文章编号: 1001-0920 (2015) 07-1264-05 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.0578

分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型及其应用

杨保华[a], 赵金帅[b]

(江苏师范大学 a. 商学院，b. 计算机学院，江苏 徐州 221116)

摘 要: 针对 GM(1,1) 幂模型时间响应式由离散估计到连续预测所存在的固有误差, 建立离散灰色 GM(1,1) 幂模型, 并将该模型扩展为分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型; 以最小化平均相对误差为目标、参数之间的关系为约束条件, 构建关于序列累加阶数和幂指数的优化模型, 并运用量子遗传算法确定模型的最优累加阶数和幂指数. 通过对高速公路地基沉降和中国高新技术产业 R&D 发展两个实例的预测结果表明, 分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型具有良好的建模精度.

关键词: 灰色幂模型；分数阶灰色模型；量子遗传算法；预测精度

中图分类号: N945.1 **文献标志码:** A

Fractional order discrete grey GM(1, 1) power model and its application

YANG Bao-hua[a], *ZHAO Jin-shuai*[b]

(a. School of Business，b. Computer College，Jiangsu Normal University，Xuzhou 221116，China. Correspondent: YANG Bao-hua，E-mail：mathyang@126.com)

Abstract: To overcome the problems of model error and initialized value of the existing GM(1,1) power model, the grey discrete power GM(1,1) model is constructed, and grey discrete power GM(1,1) is transformed into fractional order grey discrete power GM(1,1). An optimization model is constructed with the objective of minimum average relative error, the constraints of relationships between parameters in order to optimize the power exponent and the accumulation order, and the optimization values of accumulation order and power exponential are determined by using the quantum genetic algorithm. Finally, two application examples, named settlement volume of subgrade and chinese high technology enterprises, show that the proposed model has higher precision accuracy.

Keywords: grey power model；fractional order grey model；quantum genetic algorithm(QGA)；forecast precision

0 引 言

自邓聚龙教授[1-2]提出灰色系统理论以来, 灰色预测模型已广泛应用于工业、农业、水利、地质、科教、军事等众多领域. 其中 GM(1,1) 模型是最基础的也是应用最广泛的模型, 它主要是针对单变量系统, 通过累加生成弱化序列的随机性寻找系统变化规律, 并以此为基础建立关于时间的预测模型.

灰色幂模型[2]是 GM(1,1) 模型和灰色 Verhulst 模型的拓展, 其幂指数取值的多样性使得该模型可以很好地体现现实系统的非线性特征, 进而可以用来描述一个呈现单峰特征的发展过程. 文献 [3] 利用灰色系统信息覆盖的思想给出了幂指数的白化公式, 并讨论了幂指数的不同取值范围对模型解的性质的影响; 文献 [4] 以白化微分方程为基础, 利用梯形公式白化灰导数, 得到了一种改进灰导数的 GM(1,1) 幂模型; 文献 [5] 将 GM(1,1) 幂模型的应用范围拓展为非等间距序列, 并采用粒子群算法求解模型, 取得了较好的应用效果. 为了提高 GM(1,1) 幂模型的建模精度, 研究人员分别从 GM(1,1) 幂模型的病态型[6]、无偏性[7] 以及优化幂指数和背景值插值系数[8]等角度进行了研究. 此外, 为了提高幂模型对震荡型数据的适应性, 人们又构建了基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测模型[9]、含有系统延迟和时变参数的振荡型 GM(1,1) 幂模型[10], 这些模型的建立提高了 GM(1,1) 幂模型对振荡序列的预测精度, 并且在实践中得到了广泛的应用[11-14]. 尽管研究人员对 GM(1,1) 幂模型进行了多方面的改进和优化, 但是无法克服灰色模型由离散估计到连续预测所存在的固有误差. 谢

收稿日期: 2014-04-19；**修回日期:** 2014-07-05.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(71301064)；教育部人文社科青年基金项目(12YJC630262).

