角度约束关系和末端点目标位置,利用 PSO 算法计算退化后系统的目标角度。

3.1 分阶段角度约束关系

第 1 阶段控制第 1 杆和第 4 杆的初始角度 q_{10} 和 q_{40} 保持不变,第 3 杆向目标角度运动。在此过程中,第 3 杆和第 4 杆虚拟为一连杆,此虚拟连杆与第 2 杆构成平面 Acrobot,根据平面 Acrobot 完全可积特性,通过对式 (7) 积分可得如下 q_3 与 q_2 之间的角度关系:

$$q_2 = q_{20} + f(q_3) - f(q_{30}). \quad (9)$$

其中

$$f(q_3) = \frac{a_2 - a_4 - a_9 \cos q_{40} - a_{10}}{\sqrt{D_1}} \arctan \frac{A_1}{\sqrt{D_1}} - \frac{1}{2} q_{30},$$

$$D_1 = (a_2 + a_4)^2 + 2a_2a_{10} - 4a_6^2 + 2a_4a_{10} - 4a_8^2 + a_{10}^2 - 2a_9^2(\cos(2q_{40}) + 1) + 4(a_2a_9 + a_4a_9 + a_9a_{10} - 2a_6a_8) \cos q_{40},$$

$$A_1 = (a_2 + a_4 - 2a_6 - 2(a_8 - a_9) \cos q_{40} + a_{10}) \tan(0.5q_3) - 2a_8 \sin q_{40}.$$

当第 3 杆达到目标角度时,即 $q_3 = q_{3d}$,第 2 杆相应的角度为 q_{20}^1 ,系统切换到第 2 阶段,控制第 1 杆和第 3 杆的角度 q_{10} 和 q_{3d} 保持不变,第 4 杆向目标角度运动。在此过程中,第 2 杆和第 3 杆虚拟为一根杆,此虚拟杆与第 4 杆构成平面 Acrobot,通过对式 (7) 积分可得如下 q_4 与 q_2 之间的角度关系:

$$q_2 = q_{20}^1 + g(q_4) - g(q_{40}). \quad (10)$$

其中

$$g(q_4) = \frac{a_2 - a_4 - 2a_6 \cos q_{3d} - a_{10}}{\sqrt{D_2}} \arctan \frac{A_2}{\sqrt{D_2}} - \frac{1}{2} q_{40},$$

$$D_2 = (a_2 + a_4)^2 + 2a_2a_{10} - 4a_9^2 + 2a_4a_{10} - 4a_8^2 + a_{10}^2 + 2a_6^2(\cos(2q_{3d}) + 1) + 4(a_2a_6 + a_4a_6 + a_6a_{10} - 2a_8a_9) \cos q_{3d},$$

$$A_2 = (a_2 + a_4 + 2(a_6 - a_8) \cos q_{3d} - 2a_9 + a_{10}) \tan(0.5q_4) - 2a_8 \sin q_{3d}.$$

根据不同阶段欠驱动杆与驱动杆之间的约束关系,可通过分阶段控制驱动连杆连带实现欠驱动连杆的控制。

3.2 各连杆的目标角度

平面 APAA 系统结构简图如图 2 所示。

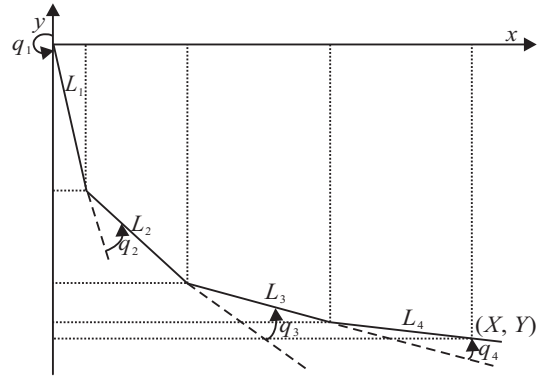


图 2 平面 APAA 系统结构

结合图 2,利用几何方法计算系统末端点坐标与各杆角度之间的约束关系。由图 2 可得系统末端点坐标为

$$(X, Y) = \left(-\sum_{i=1}^4 L_i \sin \beta_i, \sum_{i=1}^4 L_i \cos \beta_i \right). \quad (11)$$

