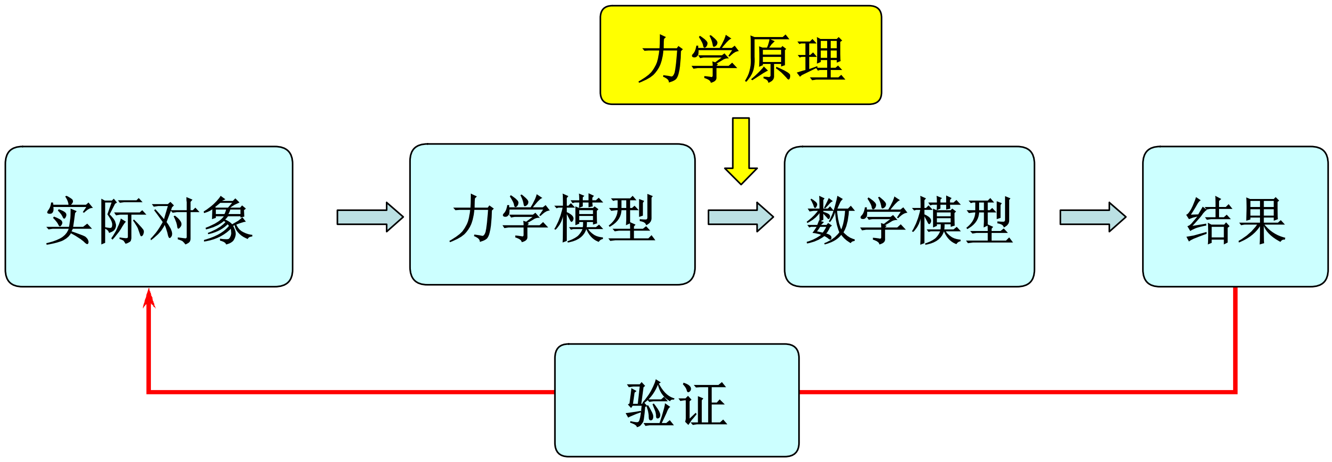
2.1 静力学基本概念



静力学(statics)是研究物体在力系作用下平衡规律的科学。

	力系的性质	物体的受力分析
主要研究	力系的合成	力系的等效替换（或简化）
	力系的平衡	建立各种力系的平衡条件

2.1 静力学基本概念

刚体 **(rigid body)** ——理想化的力学模型

平衡 **(balance)** ——运动状态、平衡力系

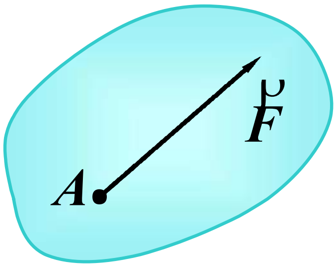
力 **(force)** ——运动效应、变形效应

等效力系 作用在物体上的一个力系与另一个力系对刚体的作用效果相同，则称这两个力系为等效力系。

合力 **(resultant force)** 某力系与一个力等效，则此力称为该力系的合力

2.2　力的性质

一、力的表示



力的三要素：　大小，方向，作用点

$\vec{F}_0$表示沿力矢量方向的单位向量

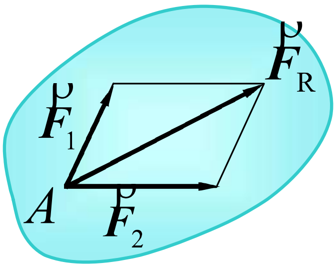
$$\vec{F} = F\vec{F}_0$$

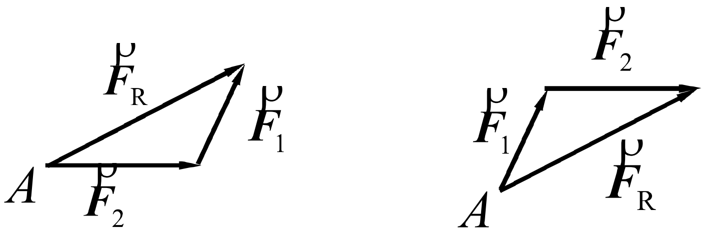
力的单位：牛顿(**N**)、千牛顿(**kN**)

2.2　力的性质

二、力的平行四边形法则

作用在物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力。合力的作用点也在该点，合力的大小和方向，由这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定。





$$\vec{F}_{R}=\vec{F}_{1}+\vec{F}_{2}$$

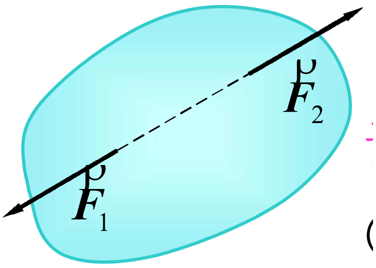
力的三角形法则

最简单力系的合成法则

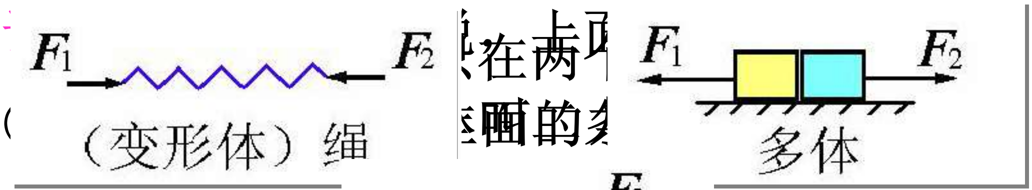
2.2 力的性质

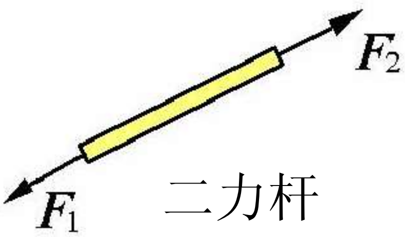
三、二力平衡条件

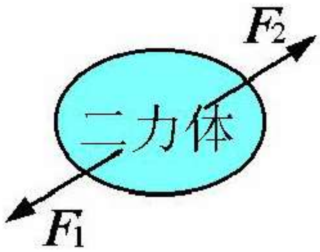
作用在刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要和充分条件是：这两个力的大小相等，方向相反，且作用在同一直线上。