作者简介: 杨保华(1979−), 男, 讲师, 博士, 从事决策方法、应急管理的研究；赵金帅(1982−), 女, 讲师, 博士生, 从事决策理论与方法的研究.

乃明等[15]提出的离散灰色预测模型, 避免了从差分方程到微分方程的跳跃, 对于纯指数序列的拟合具有无偏性, 可以更好地模拟系统的发展趋势, 该模型近年来也得到了广泛的研究和应用[16-17].

经过 20 多年的发展, 人们从不同的方面对灰色 GM(1,1) 预测模型进行了研究, 这些研究成果大大推动了灰色模型的发展. 然而, 随着灰色预测模型应用范围不断扩大, 各种新问题层出不穷, 需要对 GM(1,1) 模型做更广泛的研究. 本文在借鉴离散灰色模型思想的基础上, 构造一种直接离散化的灰色幂模型 — 离散灰色幂模型, 进而克服从离散估计到连续预测所存在的固有误差, 并针对离散灰色 GM(1,1) 幂模型的累加生成方式进行研究, 以提升离散灰色 GM(1,1) 幂模型的预测能力和建模精度, 拓展灰色预测模型的理论研究和应用范围.

1 分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型的构建

1.1 离散灰色 GM(1,1) 幂模型

设非负原始序列为 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$, 对原始序列 $X^{(0)}$ 作一阶累加 (1-AGO) 生成, 得 $X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$. 其中: $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i), k=1,2,\cdots,n$.

定义 1 设 $x^{(0)}(k)$、$x^{(1)}(k)$ 如上所述, 称灰方程

$$x^{(1)}(k+1)=\beta_0+\beta_1k^{\gamma}+\beta_2x^{(1)}(k)$$

为离散灰色幂模型, 其中 γ 称为幂指数.

定理 1 设 $X^{(0)}$ 为非负序列, $X^{(0)}$、$X^{(1)}$ 如定义 1 所述, 假定离散灰色幂模型的幂指数 γ 已知, 若 $\hat{\beta}=(\beta_0,\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}}$ 为参数列, 则有

$$\hat{\beta}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y. \tag{1}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1^{\gamma} & x^{(1)}(1)\\ 1 & 2^{\gamma} & x^{(1)}(2)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & (n-1)^{\gamma} & x^{(1)}(n-1)\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}x^{(1)}(2)\\ x^{(1)}(3)\\ \vdots\\ x^{(1)}(n)\end{bmatrix}.$$

推论 1 当 $\gamma=0$ 时, 离散灰色幂模型变为 $x^{(1)}(k+1)=\beta_1'+\beta_2x^{(1)}(k)$, 即离散灰色幂模型退化为离散灰色 GM(1,1) 模型[2].

推论 2 当 $\gamma=1$ 时, 离散灰色幂模型变为 $x^{(1)}(k+1)=\beta_0+\beta_1k+\beta_2x^{(1)}(k)$, 即离散灰色幂模型退化为近似非齐次离散灰色 GM(1,1) 模型[2].

定理 2 若 $\hat{\beta}=(\beta_0,\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}}$ 如定理 1 所述, 且初值条件为 $\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$, 则离散灰色幂模型的解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\begin{cases}k\beta_0+\beta_1\sum_{i=1}^{k}i^{\gamma}+x^{(0)}(1),\ \beta_2=1;\\ \beta_0\frac{1-\beta_2^k}{1-\beta_2}+\beta_1\sum_{i=1}^{k}i^{\gamma}\beta_2^{k-i}+x^{(0)}(1)\beta_2^k,\ \beta_2\neq1.\end{cases}$$

从定理 2 给出的离散灰色幂模型的时间响应式来看, 离散灰色幂模型保留了幂模型的幂指数多样性的特点, 这使得离散灰色幂模型具有较好的数据预测适应能力; 此外, 由离散灰色幂模型的参数估计方法和推论 1、推论 2 可知, 它避免了传统幂模型的离散估计到连续预测所存在的固有缺陷, 即具有离散灰色模型的 "离散估计到离散预测" 的优点. 因此, 新构建的离散灰色幂模型具备离散模型和灰色幂模型二者的优点, 这使得构建的新模型对数据的适应能力更强. 在后续的实例中也可以看出, 新构建的离散灰色幂模型具有更好的适应能力和较高的预测精度.