其中: $\beta_1 = q_1$, $\beta_2 = q_1 + q_2$, $\beta_3 = q_1 + q_2 + q_3$, $\beta_4 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ 。

在不同阶段,驱动杆与欠驱动杆之间均存在角度约束关系,且系统末端点坐标与驱动杆角度之间存在约束关系。算法通过设计符合系统特性的迭代规则和评价函数,使得粒子群在迭代过程中不断向解空间内的最优区域移动,最终得到全局最优。

在 PSO 算法中,第 i 个粒子在第 j 维空间的运动方程为

$$v_i^j(t+1) = \omega v_i^j(t) + p_1 r_1 (g_i^j - s_i^j(t)) + p_2 r_2 (b^j - s_i^j(t)),$$

$$s_i^j(t+1) = s_i^j(t) + v_i^j(t+1). \quad (12)$$

其中: ω 为惯性权重, p_1 和 p_2 为权重因子, r_1 和 r_2 为介于 $[0, 1]$ 之间的随机数, $s_i^j(t)$ 和 $v_i^j(t)$ 分别为粒子的位置和速度, g_i^j 为粒子个体最优位置, b^j 为粒子群最优位置。

每次迭代后,通过计算评价函数值进行更新,选取评价函数 $f = |X - X_d| + |Y - Y_d|$,其中 (X_d, Y_d) 为系统末端点目标坐标。该评价函数可使粒子群不断向解空间内的最优区域移动,进而得到驱动杆的目标角度,所得角度可保证系统末端点实际坐标与期望目标坐标的距离误差在系统误差允许范围内。

利用 PSO 算法可获得满足系统控制要求的可行解 q_{3d} 和 q_{4d} ,基于两阶段的角度约束关系 (9) 和 (10),通过计算得到第 2 杆目标角度 q_{2d} 。

4 控制器设计

根据系统驱动杆的目标角度,在不同阶段分别构造 Lyapunov 函数,设计相应控制器,最终实现系统的位置控制目标。

令 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T = [q, \dot{q}]^T$, 则

系统模型的状态空间形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_5, \\ \dot{x}_2 = x_6, \\ \dot{x}_3 = x_7, \\ \dot{x}_4 = x_8, \\ \dot{x}_5 = F_1(x) + g_{11}\tau_1 + g_{13}\tau_3 + g_{14}\tau_4, \\ \dot{x}_6 = F_2(x) + g_{21}\tau_1 + g_{23}\tau_3 + g_{24}\tau_4, \\ \dot{x}_7 = F_3(x) + g_{31}\tau_1 + g_{33}\tau_3 + g_{34}\tau_4, \\ \dot{x}_8 = F_4(x) + g_{41}\tau_1 + g_{43}\tau_3 + g_{44}\tau_4. \end{cases} \quad (13)$$

将上式改写为如下向量形式:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\tau, \quad (14)$$

且有

$$\begin{aligned} f(x) &= [x_5, x_6, x_7, x_8, F_1, F_2, F_3, F_4]^T, \\ g(x) &= [g_1(x), g_2(x)]^T, \\ [F_1, F_2, F_3, F_4]^T &= -M^{-1}(q)H(q, \dot{q}), \\ g_2(x) &= (g_{ij})_{4 \times 4} = M^{-1}(q). \end{aligned}$$

其中: $g_1(x)$ 为4阶零矩阵, g_{ij} 为关于 x 的非线性函数.

4.1 第1阶段控制器设计

构造第1驱动杆、第3驱动杆和第4驱动杆的 Lyapunov 函数, 维持第1杆和第4杆的初始角度不变, 实现第3杆角度的控制目标, 可以构造如下 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \frac{1}{2}((x_1 - q_{10})^2 + x_5^2 + (x_3 - q_{3d})^2 + \\ & x_7^2 + (x_4 - q_{40})^2 + x_8^2). \end{aligned} \quad (15)$$

结合系统状态方程(13), 对 $V_1(x)$ 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) &= x_5(x_1 - q_{10} + F_1 + g_{11}\tau_1 + g_{13}\tau_3 + g_{14}\tau_4) + \\ & x_7(x_3 - q_{3d} + F_3 + g_{31}\tau_1 + g_{33}\tau_3 + g_{34}\tau_4) + \\ & x_8(x_4 - q_{40} + F_4 + g_{41}\tau_1 + g_{43}\tau_3 + g_{44}\tau_4). \end{aligned}$$