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$







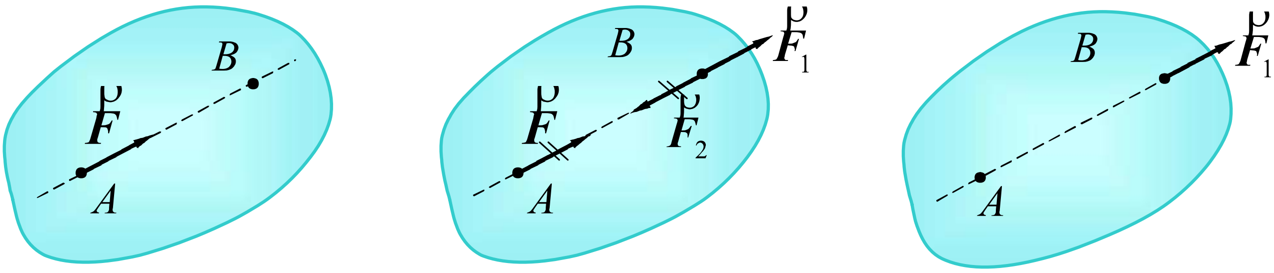
最简单力系的平衡条件

四、加减平衡力系公理

在已知力系上加上或减去任意的平衡力系，并不改变对刚体的作用。

推论1 力的可传性

作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。

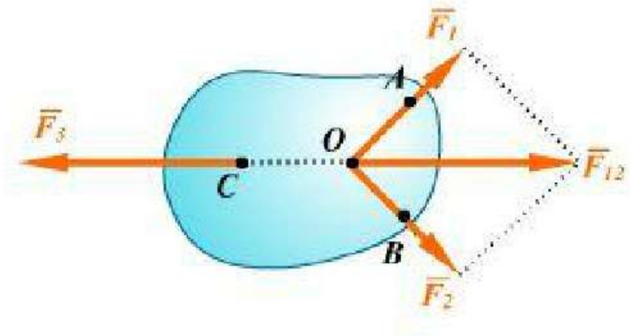


$$\vec{F}_1 = \vec{F} = -\vec{F}_2$$

对刚体而言,力是滑移矢量，力的三要素为大小、方向和作用线。

推论2 三力平衡汇交定理

作用于刚体上三个相互平衡的力，若其中两个力的作用线汇交于一点，则此三力必在同一平面内，且第三个力的作用线通过汇交点。



2.2　力的性质

五、作用力和反作用力定律

两物体间相互作用的力，即作用力和反作用力总是同时存在，且大小相等、方向相反，沿同一直线分别作用在两个物体上。

六、刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。

处于平衡状态的变形体，可用刚体静力学的平衡理论进行分析

2.3 物体的受力分析和受力图

一、约束和约束反力

自由体：位移不受限制的物体。

非自由体：位移受给定条件限制的物体。

约束(**constraint**)对非自由体的某些位移起限制性条件的周围物体。

约束反力 (**constraint force**)约束给被约束物体的作用力。

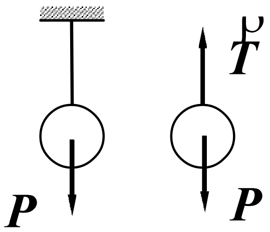
大小——待定

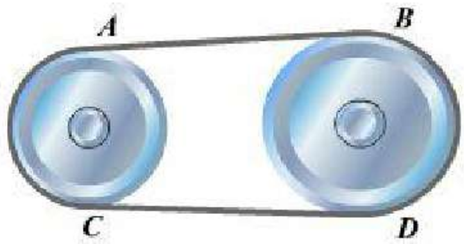
方向——与该约束所阻碍的位移方向相反

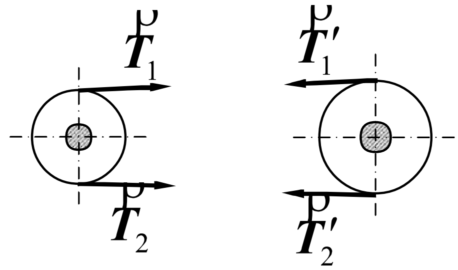
2.3　物体的受力分析和受力图

二、常见约束类型及约束反力

1）柔索约束

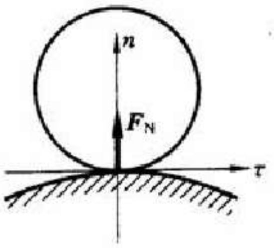


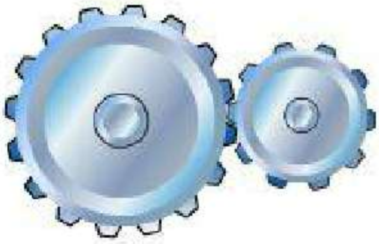


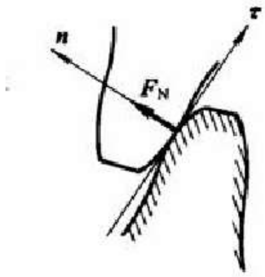


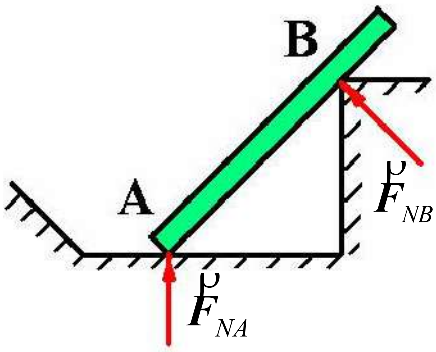
方向：沿柔索背离物体.

2）理想光滑面约束





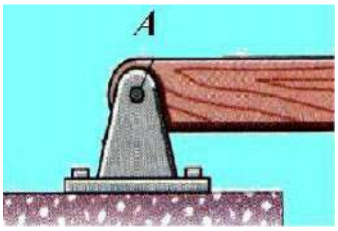


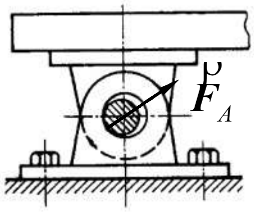


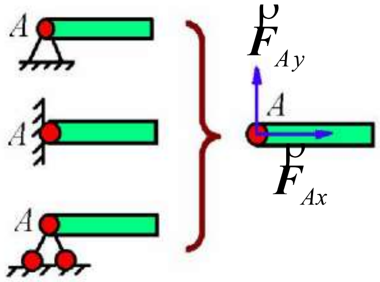
方向：沿接触处的公法线并指向受力物体

3）光滑圆柱铰链约束

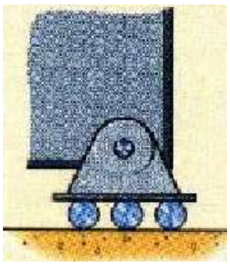
固定铰支座

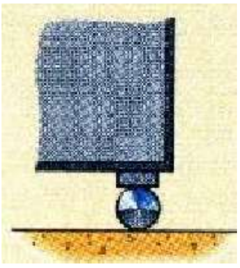


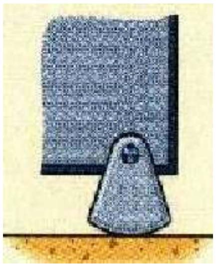


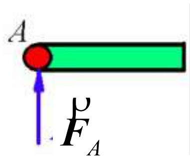


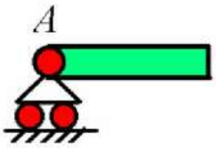
辊轴支座

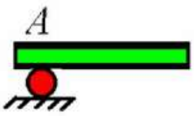


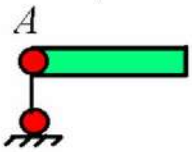




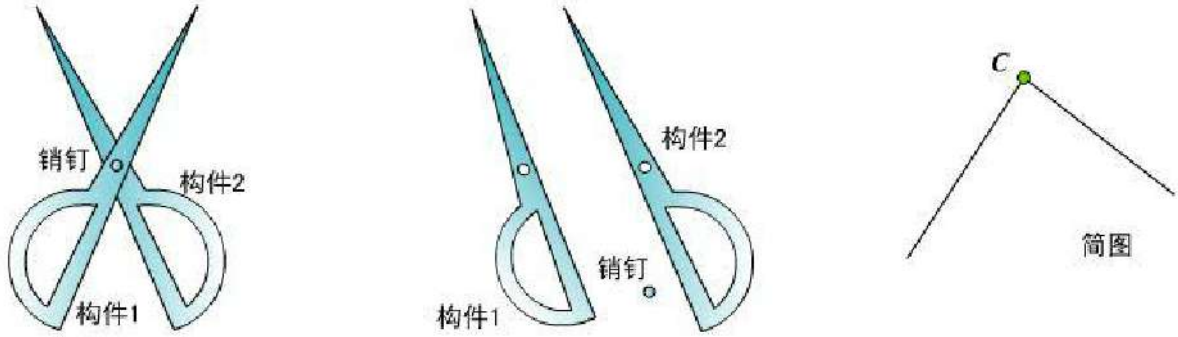






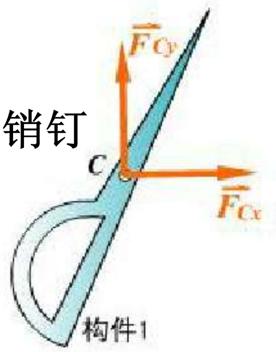


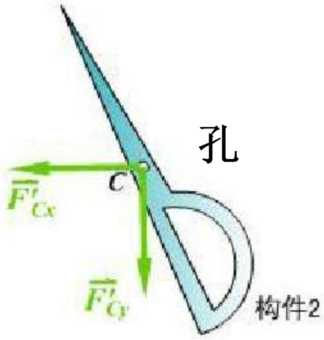
活动铰链



约束特点：由两个各穿孔的构件及圆柱销钉组成.

