第 30 卷 第 6 期
Vol. 30 No. 6

控 制 与 决 策
Control and Decision

2015 年 6 月
Jun. 2015

文章编号: 1001-0920 (2015) 06-1131-04 **DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2014.0269

时滞系统分数阶 PI$^\lambda$ 极点配置控制器设计

雷淑英, 王德进, 范毅军

(天津科技大学 电子信息与自动化学院，天津 300222)

摘 要: 利用参数空间法研究用 PI$^\lambda$ 控制器实现时滞系统的闭环极点配置问题. 复平面上的阻尼角扇形区域和相对稳定度区域 (该两区域构成一个梯形区域) 被映射到控制器参数平面, 相应的控制器参数可以将闭环极点配置在梯形区域内, 从而保证所要求的系统性能. 仿真结果显示, 对于适当选取的分数阶 PI$^\lambda$ 控制器的参数, 采用分数阶控制器可以取得比整数阶控制器更好的控制效果, 从极点配置的角度揭示了分数阶控制器的优越性.

关键词: 极点配置；分数阶 PI$^\lambda$ 控制器；参数空间法；时滞系统

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Pole placement with fractional-order PI$^\lambda$ controllers for time-delay systems

LEI Shu-ying, *WANG De-jin*, *FAN Yi-jun*

(School of Electronic Information and Automation，Tianjin University of Science and Technology，Tianjin 300222，China．Correspondent：WANG De-jin，E-mail：wdejin56@sina.com)

Abstract: The pole placement with fractional-order PI$^\lambda$controllers for time-delay systems is discussed by using the parameter space approach. The damping ratio angular sector region and the relative stability region in complex plane, which form a trapezoid region in the left-half of the complex plane, are mapped into the controller parameters space. Thus, the corresponding controller parameters can place all the closed-loop poles in the specified trapezoid region, and guarantee the performances of the closed-loop systems. Simulation results show that for appropriately selected parameters of the fractional-order PI$^\lambda$controller, better system performances can be achieved with the fractional-order controller than with the integer-order controller, and the superiority of fractional-order controllers is proved from the view point of the pole placement.

Keywords: pole placement；fractional-order PI$^\lambda$ controllers；parameter space approach；time-delay systems

0 引 言

分数阶微积分理论[1]可以追溯到300多年前. 分数阶模型是对许多实际过程的更精确的数学描述. 近年来, 分数阶控制系统的研究已成为一个热点课题, 其中很重要的一个方面就是分数阶控制器的设计[2-5]. 分数阶 PI$^\lambda$D$^\mu$ 控制器[1-2]是分数阶控制器的一个典型代表, 它是常规整数阶 PID 控制器的一种推广. 目前, 关于分数阶 PI$^\lambda$D$^\mu$ 控制器的设计 (参数整定) 已取得了一些结果, 如解析设计法[3]、图解设计法[4]、D- 分解法[5]等. 另一方面, 极点配置对控制系统的稳定性、瞬态响应等性能具有重要的作用. PID 控制器结构简单、应用广泛, 用其实现极点配置具有明显的工程意义. 文献 [6] 利用 PID 类型控制器, 对一阶、二阶过程研究了极点配置问题, 而对高阶过程研究了主导极点配置问题. 文献 [7] 进一步研究主导极点配置问题, 并推广到了时滞系统. 利用分数阶 PI$^\lambda$D$^\mu$ 控制器实现极点配置的研究成果尚不多见. 文献 [8] 利用变形的 PI$^\lambda$ 控制器 (I$^\lambda$-P 控制器) 讨论了一阶被控对象的极点配置问题并应用于永磁同步电机控制, 取得了良好的鲁棒性. 但该方法需要用遗传算法来确定分数阶控制器的分数阶次, 较为复杂, 且仅对一阶无时滞对象进行了研究. 文献 [9] 则针对二阶被控对象, 基于分数阶 PI$^\lambda$D$^\mu$ 极点配置方法来整定常规整数阶 PID 控制器的参数.