为了保证系统姿态的持续收敛, 驱动关节的控制律设计如下:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (-x_1 + q_{10} - F_1 - g_{13}\tau_3 - g_{14}\tau_4 - \gamma_1 x_5)g_{11}^{-1}, \\ \tau_3 &= (-x_3 + q_{3d} - F_3 - g_{31}\tau_1 - g_{34}\tau_4 - \gamma_3 x_7)g_{33}^{-1}, \\ \tau_4 &= (-x_4 + q_{40} - F_4 - g_{41}\tau_1 - g_{43}\tau_3 - \gamma_4 x_8)g_{44}^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

其中: γ_1, γ_3 和 γ_4 为调节收敛速度的正常数参数, 且 g_{ii} 为正定矩阵 $M^{-1}(q)$ 对角元素. $g_{ii} > 0$ 避免了奇异问题的出现, 从而控制律保证了如下收敛条件成立:

$$\dot{V}_1(x) = -\gamma_1 x_5^2 - \gamma_3 x_7^2 - \gamma_4 x_8^2 \leq 0. \quad (17)$$

显然, 由 Lyapunov 稳定性理论可知, 系统平衡状态在 Lyapunov 意义下是稳定的.

下面利用 LaSalle 不变原理证明所设计的控制律可实现系统第1阶段的控制目标. 首先给出 LaSalle 不

变原理.

LaSalle 不变原理: 设 Ω 为紧集, 从 Ω 出发的方程 $\dot{x} = f(x)$ 的解对于 $t > 0$ 均停留在 Ω 内, 若存在函数 $V(x): \Omega \rightarrow R$ 是连续可微的, 在 Ω 中 $\dot{V}(x) \leq 0$, 又设 $E = \{x | \dot{V}(x) = 0, x \in \Omega\}$, $M \subseteq E$ 为 E 中的最大不变集, 则对于 $\forall x(t_0) \in \Omega$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有 $x(t) \rightarrow M$.

首先给出 $\Omega_c = \{x \in R^n | V_1(x) \leq c\}$, $c > 0$, 由于控制系统处于第1阶段, 由式(7)和(9)可得

$$\begin{aligned} \|x_2\| \rightarrow \infty &\Rightarrow \|x_3\| \rightarrow \infty, \\ \|x_6\| \rightarrow \infty &\Rightarrow \|x_7\|, \|x_8\| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

由式(15)可知

$$\|x_i\| \rightarrow \infty \Rightarrow V_1(x) \rightarrow \infty, \quad i = 1, 3, 4, 5, 7, 8.$$

因此, 当 $\|x_i\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V_1(x) \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2, \dots, 8$), 即 $V_1(x)$ 径向无界, $\Omega_c = \{x \in R^n | V_1(x) \leq c\}$ 是紧的正不变集, 取 $\Omega = \Omega_c$, 由式(17)可知, 在 Ω 中, $\dot{V}_1(x) \leq 0$.

下面给出不变集 E 和最大不变集 M .

由式(17)可得

$$\dot{V}_1(x) = 0 \Leftrightarrow x_5 = x_7 = x_8 = 0,$$

从而由式(7)可知, $x_6 = 0$. 取如下集合:

$$\begin{aligned} E &= \{x | \dot{V}_1(x) = 0, x \in \Omega\} = \\ & \{x \in \Omega_c | x_5, x_6, x_7, x_8 = 0\}, \end{aligned}$$

由于集合 E 中的每一点均为系统的平衡点, E 为系统不变集.