含销钉



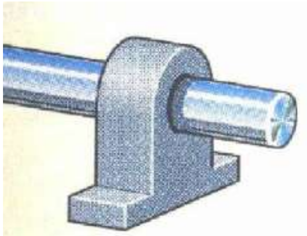


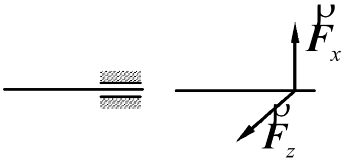
$$\vec{F}_{Cx} = -\vec{F}'_{Cx}$$

$$\vec{F}_{Cy} = -\vec{F}'_{Cy}$$

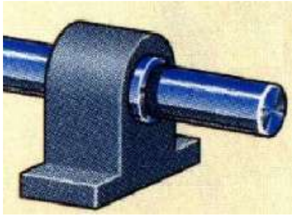
2.3 物体的受力分析和受力图

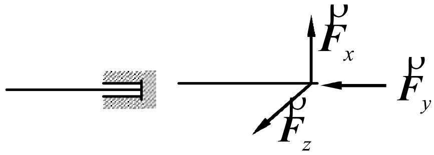
4）向心轴承



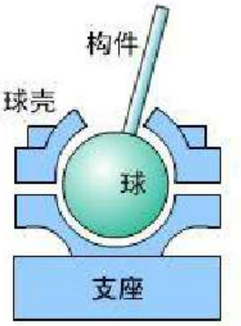


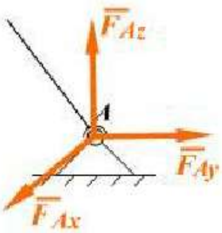
止推轴承





5）球铰链





三、物体的受力分析和受力图

选定需要进行研究的物体，根据已知条件，约束类型并结合基本概念和性质分析受力情况，这个过程称为物体的受力分析。表示研究对象所受的全部力的图形为物体的受力图。

画受力图步骤：

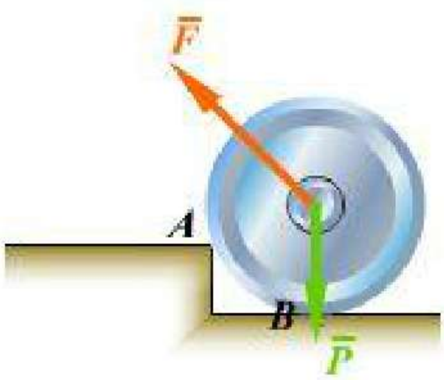
1、取所要研究物体为研究对象（分离体）

2、画出所有主动力

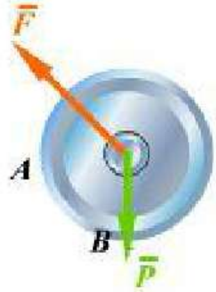
3、按约束性质画出所有约束力

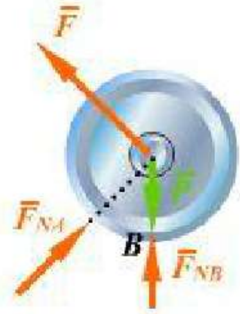
例2-1

碾子重为$\vec{P}$，拉力为$\vec{F}$，A、B处光滑接触，画出碾子的受力图.



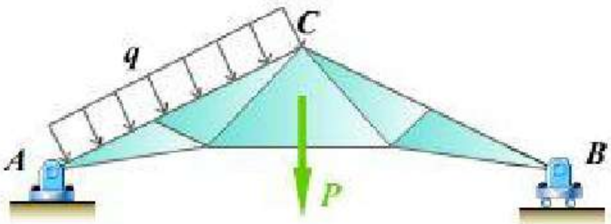
解：①画出简图　　②画出主动力　　③画出约束力



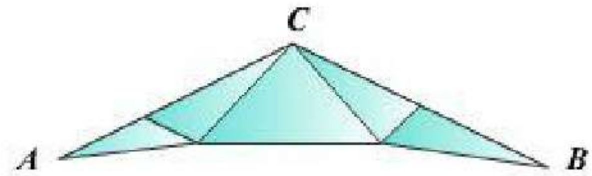


例2-2

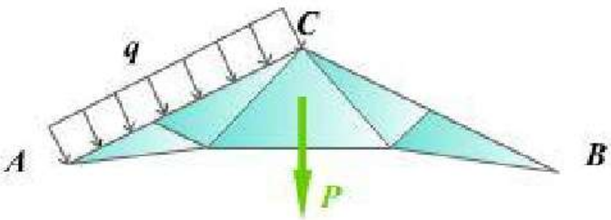
屋架受均布风力$\boldsymbol{q}$（N/m），屋架重为$\vec{P}$，画出屋架的受力图.



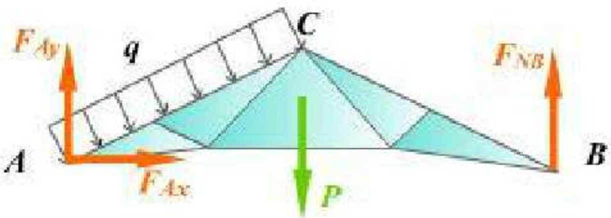
解：取屋架 ①画出简图



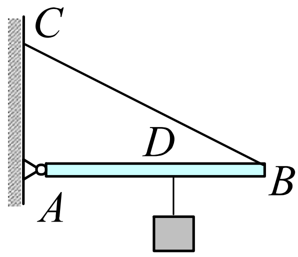
②画出主动力



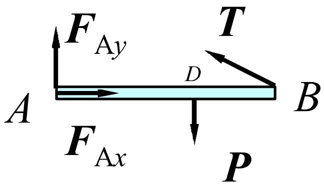
③画出约束力



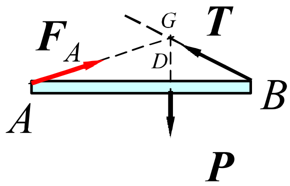
例2-3　梁AB的一端用铰链、另一端用柔索固定在墙上，在D处挂一重物，其重量为P，梁的自重不计，画出梁的受力图。



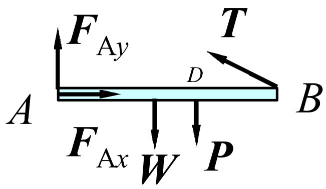
解：取梁为研究对象



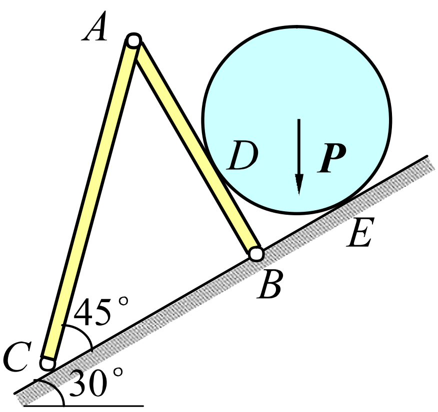
由三力平衡汇交原理



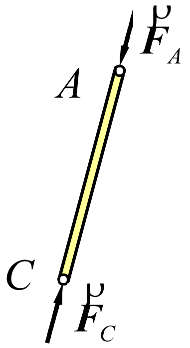
若考虑梁自重

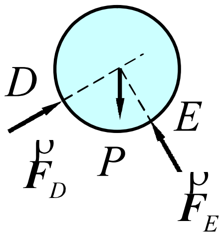


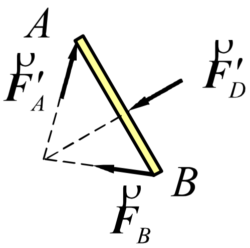
例2-4　水泥管用两撑架支撑置于斜面上，**A**、**B**、**C**三处均为光滑铰链，不计撑架自重，**D**、**E**处的摩擦不计。画出**AC**、**AB**、管子及整体的受力图。