1.2 分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型

分数阶蕴含一种 "in between" 思想, 得到越来越多学者的认可[18]. 研究表明, 选择适当的累加阶数, 可以提升灰色预测模型建模精度[19].

定义 2 [19] 对于 q/p 和给定的观察值 $\{x_j: j=1,2,\ldots,m\}$, 称 q/p 阶累积和为

$$\sum_{j=1}^{m}{}^{(\frac{q}{p})}x_j=\sum_{j=1}^{m}C_{m-j+\frac{q}{p}-1}^{m-j}x_j. \tag{2}$$

其中

$$C_{\frac{q}{p}-1}^{0}=1,$$

$$C_{m-j+\frac{q}{p}-1}^{m-j}=\frac{\left(m-j+\dfrac{q}{p}-1\right)\left(m-j+\dfrac{q}{p}-2\right)\cdots\left(\dfrac{q}{p}+1\right)\left(\dfrac{q}{p}\right)}{m-j}.$$

当采用分数阶累加生成矩阵代替原模型中的一次累加生成矩阵进行模型参数的估计时, 所得到的模型称为分数阶预测模型.

定义 3 设 $X^{(0)}$ 为非负原始数据序列, $X^{(r)}$ 为 $X^{(0)}$ 的 r-AGO 序列, 则称满足灰建模三条件[2]的非线性模型

$$x^{(r)}(k+1)=\beta_0+\beta_1k^{\gamma}+\beta_2x^{(r)}(k)$$

为 r 阶离散灰色幂模型.

当 $\gamma=0$ 时, r 阶累加离散灰色幂模型为 r 阶离散灰色 GM(1,1) 模型; 当 $\gamma=1$ 时, r 阶累加离散灰色幂模型为 r 阶近似非齐次离散灰色 GM(1,1) 模型.

定理 3 设 $X^{(0)}$、$X^{(r)}$ 如定义 3 所述, 假定离散灰色幂模型的幂指数 γ 已知, 若 $\hat{\beta}=(\beta_0,\beta_1,\beta_2)^{\mathrm{T}}$ 为参数列, 则有

$$\hat{\beta}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y. \tag{3}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1^{\gamma} & x^{(r)}(1)\\ 1 & 2^{\gamma} & x^{(r)}(2)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & (n-1)^{\gamma} & x^{(r)}(n-1)\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}x^{(r)}(2)\\ x^{(r)}(3)\\ \vdots\\ x^{(r)}(n)\end{bmatrix}.$$

事实上, 如果用 A^r 表示 r 阶累加生成矩阵, 则 $X^{(0)}$ 的 r 次累加生成可以写为 $X^{(r)}=A^rX^{(0)}$, 其中

$$(a_{ij}^r)_{n\times n}=\begin{cases}C_{i-j+r-1}^{r-1}=\dfrac{(i-j+r-1)!}{(i-j)!(r-1)!},\ i\geqslant j;\\ 0,\ i<j.\end{cases}\tag{4}$$

2 模型累加阶数及幂指数的确定

相对误差和平均相对误差常用来衡量模型的精度[2]. 将第 k 时刻的相对误差 (RPE) 记为 $\mathrm{RPE}(k)$, 其公式为

$$\mathrm{RPE}(k)=\left|\frac{\hat{x}^{(0)}(k)-x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\right|\times 100\%.\tag{5}$$

所有时点的相对误差平均值 (ARPE) 记为 $\mathrm{ARPE}(k)$, 其公式为

$$\mathrm{ARPE}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\mathrm{RPE}(k).\tag{6}$$

1) 对于 $k\leqslant n$, 称 $\mathrm{RPE}(k)$ 为 k 点模拟相对误差; 对于 $k>n$, 称 $\mathrm{RPE}(k)$ 为 k 点预测相对误差, 称 ARPE 为平均模拟相对误差.