又因为当 $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$ 时, x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为常数, 且可知 $H_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), 从而由 $[F_1, F_2, F_3, F_4]^T = -M^{-1}(q)H(q, \dot{q})$ 可得, $F_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). 由系统模型的状态空间形式(13)可知

$$[\dot{x}_5, \dot{x}_6, \dot{x}_7, \dot{x}_8]^T = [F_1, F_2, F_3, F_4]^T + g_2(x)\tau,$$

从而有 $g_2(x)\tau = 0$. 由于 $g_2(x) = -M^{-1}(q)$, 且 $M(q)$ 为正定矩阵, $\tau = [\tau_1, 0, \tau_3, \tau_4]^T = 0$. 将 $\tau = 0$ 代入式(16)可得, $x_1 = q_{10}, x_3 = q_{3d}, x_4 = q_{40}$. 基于第1阶段连杆角度约束关系可得 $x_2 = q_{20}^1$, 从而有

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \Omega_c | x_1 = q_{10}, x_2 = q_{20}^1, x_3 = q_{3d}, \\ & x_4 = q_{40}, x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0\}. \end{aligned}$$

由于 E 为不变集中唯一点, LaSalle 不变原理中 $M = E$. 由 LaSalle 不变原理可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 在第1阶段任何起始于 Ω_c 的轨线均渐近稳定于 M , 即实现第1阶段的控制目标 $[q_{10}, q_{20}^1, q_{3d}, q_{40}, 0, 0, 0, 0]$. 控制策略从第1阶段切换到第2阶段的条件为

$$\begin{aligned} |x_1 - q_{10}| \leq \epsilon_1, |x_3 - q_{3d}| \leq \epsilon_1, |x_4 - q_{40}| \leq \epsilon_1; \\ |x_5 - \dot{q}_{10}| \leq \epsilon_2, |x_7| \leq \epsilon_2, |x_8 - \dot{q}_{40}| \leq \epsilon_2. \end{aligned}$$

其中: ϵ_1 和 ϵ_2 为给定的很小的正数, 这里作为切换的临界值.

在系统第1阶段的控制过程中,第1杆和第4杆角度始终维持初始值,控制第3杆稳定于目标角度,连带控制第2杆稳定于某一角度.当满足上述切换条件时,切换到第2阶段控制策略.

4.2 第2阶段控制器设计

与第1阶段控制器构造类似,构造第1驱动杆、第3驱动杆和第4驱动杆的Lyapunov函数,维持第3杆为目标角度,控制第4杆达到目标角度.构造如下Lyapunov函数:

$$V_2(x) = \frac{1}{2}((x_1 - q_{10})^2 + x_5^2 + (x_3 - q_{3d})^2 + x_7^2 + (x_4 - q_{4d})^2 + x_8^2). \quad (19)$$

对 $V_2(x)$ 求导,并结合系统状态方程式(13),可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x) = & x_5(x_1 - q_{10} + F_1 + g_{11}\tau_1 + g_{13}\tau_3 + g_{14}\tau_4) + \\ & x_7(x_3 - q_{3d} + F_3 + g_{31}\tau_1 + g_{33}\tau_3 + g_{34}\tau_4) + \\ & x_8(x_4 - q_{4d} + F_4 + g_{41}\tau_1 + g_{43}\tau_3 + g_{44}\tau_4). \end{aligned}$$

依据上式,为了保证系统姿态的持续收敛,设计驱动杆的控制律为

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (-x_1 + q_{10} - F_1 - g_{13}\tau_3 - g_{14}\tau_4 - \gamma_1 x_5)g_{11}^{-1}, \\ \tau_3 = & (-x_3 + q_{3d} - F_3 - g_{31}\tau_1 - g_{34}\tau_4 - \gamma_3 x_7)g_{33}^{-1}, \\ \tau_4 = & (-x_4 + q_{4d} - F_4 - g_{41}\tau_1 - g_{43}\tau_3 - \gamma_4 x_8)g_{44}^{-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 γ_1 、 γ_3 和 γ_4 为调节收敛速度的正常数参数. $g_{ii} > 0$ 避免奇异问题的出现.所设计控制律保证如下收敛条件成立:

$$\dot{V}_2(x) = -\gamma_1 x_5^2 - \gamma_3 x_7^2 - \gamma_4 x_8^2 \leq 0. \quad (21)$$

与第1阶段分析过程类似,通过LaSalle不变原理可保证系统渐近稳定于第2阶段的控制目标 $[q_{10}, q_{2d}, q_{3d}, q_{4d}, 0, 0, 0, 0]$.

由以上分析可知,第1阶段通过控制第3杆达到目标角度 q_{3d} ,基于角度约束关系(9),连带控制第2杆达到一个中间角度 q_{20}^1 ;然后,系统切换到第2阶段,通过控制第4杆达到目标角度 q_{4d} ,基于角度约束关系(10),连带控制第2杆达到目标角度 q_{2d} .当驱动杆角度分别稳定在各自目标角度时,即实现系统位置控制目标.