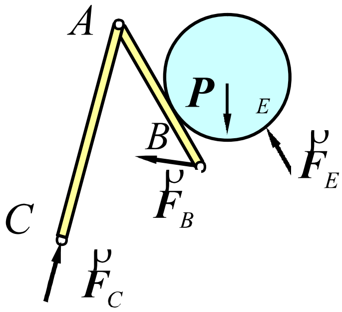


解：







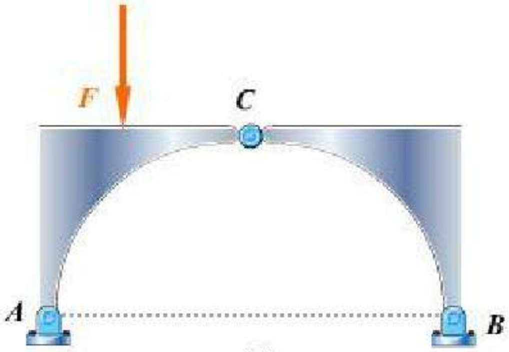


$$\vec{F}_A = -\vec{F}'_A \qquad \vec{F}_D = -\vec{F}'_D$$

成对地作用在系统内,称为系统的内约束力,在受力图上不必画出

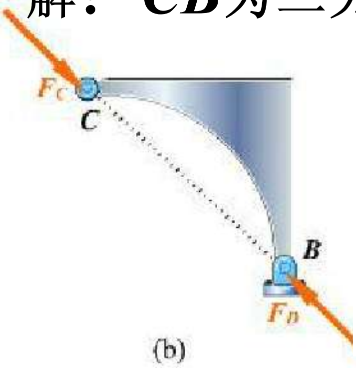
例2-5

不计三铰拱桥的自重与摩擦，画出左、右拱*AB*,*CB*的受力图与系统整体受力图.

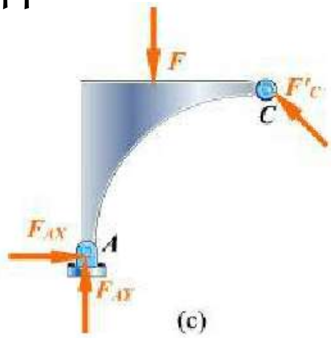


(a)

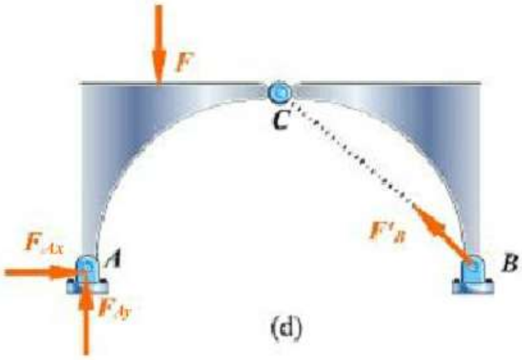
解：***CB***为二力构件



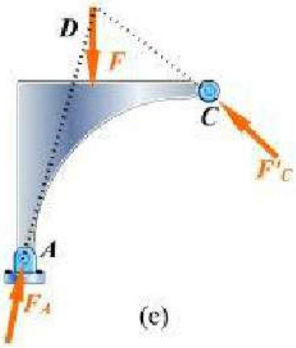
(b)



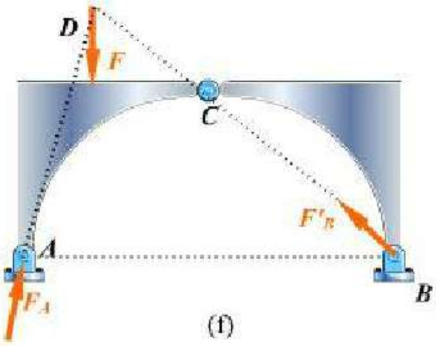
(c)



(d)

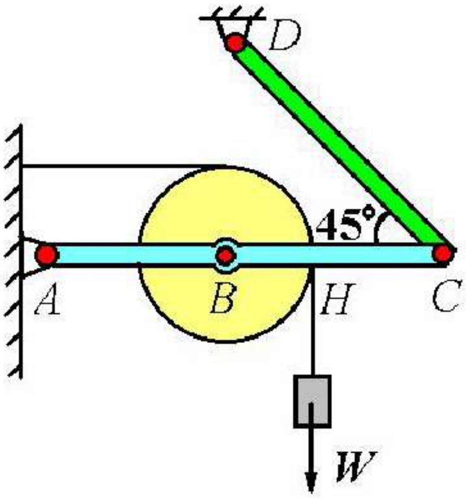


(e)

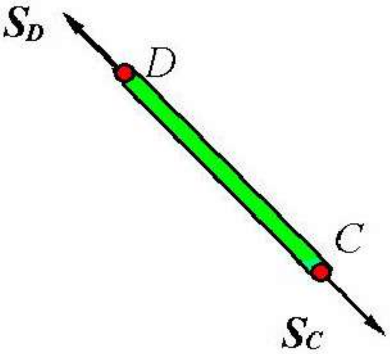


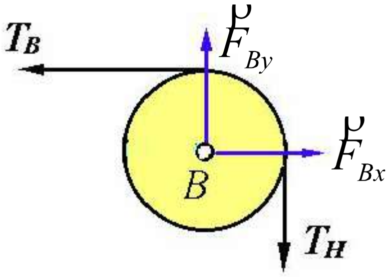
(f)