2) 称 $1-\mathrm{ARPE}$ 为平均模拟相对精度, $1-\mathrm{RPE}(k)$ 为 k 点的模拟精度, $k=1,2,\cdots,n$.

3) 给定 α, 当 $\mathrm{ARPE}<\alpha$ 且 $\mathrm{RPE}(n)<\alpha$ 成立时, 称模型为残差合格模型.

为确定分数阶离散灰色幂模型的最好累加阶数 r 和最优幂指数 γ, 以平均相对误差最小化为目标建立优化模型, 确定模型的最优累加阶数 r 和幂指数 γ 的值, 使模型的平均相对误差绝对值在理论上达到最小. 于是, 建立 ARPE 关于累加阶数 r 和幂指数 γ 的优化模型为

$$\min\mathrm{ARPE},\ \ \mathrm{s.t.}\ r>0.\tag{7}$$

由于上述最优化模型的计算过程中涉及到绝对值符号的运算, 且关于 r 和 γ 是不可导的, 很难利用公式分析出模型的最优解表达式, 对此, 可以采用蚁群算法、粒子群算法等群体智能算法搜索出模型的最优解. 本文采用量子遗传算法求解模型的最优累加阶数和幂指数. 量子遗传算法 (QGA) 主要包含以下几个基本部分.

1) 初始化种群. 随机生成若干个以量子比特率为编码的染色体. QGA 基于量子比特的概念, 采用 GA 中的二进制编码, QGA 用一个或多个量子比特存储和表达一个基因, 再由这些个量子比特表达的基因构成一条染色体. 一条具有量子比特编码的染色体 q 可表示为

$$q_j^t=\left[\begin{array}{ccc|c|cccc}\alpha_{11}^t & \cdots & \alpha_{1n}^t & \cdots & \alpha_{m1}^t & \alpha_{m2}^t & \cdots & \alpha_{mn}^t\\ \beta_{11}^t & \cdots & \beta_{1n}^t & & \beta_{m1}^t & \beta_{m2}^t & \cdots & \beta_{mn}^t\end{array}\right].\tag{8}$$

其中: q_j^t 为第 t 代、第 j 个个体的染色体; n 为染色体中包含的量子比特个数; $|\alpha_i|^2+|\beta_i|^2=1, i=1,2,\cdots,n$; m 为染色体基因个数. 在下述实例计算中, 将种群中各个个体的量子比特编码 (α,β) 都初始化为 $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$, 即一个染色体所表达的全部可能状态是等概率的; 本文中需要确定的参数有累加阶数和幂指数两个, 所以 $m=2$; 每个染色体中包含的量子比特数设定为 $n=20$, 初始种群数量设置为 40.

2) 适应度函数. 对当代群体中的每个染色体进行适应性评估, 通过适应性的好坏评价染色体的好坏, 本文以相对误差平均值 (ARPE) 作为适应度函数来评价染色体的优劣.

3) 迭代停止准则. 通过设置最大遗传代数 T 作为迭代停止的判断依据. 在计算中设最大遗传代数 $T=200$, 当遗传代数 $t>T$ 时, 停止遗传更新.

4) 种群更新. 在 QGA 中, 主要采用量子旋转门 $U(\Delta\theta)$ 来对染色体进行更新进化, $U(\Delta\theta)$ 可表示为

$$U(\Delta\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\Delta\theta) & -\sin(\Delta\theta)\\ \sin(\Delta\theta) & \cos(\Delta\theta)\end{bmatrix},\tag{9}$$

其中 $\Delta\theta$ 为旋转角. 量子比特旋转更新操作可表示为

$$\begin{bmatrix}\hat{\alpha}_i\\ \hat{\beta}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\Delta\theta_i) & -\sin(\Delta\theta_i)\\ \sin(\Delta\theta_i) & \cos(\Delta\theta_i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_i\\ \beta_i\end{bmatrix}.\tag{10}$$

其中: $[\alpha_i,\beta_i]^{\mathrm{T}}$ 为染色体的第 i 个量子比特; $\Delta\theta_i$ 为此时对应的旋转角, 在下述实例的计算中设 $\Delta\theta_i=0.01\pi$.