5 仿真结果

在仿真实验中,系统结构参数如表1所示.

表1 平面 APAA 欠驱动机械系统结构参数

连杆 i	连杆1	连杆2	连杆3	连杆4
m_i/kg	1.0	1.0	1.0	1.0
L_i/m	1.0	1.0	1.0	1.0
l_i/m	0.5	0.5	0.5	0.5
$J_i/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.0833	0.0833	0.0833	0.0833

令系统仿真步长为 0.001s ,各杆的初始角度和角速度 $q_{i0} = 0, \dot{q}_{i0} = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 对应的初始末

端点位置坐标为 $(0, 4)$.控制系统末端点目标位置坐标为 $(1.30, 1.57)$, $\epsilon_1 = 0.001, \epsilon_2 = 0.001$. PSO算法迭代方程的参数分别为 $p_1 = 1.9, p_2 = 1.9, \omega = 0.53$,粒子群中的粒子个数为15,搜索是在第3杆角度与第4杆角度所构成的二维空间进行的,系统最大迭代次数为1500.利用PSO算法可得与末端点目标位置坐标对应的第3杆和第4杆目标角度 $q_{3d} = 1.753, q_{4d} = 9.873$,由角度约束关系(9)和(10)可得第2杆目标角度 $q_{2d} = -1.285$.

平面 APAA 欠驱动系统在整个运动过程中状态变量的变化规律如图3~图6所示.

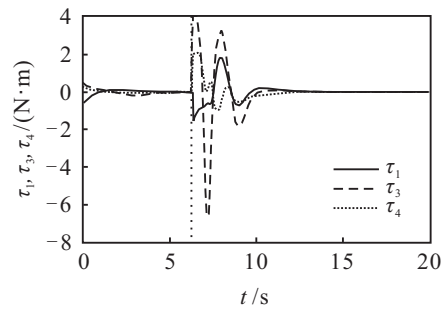


图3 控制力矩变化

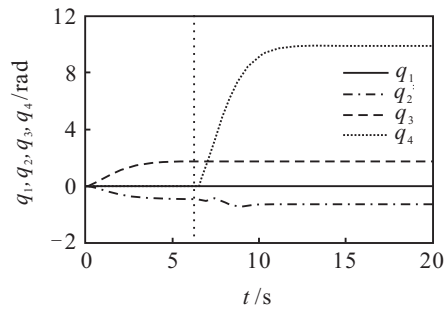


图4 各杆角度变化

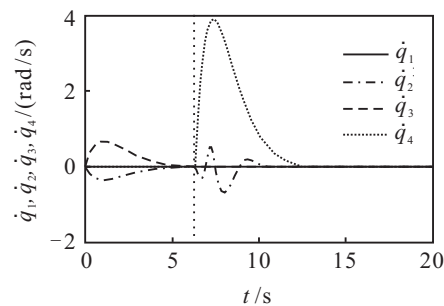


图5 各杆角速度变化

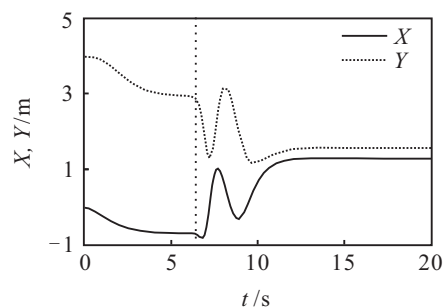


图6 系统末端点坐标变化

图3~图6分别表示从开始运动到最终实现平衡稳定的各杆驱动关节力矩、各杆角度、各杆角速度和末端点坐标随时间的变化曲线,其中纵线(虚线)的横坐标为6.7。在整个运动过程中,第1杆始终保持静止,系统在 $t = 6.7\text{s}$ 时,控制策略实现切换,整个系统在 12.8s 内实现稳定,系统稳定时的末端点坐标为(1.301, 1.565)。