本文采用参数空间法讨论利用分数阶 PI$^\lambda$ 控制器实现时滞系统极点配置问题. 将全部闭环极点配置

收稿日期: 2014-03-01；**修回日期:** 2014-10-28.

作者简介: 雷淑英(1964−), 女, 副教授, 硕士, 从事过程控制、分数阶系统等研究；王德进(1956−), 男, 教授, 硕士, 从事鲁棒控制、时滞系统、分数阶系统等研究.

在复平面上规定的梯形区域内, 以达到所要求的衰减特性和阻尼特性. 与文献 [6-7] 的 PID 极点配置方法相比, 本文的参数空间方法的特点在于可以实现分数阶 PID 极点配置控制器的设计.

1 映射函数

考虑图 1 所示的 SISO LTI 单位反馈控制系统. 其中: $G(s)$ 为被控对象, 即

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}\mathrm{e}^{-Ls};\tag{1}$$

$C(s)$ 为分数阶 PI^{λ} 控制器, 即

$$C(s)=k_{\mathrm{p}}+\frac{k_{\mathrm{i}}}{s^{\lambda}},\tag{2}$$

积分阶次 $0<\lambda<2$. 当 $\lambda=1$ 时, 即为常规整数阶 PI 控制器. 系统的闭环拟特征多项式为

$$\varDelta(s)=s^{\lambda}D(s)+N(s)(k_{\mathrm{i}}+k_{\mathrm{p}}s^{\lambda})\mathrm{e}^{-Ls}.\tag{3}$$

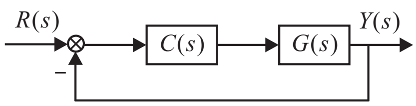

图 1 单位反馈系统

通常, 系统的稳定性和瞬态响应等均与闭环极点 (特别是主导极点) 在复平面上的位置有关. 由经典控制理论可知, 典型的极点配置区域为如图 2 所示的梯形区域 (阴影线区域). 设计控制器 $C(s)$, 将期望的闭环极点配置在该区域内, 既可以保证系统具有至少为 σ 的相对稳定性 (决定响应衰减的快慢), 又可以获得期望的阻尼特性 (决定响应超调的大小).

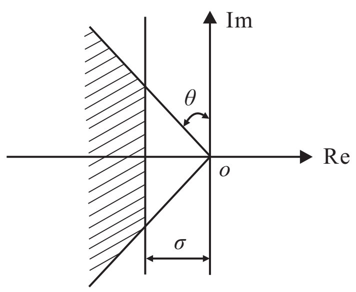

图 2 s- 平面的梯形区域

为了应用参数空间法实现极点配置, 需将该梯形区域映射到参数空间. 首先证明如下定理.

定理 1 对于固定的时滞和控制器参数, 定义如下两个映射多项式:

$$\tilde{\varDelta}(w)=\varDelta(s)\varDelta(\bar{s})|_{s=w\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}},\tag{4}$$

$$\hat{\varDelta}(w)=\varDelta(s)|_{s=w-\sigma}.\tag{5}$$

其中: $\bar{s}=w\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ 为 s 的复共轭, θ 为角形扇区的边界线与虚轴的夹角, σ 为系统的相对稳定度, 如图 2 所示. 如果 $\tilde{\varDelta}(w)$ 和 $\hat{\varDelta}(w)$ 的全部根均位于 w- 平面的左半平面, 则 $\varDelta(s)$ 的全部根将位于 s- 平面的梯形区域内.