3 应用实例

3.1 高速公路软土地基沉降预测

高速公路软土地基沉降的预测与控制是软土地区公路建设的一个关键问题. 考虑到高速公路软土地基沉降系统中工程地质条件的复杂性、已知信息的不完整性、影响因素的多样性等非确定性特征, 应用灰色预测模型来描述软土地基沉降系统演化规律已受到学者们的关注[11]. 本节以某省沿海高速软土地基沉降的某测试段的某一个沉降板为研究对象, 选取在一段时间内该观测点的路基沉降监测数据进行建模分析, 利用分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型对高速公路软土地基沉降进行预测, 并与文献 [11] 中的 GM$(1,1,t^2)$ 模型进行对比.

在建立分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型时, 取前 7 个时点的观测数据作为建模样本, 取第 8 个时点的观测数据作为预测样本进行预测检验. 应用量子遗传

算法可获得模型的幂指数和累加阶数分别为 1.765 8 和 0.652 6. 根据观测数据建立的分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型为

$$x^{(1)}(k+1)=4.3757+0.8115k^{1.7658}+0.7736x^{(1)}(k),\quad k=1,2,\cdots. \tag{11}$$

用式 (11) 所示的模型和文献 [11] 中的 GM(1,1,t^2) 模型对该时间序列的拟合和预测结果如表 1 所示.

表 1　两种模型的模拟预测值与实际值的比较

时点	实际值	GM(1,1,t^2)[11] 预测值	GM(1,1,t^2)[11] RPE/%	本文方法 预测值	本文方法 RPE/%
1	3.30	3.31	0.30	—	—
2	5.60	5.40	3.59	5.59	0.18
3	7.90	7.83	0.93	7.68	2.78
4	10.30	10.65	3.41	10.56	2.52
5	14.50	15.12	4.28	14.22	1.93
6	18.10	18.04	0.31	18.59	2.71
7	23.80	23.01	3.34	23.59	0.88
相对误差均值/%		—	2.31	—	1.81
8	28.60	29.47	3.04	29.01	1.82

由表 1 的对比结果可知, 从拟合样本相对误差范围、平均相对误差和单步滚动预测相对误差来看, 分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型较 GM(1,1,t^2) 模型有显著的提升. 同时, 基于上述分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型的建模机理和预测步骤, 可以预测出某省沿海高速某测试段的软土地基下个时点沉降值为 35.1 cm. 因此, 根据原始数据序列的自身特性构建分数阶离散灰色 GM(1,1) 幂模型, 对丰富和发展灰色预测理论和方法具有较好的促进作用.

3.2　中国高新技术产业 R&D 预测

自中国提出建设创新型国家以来, 中国的高新技术产业得到了较快的发展. 到 2012 年, 高新技术产业创造利润 6 186.3 亿元, 出口额 46 701.1 亿元, 发明专利数量达 78 651 件, 极大地增强了国际竞争力. 事实上, 高新技术产业的 R&D 经费、新产品研发经费和 R&D 人员数量指标是国家高新技术产业国际竞争力强弱的主要体现. 因此, 这里以中国 2008～2012 年高新技术产业的 R&D 经费、新产品研发经费和 R&D 人员全时当量数据 (如表 2 所示, 数据来源于中国国家统计局网站) 为例, 分别建立分数阶离散灰色幂模型, 并对 2013、2014 年的 R&D 经费、新产品研发经费和 R&D 人员全时当量的发展指标进行预测, 结果如表 2 所示.