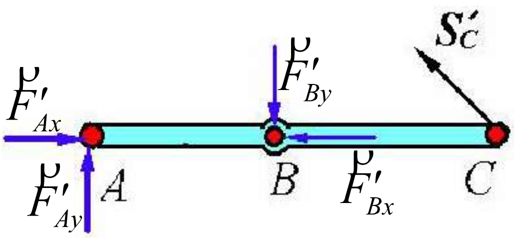
例2-6 画出各构件及整体的受力图，未画重力的物体的重量不计。

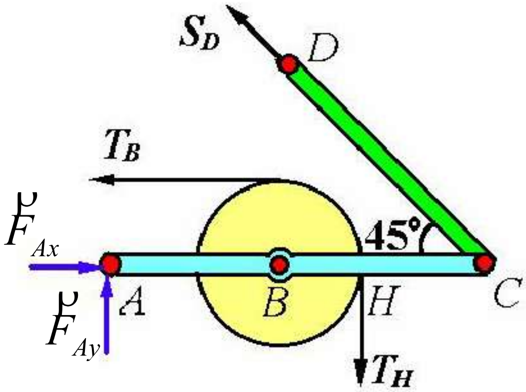


解：









画受力图应注意

1、确定研究对象，明确施与受的关系

2、根据约束的性质画约束反力，不能想当然

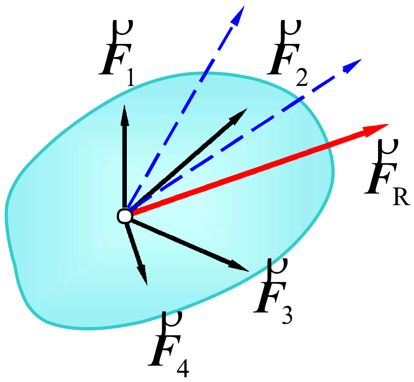
3、注意内约束与外力、作用力与反作用力之间的关系。

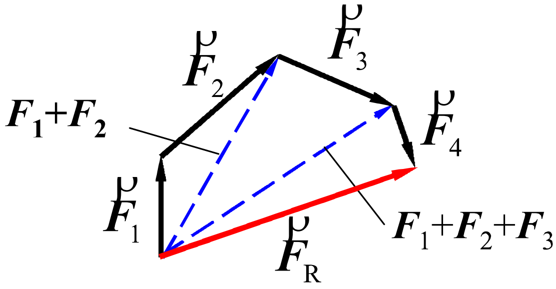
4 、正确判断二力构件，三力汇交原理的运用。

5、尺规作图

2.4　共点力的合成

一、共点力合成的几何法





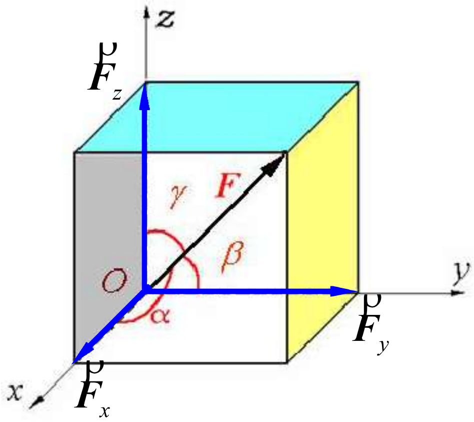
力多边形法则

力多边形

$$\vec{F}_R=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

共点力（汇交力系）可简化为一合力，合力为各分力的矢量和，作用线通过各力的交点。

二、力的投影与解析表达式



投影：

$$X = F\cos\alpha$$
$$Y = F\cos\beta$$
$$Z = F\cos\gamma$$

分力：

$$\vec{F}_x = X\vec{i}$$
$$\vec{F}_y = Y\vec{j}$$
$$\vec{F}_z = Z\vec{k}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

若已知力在直角坐标系$Oxyz$的投影，则力 $\boldsymbol{F}$ 的大小：

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

方向余弦为：

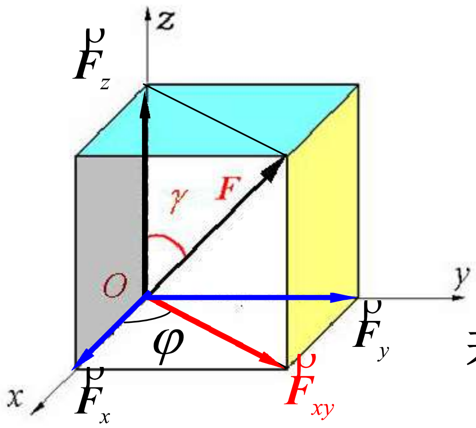
$$\cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{i}) = \frac{X}{F} \quad \cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{j}) = \frac{Y}{F} \quad \cos(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{k}) = \frac{Z}{F}$$

2.4 共点力的合成

间接投影法（二次投影法）

若已知力与某轴的夹角，

在力与轴组成的平面内将力沿轴及与轴垂直的方向分解，



分力的大小为：

$$F_z = F\cos\gamma$$

$$F_{xy} = F\sin\gamma$$

若$\vec{F}_{xy}$在xy内的方向可以确定，则投影为：

$$X = F\sin\gamma\cos\varphi$$

$$Y = F\sin\gamma\sin\varphi$$

$$Z = F\cos\varphi$$

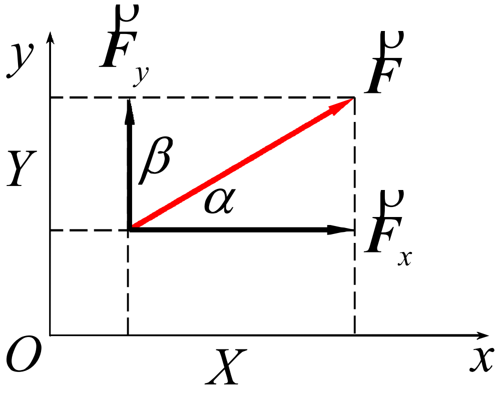
注意：

力在轴上投影是代数值。

力在平面上的投影是矢量。

2.4 共点力的合成

对平面力系



力的投影为

$$X = F\cos\alpha$$

$$Y = F\cos\beta$$

力的解析表达式为

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$$

力 ***F***的大小和方向余弦可表示为

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\cos(\vec{F}, \boldsymbol{i}) = \frac{X}{F} \qquad \cos(\vec{F}, \boldsymbol{j}) = \frac{Y}{F}$$

2.4　共点力的合成

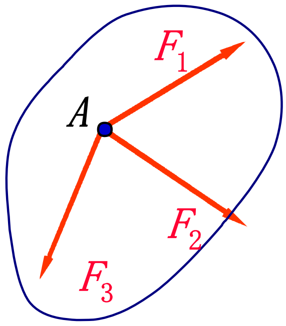
三、共点力合成的解析法

合矢量投影定理：

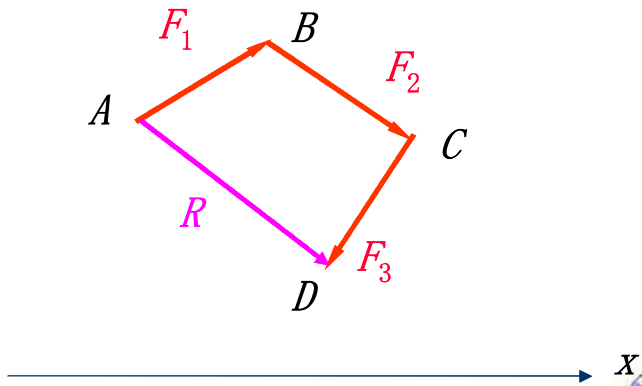
合力在任一轴上的投影，等于它的各分力在同一轴上的投影的代数和。

证明：以三个力组成的共点力系为例。

设有三个共点力$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$如图。



(a)

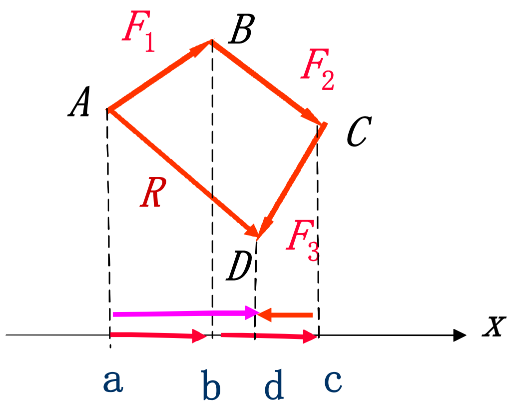


(b)

2.4 共点力的合成

各力在x轴上投影：

$$F_{1x}=ab \quad F_{2x}=bc \quad F_{3x}=-dc$$



(b)

合力 $\boldsymbol{R}$ 在x轴上投影：

$$R_x=ad=ab+bc-dc$$

$$R_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}$$

推广到任意多个力$\boldsymbol{F_1}$、$\boldsymbol{F_2}$、Λ $\boldsymbol{F_n}$组成的共点力系，可得：

$$R_x=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}+\Lambda+F_{nx}=\sum F_x$$

2.4 共点力的合成

共点力合成的解析法

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

由合矢量投影定理，有

$$\boldsymbol{F}_{Rx} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$$

$$\boldsymbol{F}_{Ry} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Y}_i$$

$$\boldsymbol{F}_{Rz} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i$$

$\boldsymbol{F}_{Rx}$ 、 $\boldsymbol{F}_{Ry}$、 $\boldsymbol{F}_{Rz}$、为合力$\boldsymbol{F}_R$在$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 、$\boldsymbol{z}$轴上的投影