证明 首先注意到, 映射 (4) 由两部分组成, 即

$$\varDelta(s)|_{s=w\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}=\varDelta(w\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}),\tag{6}$$

$$\varDelta(\bar{s})|_{s=w\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}=\varDelta(w\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}).\tag{7}$$

映射 (6) 将 s- 平面上第 2 象限中从原点出发的射线 (见图 2) 顺时针旋转 θ, 成为 w- 平面上的正虚轴, 而映射 (7) 将 s- 平面上第 3 象限中从原点出发的射线 (见图 2) 逆时针旋转 θ, 成为 w- 平面上的负虚轴. 从而映射 (4) 将 s- 平面上左半平面中的角形扇区 "展开" 为 w- 平面上的左半平面. 如果 $\tilde{\varDelta}(w)$ 的全部根均位于 w- 平面的左半平面, 则 $\varDelta(s)$ 的全部根将位于 s- 平面的角形扇区内.

在映射 (5) 下, s- 平面上具有相对稳定度 σ 的竖直线 (见图 2) 被向右平移 σ, 成为 w- 平面上的虚轴. 如果 $\hat{\varDelta}(w)$ 的全部根均位于 w- 平面的左半平面, 则 $\varDelta(s)$ 的全部根将位于 s- 平面的竖直线 σ 的左侧.

综上, 如果 $\tilde{\varDelta}(w)$ 和 $\hat{\varDelta}(w)$ 的全部根均位于 w- 平面的左半平面, 则 $\varDelta(s)$ 的全部根将位于 s- 平面的梯形区域内. □

注意到, 夹角 θ 与系统的阻尼角 β 之间的关系为 $\beta=\pi/2-\theta$.

2 参数空间法

在式 (3) 中, 对于固定的 $L>0$ 和 $0<\lambda<2$, $\varDelta(s)$ 依赖于控制器的增益参数 k_{p} 和 k_{i}, 将其记为 $\varDelta(s;k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})$. 沿 s- 平面的虚轴, 令 $\varDelta(\mathrm{j}\omega;k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})=0$, 则可以在参数空间研究系统的稳定性[10]. $(k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})$- 平面上的临界稳定边界线由 3 部分组成: 实根边界 (RRB), 对应于 $\omega=0$; 复根边界 (CRB), 对应于 $\omega\in(0,+\infty)$; 无穷根边界 (IRB), 对应于 $\omega\to+\infty$.

在 CRB 情形下, $(k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})$- 平面上的稳定域可按如下方法确定. 首先将 $\varDelta(\mathrm{j}\omega;k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})$ 分解为

$$\varDelta(\mathrm{j}\omega;k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})=\varDelta_r(\omega;k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})+\mathrm{j}\varDelta_i(\omega;k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}}),$$

其中 $\varDelta_r$ 和 $\varDelta_i$ 分别代表 $\varDelta$ 的实部和虚部, 且令

$$\begin{cases}\varDelta_r(\omega;k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})=0,\\ \varDelta_i(\omega;k_{\mathrm{p}},k_{\mathrm{i}})=0,\end{cases}$$

以 ω 为参变量, 解得 $(k_{\mathrm{p}}(\omega),k_{\mathrm{i}}(\omega))$; 然后, 沿虚轴计算 Jacobi 矩阵

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varDelta_r}{\partial k_{\mathrm{p}}} & \dfrac{\partial\varDelta_r}{\partial k_{\mathrm{i}}}\\ \dfrac{\partial\varDelta_i}{\partial k_{\mathrm{p}}} & \dfrac{\partial\varDelta_i}{\partial k_{\mathrm{i}}}\end{bmatrix}.\tag{8}$$

如果 $\det J<0$, 则随着 ω 从 0 增加到 $+\infty$, 曲线 $(k_{\mathrm{p}}(\omega),k_{\mathrm{i}}(\omega))$ 的右手侧将给出参数平面上的稳定域. 关于参数空间法的详细介绍可参阅文献 [10].

3 极点配置

定理 1 指出, 将闭环极点配置在 s- 平面的梯形区

域内, 等价于将极点配置在 w- 平面的左半平面. 应用第 2 节的参数空间法, 可以分别研究由式 (4) 和 (5) 给定的两个映射在参数平面上的稳定性.