表 2　2008～2012 年中国高新技术产业 R&D 经费、新产品研发经费和 R&D 人员全时当量的建模误差

年份	R&D经费/亿元 实际值	R&D经费/亿元 模拟预测值	R&D经费/亿元 相对误差/%	新产品研发经费/亿元 实际值	新产品研发经费/亿元 模拟预测值	新产品研发经费/亿元 相对误差/%	R&D人员全时当量/万人年 实际值	R&D人员全时当量/万人年 模拟预测值	R&D人员全时当量/万人年 相对误差/%
2008	655.2			798.4			28.5		
2009	774	771.9	0.27	945.1	945.12	2.16×10^{-5}	35.9	35.97	0.19
2010	967.8	972.6	0.49	1006.9	1006.86	3.97×10^{-5}	39.9	39.38	1.3
2011	1 237.8	1 233.6	0.34	1 528	1 528.01	6.54×10^{-6}	42.7	43.57	2.03
2012	1 491.5	1 492.8	0.08	1 827.5	1 827.52	1.09×10^{-5}	52.6	52.06	1.03
相对误差均值/%	—	—	0.295	—	—	1.97×10^{-5}	—	—	1.137
2013	—	1 684.4	—	—	2 048.8	—	—	64.04	—
2014	—	1 717.2	—	—	2 230.7	—	—	79.83	—

注 1　R&D 人员全时当量是指全时人员数加上非全时人员按工作量折算为全时人员数的总和. 例如: 有 2 个全时人员和 3 个非全时人员 (工作时间分别为 20%、30% 和 70%), 则全时当量为 $2+0.2+0.3+0.7=3.2$ 人年. 该指标为国际上比较科技人力投入而制定的可比指标 (来源于中国统计年鉴).

运用量子遗传算法, 可以获得 R&D 经费、新产品研发经费和 R&D 人员全时当量分数阶离散幂模型的最优幂指数和累加阶数. 其中: R&D 经费分数阶离散灰色幂模型的幂指数和累加阶数为 3.501 和 1.375, 新产品研发经费分数阶离散灰色幂模型的幂指数和累加阶数为 1.766 3 和 1.401 8, R&D 人员全时当量分数阶离散灰色幂模型的幂指数和累加阶数为 −1.601 3 和 1.599 2.

从表 2 可以看出, 分数阶离散灰色幂模型对 2008～2012 年中国高新技术产业 R&D 人员全时当量、R&D 经费和新产品研发经费的模拟平均相对误差在 1.97×10^{-5} 和 1.14% 之间, 按照灰色模型的检验标准[2], 该模型通过 $\alpha=0.05$ 的残差检验可用于短期预测. 此外, 分数阶离散灰色幂模型对每个时点的模拟误差几乎不超过 1%, 这表明本文的建模方法具有较高的模拟精度.

4　结　论

本文将离散思想和分数阶累加思想引入灰色幂模型, 构建了分数阶离散灰色幂模型, 实现了从连续形式向离散形式的转变. 该模型相比较于灰色幂模型而言, 消除了传统灰色幂模型由微分方程直接跳到差分方程所产生的误差; 而分数阶累加的引入, 也可以提升模型的建模精度. 同时, 与 GM(1,1,t^a) 模型相比, 不需要事先确定模型的时间指数, 因而具有更广泛的

实用性. 由于灰色模型的应用对象通常不具备大样本的原始数据, 通过智能算法可以在理论上获得模拟序列误差最小化的幂指数和累加阶数, 但通过实验发现, 这种模拟序列的误差最小化下建立的预测模型可能会造成预测值的误差较大, 即模拟误差较小而预测误差较大. 因此, 如何根据实际问题的数据特点, 考虑数据序列多种因素影响的事实, 建立合理的模型以求解该模型的幂指数和累加阶数将是今后的研究重点.

参考文献(**References**)

[1] Deng J L. Introduction of grey system[J]. J of Grey System, 1989, 1(1): 1-24.

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2010: 176-179.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G, et al. Grey system theory and its application[M]. 5th ed. Beijing: Science Press, 2010: 176-179.)

[3] 王正新, 党耀国, 刘思峰, 等. GM(1,1)幂模型求解方法及其解的性质[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(10): 2380-2383.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F, et al. Solution of GM(1,1) power model and its properties[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(10): 2380-2383.)