则合力为 $$\vec{F}_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}x}\boldsymbol{i} + F_{\mathrm{R}y}\boldsymbol{j} + F_{\mathrm{R}z}\boldsymbol{k} = \sum_{i=1}^{n} X_i\boldsymbol{i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i\boldsymbol{j} + \sum_{i=1}^{n} Z_i\boldsymbol{k}$$

2.4 共点力的合成

对平面汇交力系,合力可表示为

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\boldsymbol{i} + F_{Ry}\boldsymbol{j} = \sum_{i=1}^{n} X_i\boldsymbol{i} + \sum_{i=1}^{n} Y_i\boldsymbol{j}$$

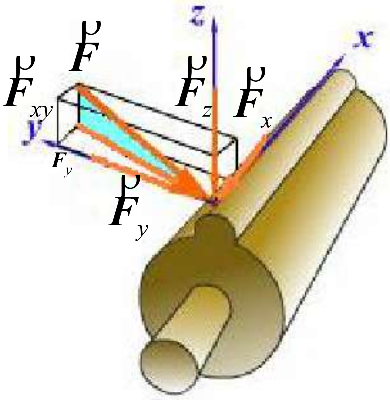
合力的大小和方向余弦为

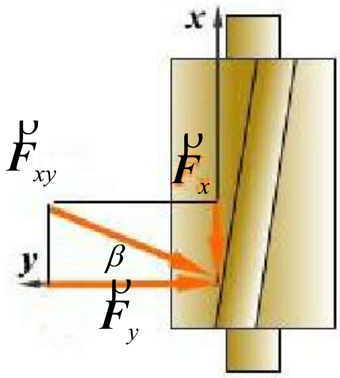
$$F_R = \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2}$$

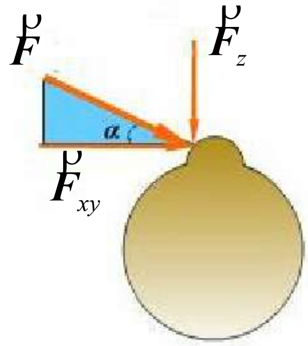
$$\cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{i}) = \frac{\sum X}{F_R} \qquad \cos(\vec{F}_{\mathrm{R}}, \boldsymbol{j}) = \frac{\sum Y}{F_R}$$

汇交力系的合力等于各分力的矢量和，合力的作用线通过汇交点.

例 **2-7** 圆柱斜齿轮，其上受啮合力$\boldsymbol{F}$作用。已知斜齿轮的齿倾角（螺旋角）β和压力角$\boldsymbol{\alpha}$，试求力$\boldsymbol{F}$在各轴上的投影。







解：先将力$\boldsymbol{F}$沿z轴和Oxy平面分解，得 $F_Z = F\sin\alpha \quad F_{xy} = F\cos\alpha$

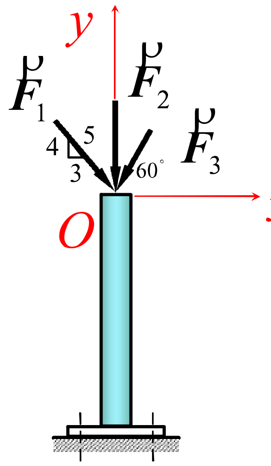
再将力$\boldsymbol{F_{xy}}$向x、y轴的投影，有

$$X = -F_{xy}\sin\beta = -F\cos\alpha\sin\beta$$

$$Y = -F_{xy}\cos\beta = -F\cos\alpha\cos\beta$$

$$Z = -F_z = -F\sin\alpha$$

例2-8 梁一端作用有三个力$\boldsymbol{F_1}$、$\boldsymbol{F_2}$ 、$\boldsymbol{F_3}$，各力大小分别为F_1=150N、F_2=275N 、F_3=75N，求合力的大小及方向。



解：建立直角坐标系Oxy

$$F_{Rx}=\sum X=\frac{3}{5}F_1-75\cos 60^\circ=52.5\text{N}$$

$$F_{Ry}=\sum Y=-\frac{4}{5}F_1-F_2-75\sin 60^\circ=-540\text{N}$$

$$F_R=\sqrt{\left(\sum X\right)^2+\left(\sum Y\right)^2}=542.5\text{N}$$

$$\alpha=\arccos\frac{F_{Rx}}{F_R}=84.4^\circ$$（第四象限）

2.4 力对点的矩和力对轴的矩

一、力对点的矩

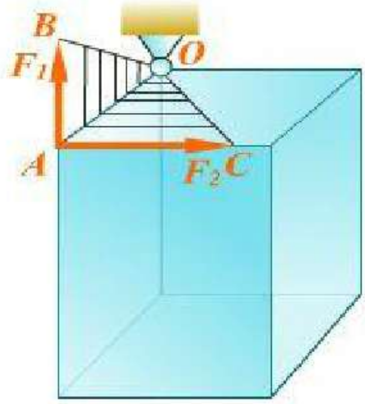
力对点的矩是力使物体绕某点转动效应的度量。

(1) 力矩中心–矩心

(2) 力与矩心构成的平面

(3) 大小–力$\boldsymbol{F}$与力臂的乘积

常用单位N·m或kN·m

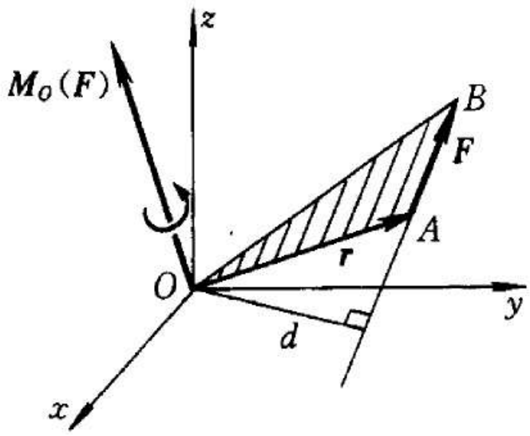


Def 力对点的矩等于矩心到力作用点的矢径与力的矢积。

$$\vec{M}_O(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}$$

方向由右手螺旋法则确定

2.4 力对点的矩和力对轴的矩



若以$\boldsymbol{r}$表示力作用点$\boldsymbol{A}$的矢径，

$$\vec{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\vec{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$$

则力对点的矩可表示为

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= (Zy - Yz)\boldsymbol{i} + (Xz - Zx)\boldsymbol{j} + (Yx - Xy)\boldsymbol{k}$$

力对点的矩矢量大小和方向都与矩心的位置有关—定位矢量

对平面力系，可用标量表示　　$M_O = \pm Fd$　　+　　-

2.4 力对点的矩和力对轴的矩

二、共点力的合力矩定理

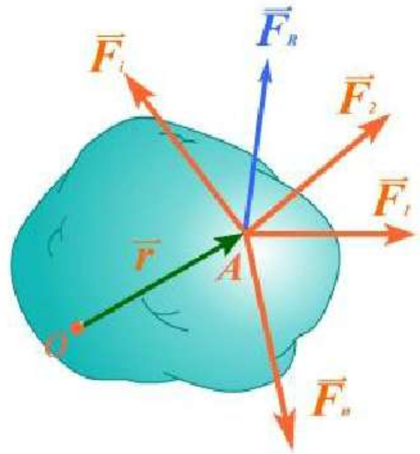
若力系存在合力，则合力对某一点的力矩等于各分力对同一点力矩的矢量和。可表示为

$$\vec{M}_O(\vec{F}_{\mathrm{R}}) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{\mathrm{i}})$$