对于由式 (5) 定义的映射 $\Delta(s;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})|_{s=w-\sigma}$, 其中 $w=x+\mathrm{j}y, \sigma>0$, w- 平面上沿虚轴的分解为

$$\Delta(\mathrm{j}y,\sigma;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})=\Delta_r(y,\sigma;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})+\mathrm{j}\Delta_i(y,\sigma;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i}).$$

给定 $\sigma>0$, 利用第 2 节的参数空间方法, 可以得到稳定域内满足要求的参数区域.

在式 (6) 的映射 $\Delta(s;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})|_{s=w\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}$, $w=x+\mathrm{j}y$, $0<\theta<\pi/2$ 下, w- 平面上沿虚轴的分解为

$$\Delta(\mathrm{j}y,\theta;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})=\Delta_r(y,\theta;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})+\mathrm{j}\Delta_i(y,\theta;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i}).$$

给定 $0<\theta<\pi/2$, 利用第 2 节的参数空间方法, 可以得到稳定域内满足要求的参数区域.

注 1　在定理 1 的证明过程中, 映射 (4) 是由 (6) 和 (7) 两个映射组成的. 由于对称性, 在参数空间, 它们给出了相同的参数关系, 即相同的参数边界曲线. 因此, 只需考虑一个映射, 即 $\Delta(s;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})|_{s=\mathrm{j}y\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}$ 且 $y>0$ 或 $\Delta(s;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})|_{s=\mathrm{j}y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}}$ 且 $y<0$.

例 1　给定如下时滞伺服对象[10]:

$$G(s)=\frac{5}{s(s+0.7)(s+7)}\mathrm{e}^{-0.23s}.$$

利用 PI^λ 控制器 (2), 系统的闭环拟特征方程为

$$\Delta(s)=s^{\lambda+1}(s^2+7.7s+4.9)+5(k_\mathrm{i}+k_\mathrm{p}s^\lambda)\mathrm{e}^{-0.23s}=0. \tag{9}$$

首先考虑相对稳定度问题. 对式 (9) 作变换 $s=w-\sigma$, 取 $\sigma=0.1$, 有

$$\Delta(w,\sigma=0.1;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})=(w-0.1)^{\lambda+1}[(w-0.1)^2+7.7(w-0.1)+4.9]+5[k_\mathrm{i}+k_\mathrm{p}(w-0.1)^\lambda]\mathrm{e}^{-0.23(w-0.1)}=0. \tag{10}$$

在式 (10) 中令 $w=0$, 分别取 $\lambda=1.0$ 和 $\lambda=0.5$, 在 $(k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})$- 平面上得到 RRB 为

$$k_\mathrm{i}=\begin{cases}0.1k_\mathrm{p}-0.008\,28\mathrm{e}^{-0.023},\ \lambda=1.0;\\ 0,\ \lambda=0.5.\end{cases}$$

均为直线, 分别如图 3 中的实线 ($\lambda=1.0$) 和虚线 ($\lambda=0.5$) 所示. 令 $w=\mathrm{j}y, y\in(0,+\infty)$, 分解 $\Delta(\mathrm{j}y,\sigma=0.1;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})$ 为实部和虚部, 应用参数空间法, $(k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})$- 平面上的 CRB 分别如图 3 中的实线 ($\lambda=1.0$) 和虚线 ($\lambda=0.5$) 所示 (箭头表示 ω 增加的方向). 此时, 由式 (8) 算得

$$\det J=-25(y^2+0.01)^{\frac{\lambda}{2}}\sin[\lambda(\pi-\tan^{-1}10y)]<0,\quad 0<\lambda<1.$$

因此, 曲线的右手侧为期望的 $\sigma\geqslant 0.1$ 区域.

当 $y\to+\infty$ 时, IRB 不存在[10].