对于不同的系统末端点目标坐标,同样可以利用上述控制策略实现末端点的位置控制。

从文中的分析和仿真结果可知,在欠驱动关节未安装制动器的条件下,本文方法有效地实现了平面APAA欠驱动机械系统的控制。

值得一提的是,本文针对一般方法无法实现平面四连杆APAA系统的稳定控制问题,通过控制第1连杆维持初始状态,从而使APAA系统退化为PAA系统;然后,利用PAA系统的可控性实现APAA系统的控制目标。但是,由于第1连杆维持初始状态,使得整个系统能实现的可达范围受到影响,如何通过移动第1连杆实现系统在几何可达范围内任意目标位置的稳定控制是下一步研究的重点。

6 结 论

本文研究了平面四连杆APAA欠驱动机械系统位置控制问题,提出一种基于模型退化的分阶段控制策略。首先,建立系统数学模型,通过控制第1杆保持静止,将系统退化为平面PAA系统;其次,在控制过程中将系统分为两个阶段,基于第1关节为被动的欠驱动系统的积分特性,分阶段获得各杆之间的状态约束关系;然后,根据系统状态约束关系和末端点目标位置,利用PSO算法计算系统的目标角度;最后,基于Lyapunov函数分阶段设计系统控制律,通过驱动连杆连带实现欠驱动连杆运动,从而实现系统位置控制,并应用LaSelle不变原理保证系统稳定到目标位置。仿真结果验证了控制策略的有效性。

参考文献(References)

- [1] Spong M W. The swing up control problem for the acrobot[J]. IEEE Control Systems, 1995, 15(1): 49-55.
- [2] Lai X Z, Pan C Z, Wu M, et al. Unified control of n-link underactuated manipulator with single passive joint: A reduced order approach[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 56(12): 170-185.
- [3] Xin X, She J H, Yamasaki T, et al. Swing-up control based on virtual composite links for n-link underactuated robot with passive first joint[J]. Automatica, 2009, 45(9): 1986-1994.
- [4] 赖旭芝, 余锦华, 吴敏. 欠驱动机械系统控制[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 18-50.
(Lai X Z, She J H, Wu M. Control for underactuated mechanical systems[M]. Beijing: Science Press, 2013: 18-50.)
- [5] 薛方正, 厚之成, 李祖枢. 一类三关节体操机器人的类等效建模[J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 308-312.
(Xue F Z, Hou Z C, Li Z S. Quasi-equivalent modeling of a three-link acrobot[J]. Control and Decision, 2012, 27(2): 308-312.)
- [6] Luca A D, Mattone R, Oriolo G. Steering a class of redundant mechanisms through end effector generalized forces[J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1998, 14(2): 329-335.
- [7] Luca A D, Mattone R, Oriolo G. Stabilization of an underactuated planar 2R manipulator[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2000, 10(4): 181-198.
- [8] Popescu C, Wang Y, Roth Z. Passivity based control of spring coupled underactuated horizontal double pendulum[C]. Proc of the Florida Conf of Recent Advances in Robotics. Florida, 2003: 1-17.
- [9] Mahindrakar A D, Shodhan R, Banavar R N. Point-to-point control of a 2R planar horizontal underactuated manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(7): 838-844.
- [10] Oriolo G, Nakamura Y. Control of mechanical systems with second-order nonholonomic constraints: Underactuated manipulators[C]. Proc of the 30th IEEE Conf on Decision and Control. Brighton, 1991: 2398-2403.
- [11] Cao S Q, Lai X Z, Wu M. Motion control method of planar acrobot based on trajectory characteristics[C]. Proc of the 31th Chinese Control Conf. Hefei, 2012: 4910-4915.
- [12] Luca A D, Iannitti S, Mattone R, et al. Underactuated manipulators: Control properties and techniques[J]. Machine Intelligence and Robotic Control, 2002, 4(3): 113-126.
- [13] Gilbert J M. Gyrobot: Control of multiple degree of freedom underactuated mechanisms using a gyrating link and cyclic braking[J]. IEEE Trans on Robotics, 2007, 23(4): 822-827.
- [14] Bergerman M, Xu Y. Optimal control of manipulators with any number of passive joints[J]. J of Robotic Systems, 1998, 15(3): 115-129.
- [15] Shi Y H, Russell E. A modified particle swarm optimizer[C]. The 1998 IEEE World Congress on Computational Intelligence. Alaska, 1998: 69-73.

(责任编辑: 闫妍)