[4] 王丰效. 改进灰导数的GM(1,1)幕模型[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(2): 148-150.
(Wang F X. GM(1,1) power model of improvement grey derivative[J]. Pure and Applied Mathematics, 2011, 27(2): 148-150.)

[5] 李军亮, 肖新平, 廖锐全. 非等间隔GM(1,1)幂模型及应用[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(3): 490-495.
(Li J L, Xiao X P, Liao R Q. Non-equidistance GM(1,1) power and its application[J]. Systems Engineering-Theory& Practice, 2010, 30(3): 490-495.)

[6] 王正新, 党耀国, 刘思峰. GM(1,l)幂模型的病态性[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(7): 1859-1866.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. The morbidity of GM(1,1) power model[J]. Systems Engineering-Theory& Practice, 2013, 33(7): 1859-1866.)

[7] 王正新, 党耀国, 练郑伟. 无偏GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 中国管理科学, 2011, 19(4): 144-151.
(Wang Z X, Dang Y G, Lian Z W. Unbiased GM(1,1) power model and its application[J]. Chinese J of Management Science, 2011, 19(4): 144-151.)

[8] 王正新, 党耀国, 赵洁珏. 优化的GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(9): 1973-1978.
(Wang Z X, Dang Y G, Zhao J J. Optimized GM(1,1) power model and its application[J]. Systems Engineering-Theory& Practice, 2012, 32(9): 1973-1978.)

[9] 王正新. 基于傅立叶级数的小样本振荡序列灰色预测方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 270-274.
(Wang Z X. Grey forecasting method for small sample oscillating sequences based on Fourier series[J]. Control and Decision, 2014, 29(2): 270-274.)

[10] 王正新. 振荡型GM(1,1)幂模型及其应用[J]. 控制与决策, 2013, 28(10): 1459-1464.
(Wang Z X. Oscillating GM(1,1) power model and its application[J]. Control and Decision, 2013, 28(10): 1459-1464.)

[11] 钱吴永, 党耀国, 刘思峰. 含时间幂次项的灰色GM(1,1,t^a)模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(10): 2247-2252.
(Qian W Y, Dang Y G, Liu S F. Grey GM(1,1,t^a) model with time power and its application[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(10): 2247-2252.)

[12] Wang J Z, Zhu S L, Zhao W G, et al. Optimal parameters estimation and input subset for grey model based on chaotic particle swarm optimization algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(7): 8151-8158.

[13] Zhao Z, Wang J Z, Zhao J, et al. Using a grey model optimized by differential evolution algorithm to forecast the per capita annual net income of rural households in China[J]. Omega, 2012, 40(5): 525-532.

[14] Evans M. An alternative approach to estimating the parameters of a generalised grey verhulst model: An application to steel intensity of use in the UK[J]. Expert Systems with Applications, 2014, 41(4): 1236-1244.

[15] Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization[J]. Applied Mathematical Modeling, 2009, 33(2): 1173-1186.

[16] 邬丽云, 吴正朋, 李梅. 二次时变参数离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(11): 2887-2893.
(Wu L Y, Wu Z P, Li M. Quadratic time-varying parameters discrete grey model[J]. Systems Engineering-Theory& Practice, 2013, 33(11): 2887-2893.)

[17] 杨保华, 方志耕, 张可. 基于级比序列的离散GM(1,1)模型[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(4): 715-718.
(Yang B H, Fang Z G, Zhang K. Discrete GM(1,1) model based on sequence of stepwise ratio[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(4): 715-718.)

[18] 张碧陶, 皮佑国. 永磁同步电机伺服系统模糊分数阶滑模控制[J]. 控制与决策, 2012, 27(12): 1776-1780.
(Zhang B T, Pi Y G. Fractional order fuzzy sliding model control for permanent magnet synchronous motor servo drive[J]. Control and Decision, 2012, 27(12): 1776-1780.)

[19] Wu L F, Liu S F, Yao L G, et al. Grey system model with the fractional order accumulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18(7): 1775-1785.

(责任编辑：李君玲)