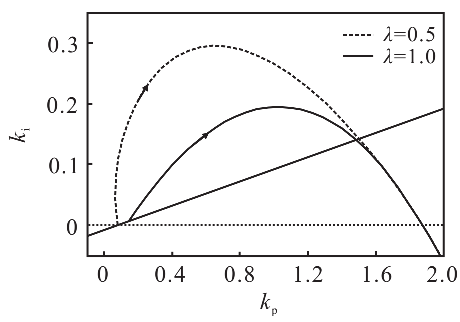

图 3　$\sigma=0.1$, $(k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})$- 平面上的参数区域

然后, 考虑阻尼比问题. 在式 (9) 中令 $s=w\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$, 取 $\theta=\pi/4$, 得到

$$\Delta\Big(w,\theta=\frac{\pi}{4};k_\mathrm{p},k_\mathrm{i}\Big)=w^{\lambda+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{(\lambda+1)\pi}{4}}(w^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}+7.7w\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}+4.9)+(5k_\mathrm{i}+5k_\mathrm{p}w^\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\lambda\pi}{4}})\mathrm{e}^{-0.23w\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}}=0. \tag{11}$$

在式 (11) 中令 w=0, 可得 $(k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})$- 平面上的 RRB 为

$$k_\mathrm{i}=0,\ \lambda=1.0,\ \lambda=0.5.$$

在式 (11) 中令 $w=\mathrm{j}y,\ y\in(0,+\infty)$, 将相应的 $\Delta(\mathrm{j}y,\theta=\pi/4;k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})$ 分解为实部和虚部, 利用参数空间法可得 $(k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})$- 平面上的 CRB, 分别如图 4 中的实线 ($\lambda=1.0$) 和虚线 ($\lambda=0.5$) 所示. 再由式 (8), 有

$$\det J=-25y^2\sin\Big(\frac{\lambda\pi}{4}\Big)<0,\ 0<\lambda<1.$$

所以, 曲线的右手侧为期望的 $\theta\geqslant\pi/4$ 区域. 此时, IRB 也不存在.

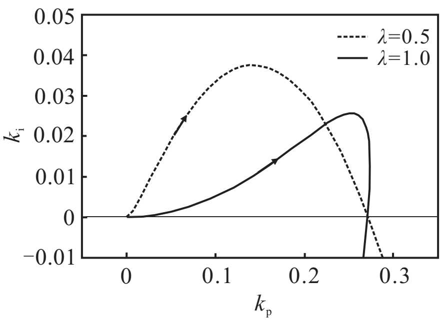

图 4　$\theta=\pi/4$, $(k_\mathrm{p},k_\mathrm{i})$- 平面上的参数区域

由图 3 和图 4 可见, $\lambda=0.5$ 对应的参数区域要大于 $\lambda=1.0$ 对应的参数区域. 实际上, 随着分数阶次 λ 的进一步减小, 参数区域进一步扩大[4]. 这意味着, 对于适当选取的 k_p 和 k_i 值, 采用分数阶 PI^λ 控制器可以取得比整数阶 PI 控制器更好的衰减特性和阻尼特性. 可以做如下验证. 将图 3 和图 4 合在一起得到图 5, 由图 5 得到 $\lambda=1.0$ 对应的两条实线的交点为 $k_\mathrm{p}=0.160\,7$, $k_\mathrm{i}=0.012\,8$. 采用一阶 Pade 近似, 相应的闭环极点分布为

$$\lambda = 1.0: -8.5654, -7.1788, -0.4518,$$
$$-0.0999 \pm \mathrm{j}0.1003,$$

满足 $\sigma = 0.1$ 和 $\theta = \pi/4$ 的要求.