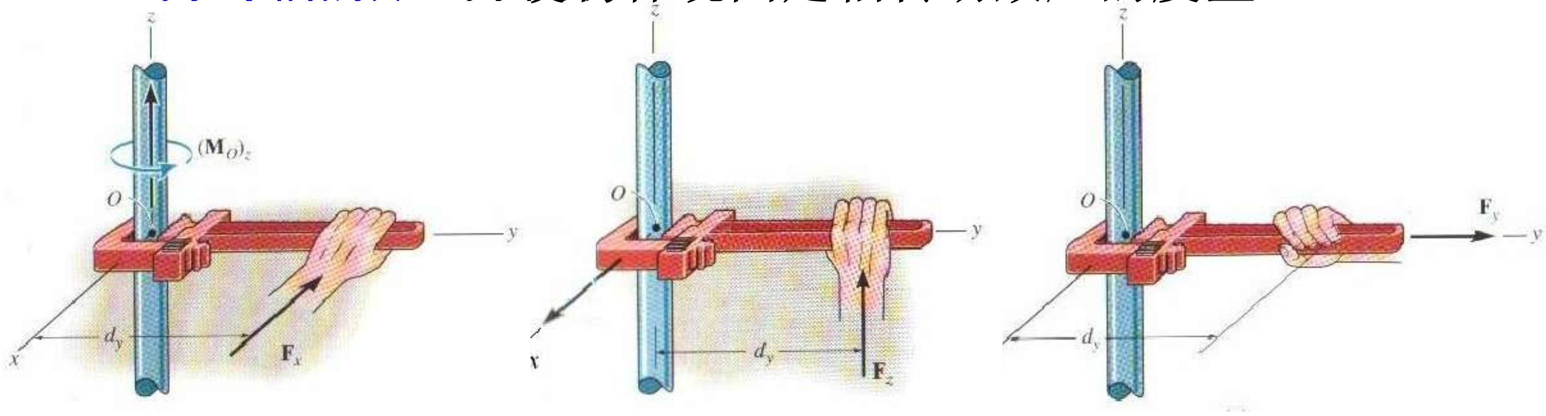
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i)$$



三、力对轴的矩　力使物体绕固定轴转动效应的度量



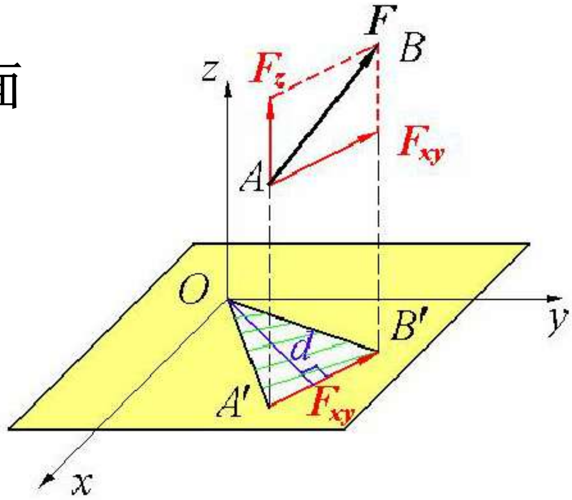
（1）力使管子（或扳手）绕z轴转动，

（2）力与z轴相交或与轴平行无绕轴的转动效果，

（3）转动效应与力的大小及d_y有关，取决于力在Oxy平面内对O点的矩。

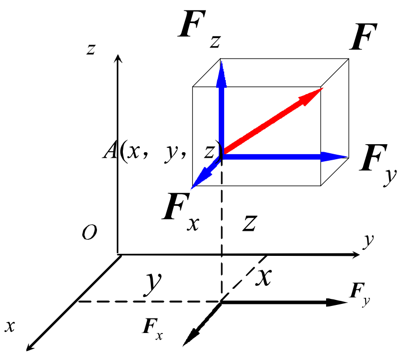
2.4　力对点的矩和力对轴的矩

Def 力对轴的矩为力在垂直于轴平面内的分力对轴与该平面交点的力矩。



$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy}\cdot d$$

也可先将力分解，利用合力矩定理求力对轴的矩



$$M_z(\vec{\boldsymbol{F}}) = M_O(\vec{\boldsymbol{F}}_x) + M_O(\vec{F}_y) + \cancel{M_O(\vec{\boldsymbol{F}}_z)}$$

$$= xY - yX$$

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yZ - zY$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zX - xZ$$

四、力对点的矩和力对轴的矩的关系

$$\vec{M}_o(\vec{F})=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=(Zy-Yz)\boldsymbol{i}+(Xz-Zx)\boldsymbol{j}+(Yx-Xy)\boldsymbol{k}$$

$$M_x(\vec{F})=yZ-zY$$

$$M_y(\vec{F})=zX-xZ$$

$$M_z(\vec{F})=xY-yX$$

力对点的矩在过这点的轴上的投影等于力对这轴的矩，即

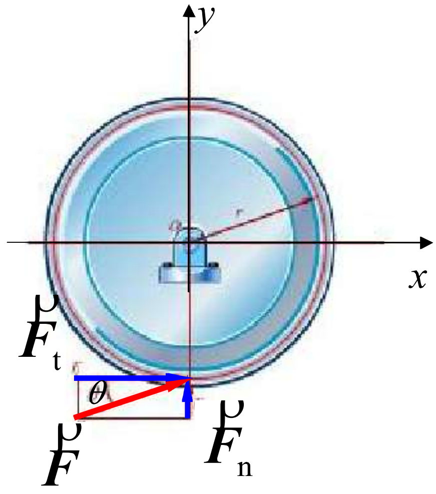
$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x=M_x(\boldsymbol{F})$$

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y=M_y(\boldsymbol{F})$$

$$[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z=M_z(\boldsymbol{F})$$

例2-9　如图所示圆柱形直齿轮，受啮合力$\boldsymbol{F}$的作用，压力角为 θ，齿轮节圆半径为$\boldsymbol{r}$，计算力$\boldsymbol{F}$对$\boldsymbol{O}$点的力矩。

解:直接按定义



$$M_O(\vec{F}) = Fd = Fr\cos\theta$$

按合力矩定理

$$M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_r) + M_O(\vec{F}_t) = F_t r = rF\cos\theta$$