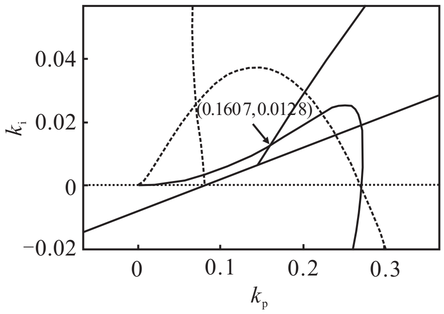

图 5 $(k_\mathrm{p}, k_\mathrm{i})$- 平面上的参数曲线

当取分数阶次时, 第一黎曼面上的闭环极点分布为

$\lambda = 0.5: -7.1809 \pm \mathrm{j}0.0058, -0.2536 \pm \mathrm{j}0.1279$,

即 $\sigma = 0.2536$, 阻尼角 $\beta \leqslant 26.6°$.

$\lambda = 0.2: -7.1895 \pm \mathrm{j}0.0062, -0.2996 \pm \mathrm{j}0.1375$,

即 $\sigma = 0.2996$, 阻尼角 $\beta \leqslant 24.5°$.

3 种积分阶次下的单位阶跃响应如图 6 所示. 可见, 分数阶次越低, 响应衰减得越快, 超调也越小.

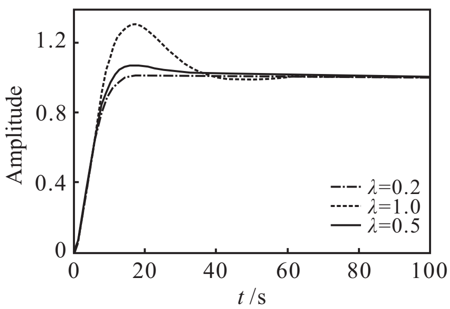

图 6 单位阶跃响应

注 2 当 $1 < \lambda < 2$ 时, 图 3 和图 4 对应的参数区域将减小, 阶跃响应衰减缓慢, 且振荡剧烈.

4 结 论

本文针对时滞被控对象, 基于参数空间方法, 讨论了利用分数阶 PI^λ 控制器实现闭环极点配置的问题. 从具体仿真算例可以看到, 该方法的特点是分数阶控制器参数的选择具有很大的灵活性, 特别是对分数阶次没有任何约束. 该方法可以进一步推广到分数阶 $\mathrm{PI}^\lambda\mathrm{D}^\mu$ 控制器的情形.

参考文献(References)

[1] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999: 243-256.

[2] Podlubny I. Fractional-order systems and $\mathrm{PI}^\lambda\mathrm{D}^\mu$ controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(1): 208-214.

[3] Luo Y, Chen Y Q, Wang C Y, et al. Tuning fractional order proportional integral controllers for fractional order systems[J]. J of Process Control, 2010, 20(7): 823-831.

[4] Wang D, Zhang J. A graphical tuning of PI^λ controllers for fractional-order systems[J]. J of Control Theory and Applications, 2011, 9(4): 599-603.

[5] Hamamci S E. An algorithm for stabilization of fractional-order time-delay systems using fractional-order PID controllers[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(10): 1964-1969.

[6] Astrom K J, Hagglund T. PID controllers: Theory, design, and tuning[C]. Instrument Society of America. North Carolina, 1995: 173-193.

[7] Wang Q G, Zhang Z, Astrom K J, et al. Guaranteed dominant pole placement with PID controllers[J]. J of Process Control, 2009, 19(2): 349-352.

[8] Mansouri R, Djennoune S, Bettayeb M. Fractional I-P pole placement controller design: Application to permanent magnet synchronous motor control[J]. Int J of Modelling, Identification and Control, 2008, 4(2): 176-185.

[9] Saha S, Das S, Das S, et al. A conformal mapping based fractional order approach for sub-optimal tuning of PID controllers with guaranteed dominant pole placement[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(9): 3628-3642.

[10] 王德进. 时滞系统低阶控制器设计: 参数空间法[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 62-69.
(Wang D J. Low-order controller design for time-delay systems: A parameter space approach[M]. Beijing: Science Press, 2013: 62-69.)

(责任编辑：李君玲)