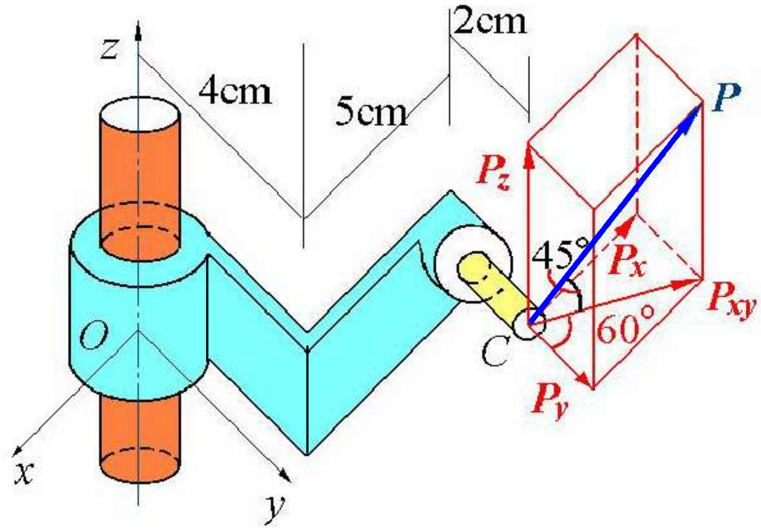
由解析表达式

$$x = 0\,,\ y = -r\,,\quad X = F\cos\theta\,,\quad Y = F\sin\theta$$

$$M_O(\vec{F}) = M_z(\vec{F}) = xY - yX = rF\cos\theta$$

例2-10 已知:P=2000N, C点在Oxy平面内。求：力P对三个坐标轴的矩

解：1、计算分力大小



$$P_z = P \cdot \sin 45°$$

$$P_{xy} = P \cdot \cos 45°$$

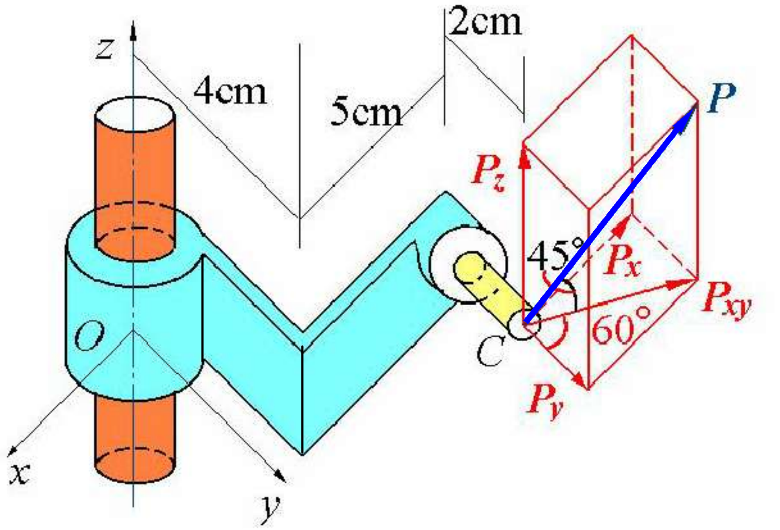
$$P_x = -P\cos 45° \cdot \sin 60°$$

$$P_y = P \cdot \cos 45° \cdot \cos 60°$$

2、合力矩定理计算力对轴的矩

$$M_x(\vec{P}) = M_x(\vec{P}_y) + M_x(\vec{P}_z)$$
$$= 0 + 6P_z$$
$$= 6P\sin 45^\circ = 84.8(\mathrm{N \cdot m})$$

$$M_y(\vec{P}) = M_y(\vec{P}_x) + M_y(\vec{P}_z)$$
$$= 0 + 5P_z$$
$$= 5P\sin 45^\circ = 70.7(\mathrm{N \cdot m})$$

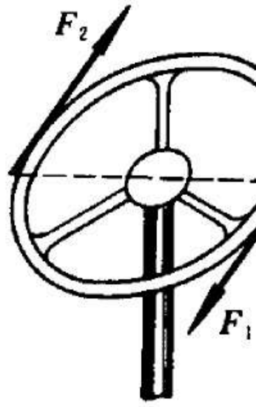


$$M_z(\vec{P}) = M_z(\vec{P}_x) + M_z(\vec{P}_y)$$
$$= 6 \times P_x + (-5 \times P_y)$$
$$= 6P\cos 45^\circ \sin 60^\circ - 5P\cos 45^\circ \cos 60^\circ$$
$$= 38.2(\mathrm{N \cdot m})$$

3、也可以将C点坐标及力的投影代入公式计算

2.6 力偶

一、力偶与力偶矩



1、力偶—由两个等值、反向、不共线的（平行）力组成的力系

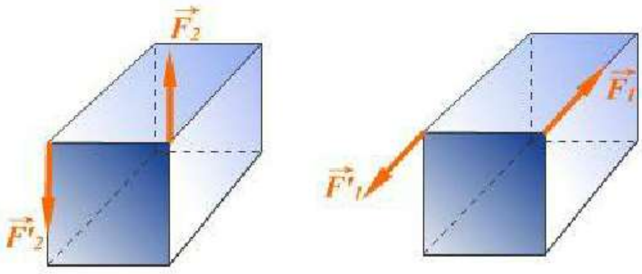
力偶是静力学的基本要素之一

2、力偶矩—力偶对物体的转动效应

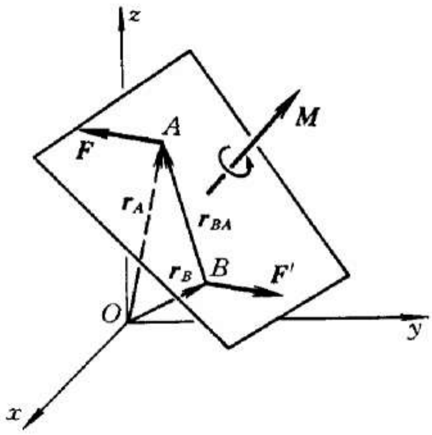
（1） 大小：力与力偶臂；

（2） 方向：转动方向；

（3） 作用面：力偶作用面。



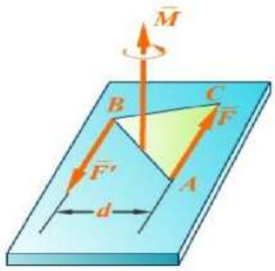
2.6 力偶



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}') &= \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})+\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}') \\
&= \boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{F}+\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{F}' \\
&= \boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{F}-\boldsymbol{r}_B\times\boldsymbol{F} \\
&= (\boldsymbol{r}_A-\boldsymbol{r}_B)\times\boldsymbol{F} \\
&= \boldsymbol{r}_{BA}\times\vec{\boldsymbol{F}}
\end{aligned}
$$

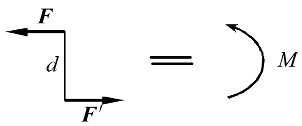
Def力偶矩矢量 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}_{BA}\times\vec{\boldsymbol{F}}$

自由矢量



若问题涉及的力偶的作用面共面或平行，力偶矩可用标量表示为

$$M=\pm Fd$$



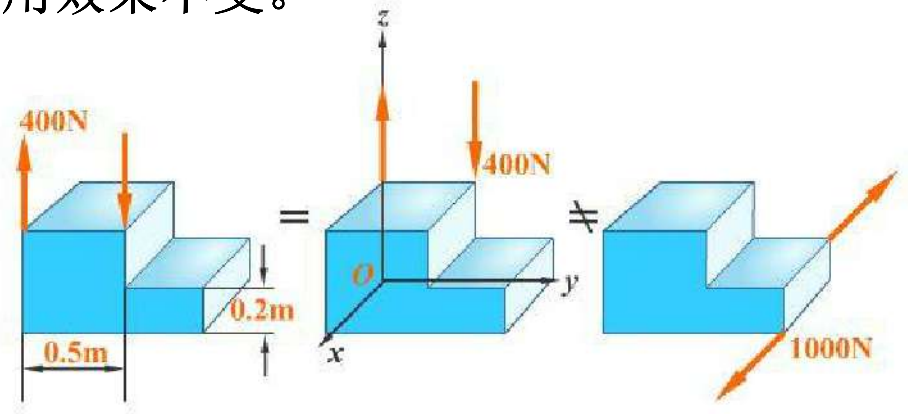
2.6 力偶

一、力偶的性质

性质**1** 力偶的矢量和为零，但不能相互平衡，是一种非零的最简单力系。

性质**2** 力偶对刚体的作用效果完全取决于力偶矩矢量。

推论：只要保持偶矩矢量不变，力偶可在作用面内任意移动或转动，或同时改变力和力偶臂的大小，或将其作用面平行移动，它对刚体的作用效果不变。



2.6 力偶

三、力偶系的合成

可以证明，任意个空间分布的力偶可以合成为一个力偶，合力偶矩矢等于各分力偶矩矢的矢量和，因而可用矢量求和法则求和力偶矩矢，即

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \Lambda + \boldsymbol{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i$$

对于平面力偶系

$$M = M_1 + M_2 + \Lambda + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$$